Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2021-2022 учебный год
11 класс

Задача 1. (15 б.)
Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d > F$ от линзы, где F – фокусное расстояние линзы (известно). Где за линзой нужно разместить перпендикулярное оптической оси плоское зеркало, чтобы

а) действительное изображение источника совпало с самим источником?

б) отразившиеся от зеркала и повторно прошедшие через линзу лучи образовали параллельный пучок?

Возможное решение:
а) Если поместить зеркало в той же точке, где формируется действительное изображение, то вторичное изображение совпадет с источником. Таким образом, зеркало нужно поместить на расстоянии f от линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{Fd}{d-F}$$

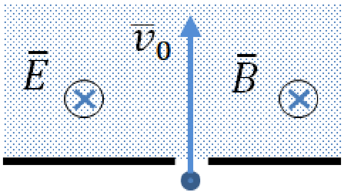
б) В данном случае достаточно чтобы изображение после преломления в линзе и отражения в зеркале оказалось в фокусе. Следовательно, зеркало должно быть посередине между изображением (без зеркала) и фокусом. Расстояние от линзы

$$l = F + \frac{f-F}{2} = \frac{F(2d-F)}{2(d-F)};$$

Критерии оценивания:

а) Присутствует корректное построение лучей и/или описание хода лучей. Идея о положении изображения. В случае правильного ответа зачитывается автоматически.	2
а-б) Использована формула тонкой линзы для нахождения положения первичного изображения.	3
а) Найден верный ответ.	2
б) Присутствует корректное построение лучей и/или описание хода лучей. Идея о положении изображения в фокусе. В случае правильного ответа зачитывается автоматически.	3
б) Идея о расположении зеркала по середине между фокусом и изображением.	3
б) Найден верный ответ.	2

Задача 2. (20 б.)



Область с постоянными электрическим $\bar{E}$ и магнитным $\bar{B}$ полями отделена бесконечной перегородкой. Поля сонаправлены и перпендикулярны плоскости рисунка. Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью $\bar{v}_0$ через маленькое отверстие в область с постоянными полями перпендикулярно перегородке. На каком расстоянии от отверстия, через которое влетела частица, она ударится об перегородку? Силой тяжести можно пренебречь.

Возможное решение:

Запишем второй закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}];$$

Скорость частицы можно разложить на две компоненты: в плоскости рисунки $\mathbf{v_p}$ и перпендикулярно плоскости рисунка $\mathbf{v_n}$. Ускорение мы раскладываем аналогично. Принимая во внимание $[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{B}] + [\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}, \mathbf{B}] = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{B}]$, получаем 2 независимых уравнения

$$m\boldsymbol{a_p} = q[\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{B}];$$

$$m\boldsymbol{a_n} = q\mathbf{E};$$

Второе уравнение описывает движение под действием постоянной силы из состояния покоя. Если направить ось z перпендикулярно плоскости рисунка, $z(t)$ имеет вид:

$$z(t) = \frac{qEt^2}{2m};$$

Первое уравнение описывает движение в магнитном поле по круговой траектории со скоростью, раной v_0

$$\frac{mv_0^2}{R} = qvB$$
$$R = \frac{mv_0}{qB};$$

«Период» такого движения

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB};$$

Соударение с перегородкой произойдёт через $T/2$. В плоскости рисунка частица к этому моменту переместится на $2R$. Перпендикулярно плоскости

$$z\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E\pi^2 m}{2qB^2};$$

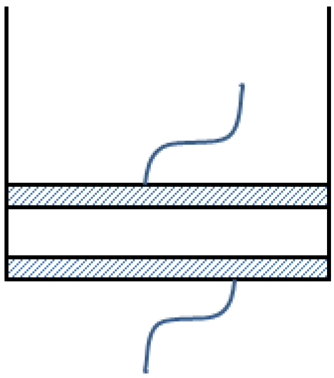
Искомое расстояние можно найти по теореме Пифагора

$$l = \sqrt{\left(\frac{E\pi^2 m}{2qB^2}\right)^2 + \left(\frac{2mv_0}{qB}\right)^2}\;;$$

Критерии оценивания:

Записан Второй закон Ньютона для частицы. (Если верны два следующих пункта, засчитывается).	4
Уравнения динамики в плоскости рисунка.	2
Уравнения динамики перпендикулярно плоскости рисунка.	2
Закон движения в плоскости рисунка.	2
Закон движения перпендикулярно плоскости рисунка.	2
Найдено смещение в плоскости рисунка.	2
Найдено время движения.	3
Получен верный ответ.	3

Задача 3. (20 б.)



Цилиндрический сосуд с двухатомным идеальным газом имеет проводящее дно, но непроводящие стенки. Газ находится под герметичным металлическим поршнем, который может двигаться без трения. Исходный объем газа V_0. Когда дну сосуда и поршню сообщили заряды q_0 и $-q_0$ соответственно, объем газа уменьшился до V_0/β. Найдите зависимость объема газа от величины заряда q и $-q$, сообщенного соответственно дну и поршню. Рассмотреть адиабатическое сжатие газа. Силой тяжести можно пренебречь, диаметр сосуда много больше расстояния между дном и поршнем. Диэлектрическая проницаемость газа близка к единице. Показатель адиабаты равен отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Возможное решение:

Электростатическая сила, действующая на поршень со стороны дна (напряженности поля дна на заряд поршня)

$$F = \frac{Uq}{2d} = \frac{q^2}{2cd} = \frac{q^2 d}{2S\varepsilon_0 d}$$

Ей противодействует разность давления газа в сосуде атмосферного давления, умноженная на площадь поршня.

$$F = (p - p_a)S$$

Для адиабатического процесса

$$pV^\gamma = const = p_a V_0^\gamma$$

Условие равновесия для поршня

$$\frac{q^2}{2S\varepsilon_0} = p_a\left(\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma - 1\right)S$$

$$\frac{1}{2S^2 p_a \varepsilon_0} = \frac{1}{q^2}\left(\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma - 1\right)$$

$$\frac{1}{2S^2\varepsilon_0 p_a} = (\beta^\gamma - 1)\frac{1}{q_0^2}$$

$$(\beta^\gamma - 1)\frac{q^2}{q_0^2} = \left(\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma - 1\right)$$

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^\gamma = \frac{1}{(\beta^\gamma - 1)\frac{q^2}{q_0^2} + 1}$$

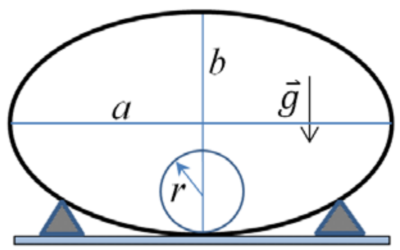
$$V = \frac{V_0}{\sqrt[\gamma]{(\beta^\gamma - 1)\frac{q^2}{q_0^2} + 1}};\ \gamma = \frac{7}{5}$$

Критерии оценивания:

Электрическое поле в конденсаторе (если верна найдена сила засчитывается автоматически).	3
Найдена сила взаимодействия между обкладками.	2
Уравнение адиабаты и показатель адиабаты.	3
Баланс сил, действующих на поршень.	3
Неизвестные параметры сгруппированы и найдены из условий задачи.	5
Найден искомый объем.	4

Задача 4. (20 б.)

Найти период малых колебаний тонкостенного цилиндра радиуса r, который может кататься без проскальзывания по неподвижной трубе эллиптического сечения с полуосями a и b ($a,b>>r$). Положение трубы относительно вертикали показано на рисунке.



Указания:

$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x$ при $x \ll 1$.

Теорема Кенинга:

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии системы в системе отчета центра масс.

Возможное решение:
Найдем аналитическое выражение высоты поверхности трубы от координаты вблизи точки равновесия. Если поместить начало координат в точку равновесия, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$

$$y-b=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

В данном случае нам нужна нижняя ветвь $y(x)$

$$y=b\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\approx\frac{bx^2}{2a^2}.$$

Скорость центра масс цилиндра, который катится без проскальзывания, равна скорости стенок цилиндра в системе центра масс. С учетом теоремы Кенинга и условия $a,b>>r$ (траектория центра масс примерно соответствует поверхности трубы)*, полная механическая энергия может быть записана в виде

$$E=mv^2+mg\frac{bx^2}{2a^2}$$

$$v^2=v_x^2+v_y^2=v_x^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=v_x^2+v_x^2\left(\frac{bx}{a^2}\right)^2\approx v_x^2$$

Приведем это выражение к виду энергии одномерного гармонического осциллятора

$$E_h=\frac{m^*v_x^2}{2}+\omega^2\frac{m^*x^2}{2}+const$$

$$E=\frac{2mv_x^2}{2}+\frac{gb}{2a^2}\cdot\frac{2mx^2}{2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{gb}{2a^2}};\ \ T=2\pi a\sqrt{\frac{2}{gb}}$$

*Если мы не будем использовать это условие, ответ будет иметь вид

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{2\left(\frac{a^2}{b}-r\right)}},$$

что в рамках $a,b>>r$ соответствует полученному выше.

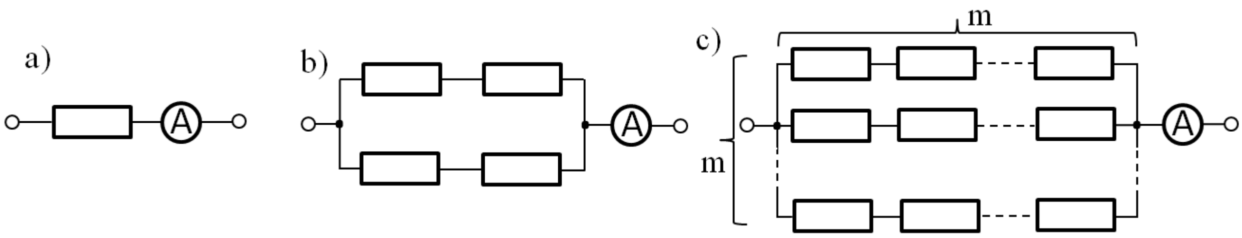
Критерии оценивания:

Найдено выражение для высоты поверхности трубы в зависимости от горизонтального смещения.	4
Записано выражение для энергии цилиндра / рассчитана возвращающая сила.	4
Учтена кинетическая вращения цилиндра.	3
Записано уравнение колебаний или выражение для энергии гармонического осциллятора.	2

Разложение по малому параметру (Различное в зависимости от выбранного пути решения).	3
Циклическая частота и период.	4

Задача 5. (25 б.)

Идентичные резисторы подключают к идеальному источнику напряжения (во всех случаях одинаковому) в составе цепей, изображенных на рисунках a,b,c. Отношения значений показаний идеальных амперметров в цепях b) и a) $I_b/I_a = \gamma = 1.25$. Найдите отношение токов в цепях c) и a) I_c/I_a = ? Указать выражение при произвольном m, значение при $m = 4$ и $m \to \infty$. Все токи указаны в установившемся режиме, зависимость сопротивления резисторов от температуры считать линейной, термодинамические свойства внешней среды во всех случаях идентичны, сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



Возможное решение:

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность резистора. Обозначим за U напряжение на источнике, k – коэффициент, связывающий разность температур окружающей среды и резистора и тепловую мощность потерь энергии через его поверхность.

$$\begin{cases} k\Delta T_a = UI_a \\ k\Delta T_b = \dfrac{UI_b}{4} \end{cases}$$

С другой стороны закон Ома с учетом температурной зависимости сопротивления для случая a) и b) имеет вид

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{U}{R_0(1+\alpha\Delta T_a)} \\ \dfrac{I_b}{2} = \dfrac{U}{2R_0(1+\alpha\Delta T_b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{U}{R_0\left(1+\dfrac{\alpha UI_a}{k}\right)} \\ I_b = \dfrac{U}{R_0\left(1+\dfrac{\alpha UI_b}{4k}\right)} \end{cases}$$

Введем параметры $p = \frac{U}{I_aR_0}$ и $b = \frac{\alpha UI_a}{k}$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{p}{(1+b)} \\ \gamma = \dfrac{p}{\left(1+\dfrac{b\gamma}{4}\right)} \end{cases}$$

$$b = \frac{4(\gamma-1)}{4-\gamma^2} = \frac{16}{39}\,; p = \frac{\gamma(\gamma-4)}{4-\gamma^2} = \frac{55}{39};$$

Ток для m последовательно соединенных резисторов можно найти из закона Ома. В данном случае он представляет из себя квадратное уравнение относительно силы тока.

$$I_c = m\frac{U}{mR_0(1+\alpha\Delta T_c)}$$

$$\frac{I_c}{I_a} = \frac{p}{\left(1+\frac{bI_c}{m^2 I_a}\right)}$$

$$\frac{I_c}{I_a} = -m\cdot\frac{m \pm \sqrt{4bp+m^2}}{2b}$$

$$\frac{I_c}{I_a} \approx 1.36 \text{ при } m = 4$$

$\frac{I_c}{I_a} = p \approx 1.41$ при $m \to \infty$.

Критерии оценивания:

Равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность.	6
Закон Ома для случая a) и b) с учетом зависимости от температуры.	6
Введение параметров, подходящих для дальнейшего решения задачи.	2
Определение введенных выше параметров из известного соотношения токов.	4
Выражение для отношения токов в общем виде.	3
Для m=4	2
Для $m \to \infty$	2