10 класс

1. Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если
а) $d = 25$; *б*) $d = 24,99$? (25 *баллов*)

2. Многочлен $f(x) = ax^{100} + bx + c$ принимает целые значения при любых целых x. Какое наименьшее положительное значение может принимать a? (25 *баллов*)

3. На каждой грани куба написано по одному положительному числу. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел оказалась равной 1000. Найдите наименьшее возможное значение суммы шести чисел, написанных на гранях куба. (25 *баллов*)

4. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке N. Пусть B_1 — точка пересечения данной окружности с окружностью, проходящей через точки B, M и N, отличная от B. В каком отношении прямая B_1D делит отрезок MN? (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по предмету «Математика»
Заключительный этап, 2019-2020 учебный год

10 класс

1. Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если
а) $d = 25$; *б*) $d = 24,99$? (25 *баллов*)

2. Многочлен $f(x) = ax^{100} + bx + c$ принимает целые значения при любых целых x. Какое наименьшее положительное значение может принимать a? (25 *баллов*)

3. На каждой грани куба написано по одному положительному числу. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел оказалась равной 1000. Найдите наименьшее возможное значение суммы шести чисел, написанных на гранях куба. (25 *баллов*)

4. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке N. Пусть B_1 — точка пересечения данной окружности с окружностью, проходящей через точки B, M и N, отличная от B. В каком отношении прямая B_1D делит отрезок MN? (25 *баллов*)

10 класс

1. Ответ: *а) можно; б) нельзя.*

а) Нужные куски всегда можно получить, например, так. Выберем из образовавшихся частей ту, которая не короче другой (и значит, не короче $12,5$ метров), вырезаем из неё 12-метровый кусок. У нас останется две части, сумма длин которых равна 13 *м*. По крайней мере одна из этих частей будет не короче $6,5$ *м*; вырезаем 6-метровый кусок и так далее. (Оставаться будут пары частей с суммами длин 7 *м*, 4 *м* и 2 *м*, а вырезаться куски длиной 3 *м*, 2 *м* и 1 *м* соответственно.)

б) Если провод длиной $l = 24,99$ метров разрезали, например, на части с длинами $0,995$ *м* и $23,995$ *м*, то получить требуемые куски нельзя. В самом деле, из куска $0,995$ *м* невозможно вырезать ни одного требуемого куска, а из куска $23,995$ *м* это сделать не получится, поскольку сумма длин $1 + 2 + 3 + 6 + 12 = 24$ больше $23,995$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное решение пункта *а*) — 20 баллов, пункта *б*) — 5 баллов.

2. Ответ: $\frac{1}{2}$.

По условию $f(x)$ принимает целые значения при всех целых x, поэтому числа $f(0) = c$, $f(1) = a+b+c$ и $f(-1) = a-b+c$ — целые. Значит, $f(1)+f(-1) = 2a+2c$ — целое, а так как c — целое, то и $2a$ — целое. Если $a > 0$, то $2a$ не меньше 1, и значит, $a \geqslant \frac{1}{2}$. Функция $f(x) = \frac{1}{2}(x^{100}+x)$ с коэффициентом $a = \frac{1}{2}$ удовлетворяет условию задачи, поскольку сумма $x^{100} + x$ делится на 2 для всех чётных и нечётных x.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример многочлена — 5 баллов. Оценка коэффициента a — 20 баллов.

3. Ответ: 30.

Обозначим пары чисел на противоположных гранях куба через a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2. Тогда сумма восьми произведений равна $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) = 1000$. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и геометрическом для трёх положительных чисел $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ и $c_1 + c_2$:

$$\sqrt[3]{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)} \leqslant \frac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)}{3}.$$

Левая часть равна $\sqrt[3]{1000} = 10$, поэтому наименьшее значение суммы $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)$ равно 30.

Знак равенства достигается только в случае $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 10$. Этим условиям удовлетворяют, например, числа 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7.

Критерии. Только пример — 5 баллов. Оценка суммы — 20 баллов.

4. Ответ: $1 : 1$.

Пусть K — точка пересечения прямой B_1D с описанной окружностью треугольника BNM (рис. 1). Докажем, что четырёхугольник $NDMK$ — параллелограмм. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, отсюда будет следовать, что прямая B_1DK делит MN в отношении $1 : 1$.

Сначала докажем параллельность прямых MD и NK.

Вписанные углы BB_1D и BCD опираются на одну дугу BAD, поэтому $\angle BCD = \angle BB_1D$. Равными будут и вписанные углы BB_1K и BNK как опирающиеся на дугу BMK, то есть $\angle BB_1K = \angle BNK$, поэтому $\angle BCD = \angle BNK$. Это означает, что $MC \parallel NK$.

Аналогично доказывается параллельность MK и ND.

Четырёхугольники $BADC$ и $BMKN$ — вписанные, поэтому $\angle BAD = 180° - \angle BCD$ и $\angle BMK = 180° - \angle BNK$. Так как $\angle BCD = \angle BNK$, отсюда следует, что $\angle BAN = \angle BMK$, и значит, $MK \parallel ND$.

Итак, $NDMK$ — параллелограмм, и B_1D делит MN пополам.

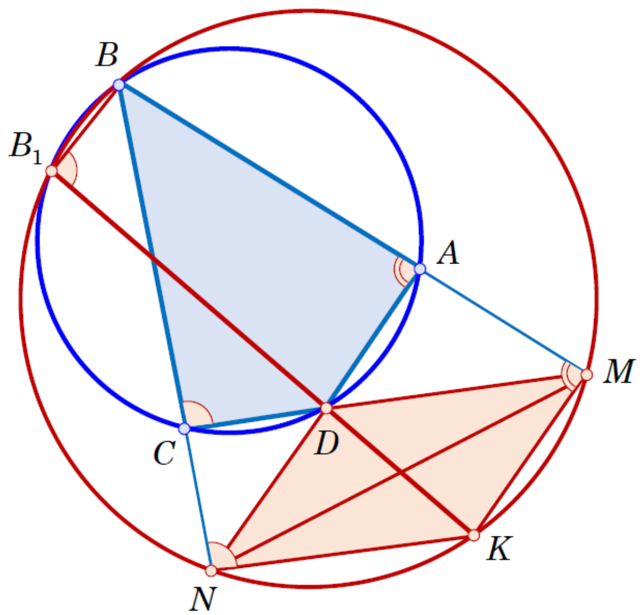

Рис. 1

Критерии. Отмечено без доказательства, что $NDMK$ — параллелограмм, — 5 баллов. Доказана параллельность только одной из двух пар противоположных сторон параллелограмма — 10 баллов.