Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2021-2022 учебный год
10 класс

Задача 1. (20 б.)

Некоторое количество олова залито в тонкостенную стальную форму, подвешенную за тонкую ручку. В олово вплавлен термостойкий электрический нагревательный элемент постоянной мощности. Было замечено, что с момента достижения температуры плавления олова (T_0 = 232 ^{0}С) до полного перехода олова в жидкую фазу прошло t_1 = 20 минут. После этого температура олова повысилась до T_1 = 640 ^{0}С, причем последние 10 ^{0}С были достигнуты за t_2 = 3 минуты. После отключения нагревательного элемента олово остыло до температуры плавления. Остывание с 243 ^{0}С до 233 ^{0}С при этом заняло t_3 = 6 минут. Сколько приблизительно времени потребуется для кристаллизации всей массы олова, охлажденного до температуры плавления, в данных условиях? Примерно до какой температуры можно нагреть данный сосуд с оловом этим нагревателем в таких условиях? Теплоемкостью формы и нагревательного элемента можно пренебречь. Зависимостью теплоемкости олова от температуры пренебречь. Окружающая температура 32 ^{0}С. Температура плавления стали 1400 ^{0}С, температура кипения олова 2620 ^{0}С.

Возможное решение:

Обозначим мощность нагревательного элемента P_1,. мощность теплового обмена с окружающей средой пропорциональна разности температур сосуда с оловом и окружающей среды. В пределах 10 ^{0}С в данном случае эта мощность меняется слабо. Обозначим мощность теплообмена с окружающей средой при температуре плавления P_2. Аналогичная величина в районе 635 ^{0}С примерно в 3 раза выше (3P_2),

Этап плавления

$$(P_1 - P_2)t_1 = m\lambda; \qquad (1)$$

этап нагревания расплава 630-640 ^{0}С

$$(P_1 - 3P_2)t_2 = mc\Delta T; \qquad (2)$$

этап охлаждения расплава 243-233 ^{0}С

$$P_2 t_3 = mc\Delta T; \qquad (3)$$

этап кристаллизации

$$P_2 t_4 = m\lambda; \qquad (4)$$

Подстановка (3) в (2) дает

$$(P_1 - 3P_2) = \frac{P_2}{t_2} t_3$$

Подстановка (1) в (2) дает

$$\left(\frac{m\lambda}{t_1} - 2P_2\right) = \frac{P_2}{t_2} t_3$$

$$P_2 = \frac{m\lambda}{t_1\left(\frac{t_3}{t_2} + 2\right)}$$

Подстановка P_2 в (4) дает окончательно

$$t_4 = t_1\left(\frac{t_3}{t_2}+2\right) = 80 \text{ мин};$$

Для ответа на второй вопрос потребуется выражение для P_1

$$P_1 = \frac{m\lambda}{t_1}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{t_3}{t_2}+2\right)}\right) = \frac{m\lambda}{t_1}\left(\frac{\left(\frac{t_3}{t_2}+3\right)}{\left(\frac{t_3}{t_2}+2\right)}\right)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_3}{t_2}+3 = 5$$

Таким образом, при температуре 5(232-32)+32 ≈ 1030 ^{0}С мощность теплообмена с окружающей средой сравняется с мощностью нагревателя и температура перестанет расти.

Критерии оценивания:

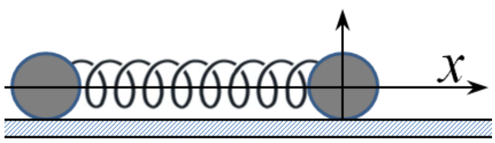
Учтен теплообмен с окружающей средой.	2
Учтена зависимость теплового потока от разности температур.	2
Тепловой баланс различных этапов.	8
Найдена мощность тепловых потерь при температуре плавления.	2
Время кристаллизации.	3
Оценка максимальной температуры.	3

Задача 2. (20 б.)

Система, состоящая из двух одинаковых шариков массой m и невесомой непроводящей пружины жесткостью k_0, лежит на гладком непроводящем столе. После того как шарикам сообщён одинаковый заряд, длина пружины увеличилась в $\gamma > 1$ раз. Найти период малых колебаний системы в таком состоянии.

Возможно, Вам будет полезна формула $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ при $x \ll 1$.

Возможное решение:



В системе отсчета центра масс шарики отдаляются и приближаются к центру пружины синхронно. По этой причине достаточно записать второй закон Ньютона для одного из шариков. Пусть заряд каждого из шариков q, длина пружины в недеформированном состоянии l_0.

$$m\ddot{x} = -k_0\big((\gamma-1)l_0+2x\big)+\frac{kq^2}{(\gamma l_0+2x)^2}$$

$$m\ddot{x} = -k_0\big((\gamma-1)l_0+2x\big)+\frac{kq^2}{(\gamma l_0)^2\left(1+\frac{2x}{\gamma l_0}\right)^2}$$

$$m\ddot{x} \approx -k_0\big((\gamma-1)l_0+2x\big)+\frac{kq^2}{(\gamma l_0)^2}\left(1-\frac{4x}{\gamma l_0}\right)$$

Принимая во внимание баланс сил в равновесном состоянии

$$0 = -k_0\big((\gamma-1)l_0\big)+\frac{kq^2}{(\gamma l_0)^2}$$

Второй закон Ньютона в линейном по смещению приближении имеет вид

$$m\ddot{x} = -2xk_0 - \frac{4xkq^2}{(\gamma l_0)^3} = -2xk_0 - \frac{4xk_0(\gamma-1)}{\gamma}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k_0}{m}\left(3 - \frac{2}{\gamma}\right)x = 0$$

Циклическая частота и период малых колебаний имеют вид

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_0}{m}\left(3 - \frac{2}{\gamma}\right)} \ ; \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_0\left(3 - \frac{2}{\gamma}\right)}}$$

Критерии оценивания:

Баланс сил в равновесии.	5
Второй закон Ньютона при смещении из положения равновесия.	6
Второй закон Ньютона в линейном приближении по малому смещению из положения равновесия.	5
Циклическая частота и период колебаний.	4

Задача 3. (20 б.)

В распоряжении экспериментатора есть два типа шариков: легкие и тяжелые. Оба типа шариков имеют одинаковый объем и покрыты одинаковой оболочкой. Если связать один легкий и один тяжелый шарик тонкой невесомой нитью и поместить в глицерин, они будут находиться в равновесии, полностью погрузившись в жидкость. Если взять два легких и один тяжелый шарик и поместить в масло, система также будет в равновесии, полностью погрузившись в жидкость. При погружении связанного одного легкого и одного тяжелого шарика в воду, система начнет тонуть с установившейся скоростью v_0 = 0.1 м/с. Найти среднюю плотность каждого шарика. Какая установившееся скорость будет у легкого и тяжелого шарика в воде, если нить между ними перерезать? Силу вязкого трения считать прямо пропорциональной скорости тела относительно среды. Силой трения, действующей на нить, пренебречь. Плотность глицерина $\rho_г$ = 1260 кг/м^3, воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, масла $\rho_м$ = 900 кг/м^3.

Возможное решение:

Найдем среднюю плотность легкого и тяжелого шарика. Для этого рассмотрим погружение в керосин и глицерин

$$\begin{cases} (m_h + m_l)g = 2Vg\rho_г \\ (m_h + 2m_l)g = 3Vg\rho_м \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_h + \rho_l = 2\rho_г \\ \rho_h + 2\rho_l = 3\rho_м \end{cases}$$

$$\rho_l = 3\rho_м - 2\rho_г = 180 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_h = 4\rho_г - 3\rho_м = 2340 \text{ кг/м}^3$$

Запишем баланс сил для установившегося движения в воде

$$2kv_0 + 2Vg\rho_в = 2Vg\rho_г$$

$$\frac{kv_0}{Vg} + \rho_в = \rho_г$$

$$\frac{k}{Vg} = \frac{(\rho_г - \rho_в)}{v_0}$$

Баланс сил для тяжелого шарика в воде

$$kv_h + Vg\rho_в = Vg(4\rho_г - 3\rho_м)$$

$$\frac{kv_h}{Vg} = 4\rho_г - 3\rho_м - \rho_в$$

$$v_h = \frac{(4\rho_г - 3\rho_м - \rho_в)v_0}{(\rho_г - \rho_в)} \approx 0.52 \text{ м/с}$$

Для легкого

$$-kv_l + Vg\rho_в = Vg(3\rho_м - 2\rho_г)$$

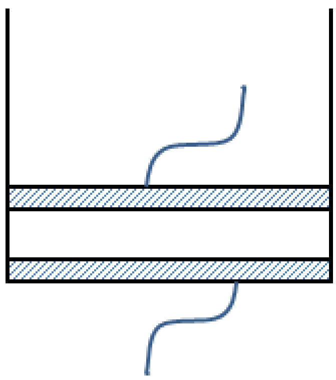
$$\frac{kv_l}{Vg} = \rho_в - 3\rho_м + 2\rho_г$$

$$v_l = \frac{(\rho_в - 3\rho_м + 2\rho_г)v_0}{(\rho_г - \rho_в)} \approx 0.32 \text{ м/с}$$

Критерии оценивания:

Баланс сил в масле и глицерине.	3
Плотности шаров.	4
Баланс сил для установившегося движения в воде.	3
Найдено отношение коэффициента трения к объему.	3
Баланс сил для установившегося движения в воде для легкого и тяжёлого шарика.	3
Скорости шариков.	4

Задача 4. (18 б.)



Цилиндрический сосуд с двухатомным идеальным газом имеет проводящее дно, но непроводящие стенки. Газ находится под герметичным металлическим поршнем, который может двигаться без трения. Исходный объем газа V_0. Когда дну сосуда и поршню сообщили заряды q_0 и $-q_0$ соответственно, объем газа уменьшился до V_0/β. Найдите зависимость объема газа от величины заряда q и $-q$, сообщенного соответственно дну и поршню. Рассмотреть изотермическое сжатие газа. Силой тяжести можно пренебречь, диаметр сосуда много больше расстояния между дном и поршнем. Диэлектрическая проницаемость газа близка к единице.

Возможное решение:

Электростатическая сила, действующая на поршень со стороны дна (напряженности поля дна на заряд поршня)

$$F = \frac{Uq}{2d} = \frac{q^2}{2cd} = \frac{q^2 d}{2S\varepsilon_0 d}$$

Ей противодействует разность давления газа в сосуде атмосферного давления, умноженная на площадь поршня.

$$F = (p - p_a)S$$

Для изотермического процесса

$$pV = const = p_a V_0$$

Условие равновесия для поршня

$$\frac{q^2}{2S\varepsilon_0} = p_a\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)S$$

$$\frac{1}{2S^2\varepsilon_0 p_a} = \frac{1}{q^2}\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2S^2\varepsilon_0 p_a} = (\beta - 1)\frac{1}{q_0^2}$$

$$(\beta - 1)\frac{q^2}{q_0^2} = \left(\frac{V_0}{V} - 1\right)$$

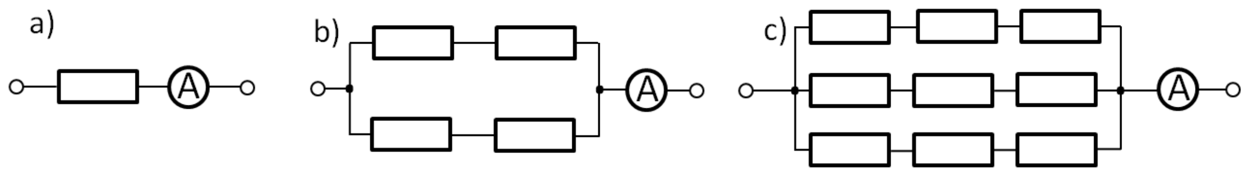
$$V = \frac{V_0}{(\beta - 1)\frac{q^2}{q_0^2} + 1}$$

Критерии оценивания:

Электрическое поле в конденсаторе (если верно найдена сила засчитывается автоматически).	3
Найдена сила взаимодействия между обкладками.	2
Правильное использование уравнения состояния идеального газа.	1
Баланс сил, действующих на поршень.	3
Неизвестные параметры сгруппированы и найдены из условий задачи.	5
Найден искомый объем.	4

Задача 5. (22 б.)

Идентичные резисторы подключают к идеальному источнику напряжения (во всех случаях одинаковому) в составе цепей, изображенных на рисунках a,b,c. Отношения значений показаний идеальных амперметров в цепях b) и a) $I_b/I_a = \gamma = 1.25$. Найдите отношение токов в цепях c) и a) I_c/I_a = ? Все токи указаны в установившемся режиме, зависимость сопротивления резисторов от температуры считать линейной, термодинамические свойства внешней среды во всех случаях идентичны, сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



Возможное решение:

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность резистора. Обозначим за U напряжение на источнике, k – коэффициент, связывающий разность температур окружающей среды и резистора и тепловую мощность потерь энергии через его поверхность.

$$\begin{cases} k\Delta T_a = UI_a \\ k\Delta T_b = \dfrac{UI_b}{4} \end{cases}$$

С другой стороны закон Ома с учетом температурной зависимости сопротивления для случая a) и b) имеет вид

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{U}{R_0(1+\alpha\Delta T_a)} \\ \dfrac{I_b}{2} = \dfrac{U}{2R_0(1+\alpha\Delta T_b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{U}{R_0\left(1+\dfrac{\alpha U I_a}{k}\right)} \\ I_b = \dfrac{U}{R_0\left(1+\dfrac{\alpha U I_b}{4k}\right)} \end{cases}$$

Введем параметры $p = \frac{U}{I_a R_0}$ и $b = \frac{\alpha U I_a}{k}$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{p}{(1+b)} \\ \gamma = \dfrac{p}{\left(1+\dfrac{b\gamma}{4}\right)} \end{cases}$$

$$b = \frac{4(\gamma-1)}{4-\gamma^2} = \frac{16}{39};\ p = \frac{\gamma(\gamma-4)}{4-\gamma^2} = \frac{55}{39};$$

Ток для трех последовательно соединенных резисторов можно найти из закона Ома. В данном случае он представляет из себя квадратное уравнение относительно силы тока.

$$I_c = 3\frac{U}{3R_0(1+\alpha\Delta T_c)}$$

$$\frac{I_c}{I_a} = \frac{p}{\left(1+\dfrac{bI_c}{9I_a}\right)}$$

$$\frac{I_c}{I_a} = 3\cdot\frac{3\pm\sqrt{4bp+9}}{2b}$$

$$\frac{I_c}{I_a} \approx 1.33$$

Критерии оценивания:

Равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность.	6
Закон Ома для случая a) и b) с учетом зависимости от температуры.	6
Введение параметров, подходящих для дальнейшего решения задачи.	2
Определение введенных выше параметров из известного соотношения токов.	4
Искомое отношение токов.	4