Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Физика»
заключительный этап (ответы)
2018-2019 учебный год
10 класс

Задача 10.1.1

Пружину с грузом массы m, не деформируя, отклонили на угол 90^o и сфотографировали в момент прохождения положения равновесия. Пружина в недеформированном состоянии имеет длину L и жесткость k. Чему равно удлинение ΔL пружины на фотографии? Положив что $mg \ll kL$ получите приближенное значение удлинения при k = 100 Н/м, m = 100 г, L = 1 м с точностью до десятых долей мм. (20 баллов)

Решение.

Энергия системы "груз+пружина" в начальном состоянии $mg(L + \Delta L)$, так как после растяжения в конце изменение высоты будет равно $L + \Delta L$. В конечном состоянии энергия системы будет состоять из кинетической энергии груза и потенциальной энергии растяжения пружины:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta L^2}{2} = E_{\text{после}}$$

Тогда по закону сохранения энергии можно записать:

$$mg(L + \Delta L) = \frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta L^2}{2}$$

В нижней точке можно записать уравнение Ньютона, где сумма всех сил будет равна центростремительному ускорению:

$$\frac{mv^2}{L + \Delta L} = k\Delta L - mg$$

Выражая mv^2 и подставляя его в закон сохранения энергии можно получить следующее:

$$mv^2 = (k\Delta L - mg)(L + \Delta L)$$

$$2mg(L + \Delta L) = k\Delta L^2 + (k\Delta L - mg)(L + \Delta L)$$

Раскрывая скобки, получаем квадратное уравнение относительно ΔL.

$$2k\Delta L^2 + \Delta L(kL - 3mg) - 3mgL = 0$$

Дискриминант этого квадратного уравнения представим в удобном для дальнейших оценок виде:

$$D = k^2L^2 + 18mgkL + 9m^2g^2 = k^2L^2(1 + 18\frac{mg}{kL} + 9\left(\frac{mg}{kL}\right)^2)$$

Тогда корень уравнения, при выбранном знаке «+» перед дискриминантом, запишется следующим образом:

$$\Delta L = \frac{3mg - kL + kL\sqrt{1 + 18\frac{mg}{kL} + 9\left(\frac{mg}{kL}\right)^2}}{4k} = L\frac{3\frac{mg}{kL} - 1 + \sqrt{1 + 18\frac{mg}{kL} + 9\left(\frac{mg}{kL}\right)^2}}{4}$$

Далее g можно приравнять одному из двух значений: $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$и $g = 9.81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Подставляя вместо $\frac{mg}{kL} = 10^{-2}$ можно получить:

$$\Delta L = \frac{L}{4}\cdot\left(0.03 - 1 + \sqrt{1 + 0.18 + 0.0009}\right) \cong 2.917\ \text{см}$$

При этом если подставить вместо $\frac{mg}{kL} = 9.81\cdot 10^{-3}$, то получится:

$$\Delta L = \frac{L}{4}\cdot\left(3\cdot 9.81\cdot 10^{-3} - 1 + \sqrt{1 + 18\cdot 9.81\cdot 10^{-3} + 9\cdot 96.2361\cdot 10^{-6}}\right) \cong 2.863\ \text{см}$$

Таким образом ответ к задаче с требуемой точностью должен быть приведен в виде 28.7 мм или 29.2 мм, при условии указания какое значение g было использовано.

Заметим, что условие $mg \ll kL$ следует воспринимать как основание для использования формулы приближенного вычисления квадратного корня:

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$$

При таком условии:

$$\Delta L = L\frac{3\frac{mg}{kL} - 1 + \sqrt{\left(1 + 3\frac{mg}{kL}\right)^2 + 12(\frac{mg}{kL})}}{4} = \frac{L}{4}\cdot(\frac{3mg}{kL} - 1 + 1 + 3\frac{mg}{kL} + \frac{6\frac{mg}{kL}}{1 + 3\frac{mg}{kL}})$$

Это выражение так же дает:

$$\Delta L = \frac{L}{4}\cdot\left(6\cdot\frac{mg}{kL}\right)\cdot(1 + \frac{1}{1 + 3\frac{mg}{kL}})$$

Ответ: 28.7 мм или 29.2 мм

Критерии оценивания

Безошибочно записан и обоснован закон сохранения энергии.	5
Безошибочно записан и обоснован второй закон Ньютона в нижней точке траектории.	5
Получено квадратное уравнение относительно неизвестного удлинения пружины. Безошибочно записан дискриминант и общий вид решения.	6
Приведен численный ответ с заданной точностью с использованием одного из возможных g.	4

Задача 10.1.2

В ракете, взлетающей вертикально вверх с планеты массы M и радиуса R с постоянным ускорением a, находится математический маятник. На какой высоте h над поверхностью планеты период колебаний математического маятника станет таким же, как и в ракете, неподвижно стоящей на поверхности планеты? (16 баллов)

Возможное решение

Период колебаний математического маятника в ракете, неподвижно стоящей на поверхности планеты равен

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{G\frac{M}{R^2}}}$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса планеты, R- её радиус, а g – ускорение свободного падения на поверхности планеты. Период колебаний маятника во взлетающей с ускорением a ракете на высоте h равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{G\frac{M}{(R+h)^2}+a}}.$$

Из равенства T=T_0 получим: $G\frac{M}{(R+h)^2}+a = G\frac{M}{R^2}$, откуда $h = \left(\frac{1}{R^2}-\frac{a}{GM}\right)^{-1/2} - R$.

Критерии оценивания

Записано уравнение для периода колебаний математического маятника при отсутствии решения или при ошибочном решении.	2
Есть понимание задачи, но не получено одно из необходимых для решения уравнений и в результате решение не найдено.	3
Записано уравнение для периода колебаний математического маятника во взлетающей с ускорением *a* ракете на высоте *h*.	6
Получено выражение для высоты *h* над поверхностью планеты когда период колебаний математического маятника такой же, как и в ракете, неподвижно стоящей на поверхности планеты.	5

Задача 10.1.3

Цилиндрический открытый сосуд имеет маленькое отверстие вблизи дна, из которого вытекает вода. Изначально (при t =0) уровень воды в сосуде равен h. Через некоторое время отверстие закрывают и уровень воды становится равным h_1. Пользуясь графиком (см. Рис.1) зависимости объема вытекшей воды от времени найдите приблизительное отношение h к h_1. (22 баллов)

Решение.

Малый объем вытекшей воды может быть представлен через скорость струи, сечение отверстия и малый промежуток времени:

$$\Delta V = vS\Delta t$$

Таким образом, тангенс угла наклона касательной объема в зависимости от времени пропорционален скорости струи

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \sim v$$

Зависимость скорости струи от высоты столба жидкости может быть найдена несколькими способами: из закона сохранения энергии (формула Торичелли), как частный случай закона Бернулли, либо при непосредственном рассмотрении кинематики малого объема жидкости.

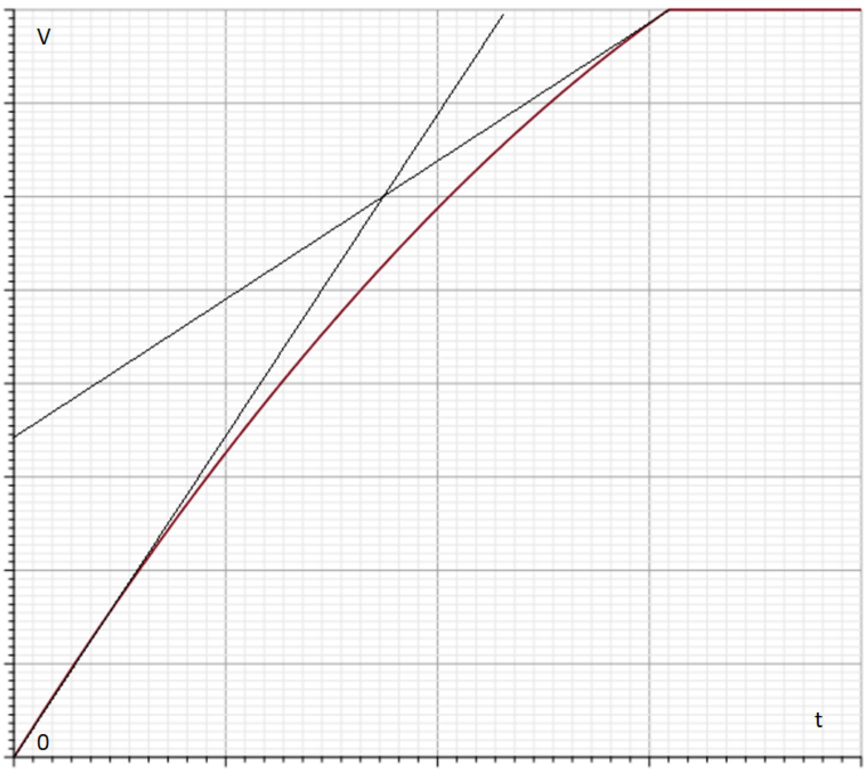
Приведем здесь первый способ:

Рассмотрим превращения энергии при вытекании малого объема воды. С точки зрения закона сохранения энергии можно считать, то этот объем перемещается с верхней части сосуда, так как остальная жидкость практически неподвижна. Изменение потенциальной энергии малого объема $-\Delta V\rho gh$ можно приравнять изменению кинетической энергии с обратным знаком $\Delta V\rho v^2/2$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \sim \sqrt{h}$$

Обозначим за a тангенс угла наклона касательной при t->0, за a_1 -тангенс угла наклона касательной вблизи перехода к горизонтальному участку.



Тогда искомое отношение будет иметь вид:

$$\frac{h}{h_1} \sim \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \approx 5$$

Критерии оценивания

Указана связь между вытекшим объемом и скоростью жидкости.	4
Найдена связь между высотой столба (через кинематику жидкости, уравнение Бернулли либо через закон сохранения энергии) и скоростью струи.	10
Установлена верная связь между наклоном касательной и высотой столба.	3
По графику получены наклоны касательных и рассчитано отношение высот с относительно погрешностью 25%.	5

Задача 10.1.4

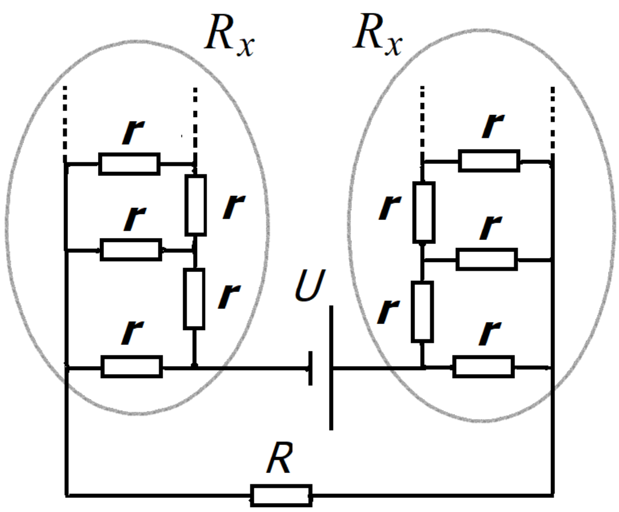
В представленной на рисунке электрической схеме с двумя бесконечными цепочками сопротивлений найти силу тока через сопротивление *R*. (22 баллов)

Решение.

Найдем сначала сопротивление бесконечных цепочек сопротивлений. Бесконечность такого рода цепочек сопротивлений означает, что добавление к ним ещё одного периодического фрагмента не меняет их сопротивления R_x (см. рисунок). Заметим также, что сопротивления этих 2-х бесконечных цепочек одинаковы.

При добавлении к цепочке R_x ещё одного периодического фрагмента следует, что

$$\frac{1}{R_x}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r+R_x},$$



откуда $R_x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)r.$ Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_x{}^2+rR_x-r^2=0$ отбрасываем как нефизический.

Таким образом, сопротивления слева и справа от источника напряжения равны по R_x, и суммарное сопротивление всей цепи равно

$$R_\Sigma=R+2R_x=R+\left(\sqrt{5}-1\right)r.$$

По закону Ома ток в цепи через сопротивление *R* равен

$$I_R=\frac{U}{R_\Sigma}=U/\left[R+\left(\sqrt{5}-1\right)r\right].$$

Критерии оценивания

Есть отдельные уравнения, относящиеся к сути задачи при отсутствии решения или при ошибочном решении.	2
Есть понимание задачи, но не получено одно из необходимых для решения уравнений и в результате решение не найдено.	3
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений одной из частей.	9
Найдено (указано), что сопротивления бесконечных цепочек сопротивлений одинаковы.	3
Найдено суммарное сопротивление всей цепи.	3
Найден ток в цепи через сопротивление *R*.	2

Задача 10.1.5.

Восемь бусинок, имеющих массу m и заряд q, находятся в вершинах куба со стороной l. Какую скорость приобретут бусинки, если их предоставить самих себе? (20б баллов)

Решение

Воспользуемся законом сохранения энергии: $\frac{8mv^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\,\varphi_i$, где φ_i - электростатический потенциал в точке, в которой находится i-тая бусинка. Учитывая, что все бусинки тождественны, закон сохранения энергии принимает вид $mv^2=q\varphi.$ Вклад в потенциал дают 3 бусинки, которые находятся на соседних вершинах $\left(\varphi_1 = \frac{kq}{l}\right)$; 3 бусинки, которые находятся на диагоналях граней $\left(\varphi_2 = \frac{kq}{l\sqrt{2}}\right)$; 1 бусинка, которая находится на противоположной вершине $\left(\varphi_3 = \frac{kq}{l\sqrt{3}}\right)$. Общий потенциал $\varphi = 3\varphi_1 + 3\varphi_2 + \varphi_3$. Таким образом, $v = \sqrt{\frac{q\varphi}{m}}$ или $v = \sqrt{\frac{kq^2}{ml}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + 3\right)}$.

Критерии оценивания

Верно записан закон сохранения энергии.	7
Верно записано выражение для потенциала.	8
Верно найдено выражение для скорости.	5

Задача 10.2.1

Снаряд разлетелся в середине большой комнаты на 3 осколка с одинаковыми массами и скоростями. Один осколок продолжил движение в том же направлении, два других разлетелись в вертикальной плоскости под углом 60 градусов друг к другу. Осколок летевший прямо ударился в стену через время t_1, а время между приземлением двух других осколков равно τ. Когда один из осколков коснулся потолка, скорость его была направлена горизонтально. Все удары упругие. Найти длину и высоту комнаты. (20 баллов)

Решение.

Снаряд, полетевший вперед ударится в стену, и тем самым за время t_1 преодолеет половину длины комнаты. Снаряд полетевший вверх должен коснуться потолка, это значит это будет верхняя точка его траектории, как тела, брошенного под углом к горизонту.

Запишем длину комнаты как L, а высоту комнаты как H, тогда:

$$\frac{L}{2} = v_0 t_1$$

$$\frac{H}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Угол, под которым разлетаются осколки – 60^0. Так как снаряд до разрыва летел горизонтально, то суммарный импульс по вертикали у осколков должен равняться нулю. Тогда угол относительно горизонта у осколков имеющих вертикальную компоненту скорости будет равен 30^0.

Время движения тела, брошенного под углом к горизонту – это и есть время отставания осколка, полетевшего вверх, от осколка, отлетевшего вниз.

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \to v_0 = \frac{g\tau}{2\sin\alpha}$$

Полученное значение v_0 подставляем в уравнения для высоты и длины комнаты.

Имея ввиду, что $\sin\alpha = \sin 30^0$, получаем

$$L = \frac{g\tau t_1}{\sin\alpha} = 2g\tau t_1$$

$$H = \frac{g\tau^2}{4}$$

Критерии оценивания

Получены выражения для длины и высоты комнаты через скорости осколков.	4
Правильно определены углы между скоростями осколков и горизонталью в момент разлета.	3
Верно определено время отставания τ осколков друг от друга.	6
Получено правильное конечное значение для дальности и высоты комнаты.	7

Задача 10.2.2

Инженер Левшов изобрел машину, способную двигаться с постоянной скоростью V = 36 км/ч в вертикальном направлении, если стартовать с экватора. В машину встроена система безопасности, которая остановит её, если перестанет ощущать притяжение к Земле. Через сколько времени это произойдет? Радиус Земли R= 6400 км. (16б)

Решение.

Отрываясь от поверхности Земли такая машина будет продолжать двигаться со скоростью $v-$ линейной скоростью вращения Земли вокруг своей оси. Её выражение приблизительно равно:

$$v = \frac{2\pi R}{T_{\text{сут}}} = \frac{2\pi R}{24\ \text{ч}}$$

В таком случае, машина перестанет чувствовать притяжение Земли тогда, когда на высоте h от поверхности центробежные силы будут скомпенсированы с силой гравитации.

$$G \cdot \frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$$

Тогда высота будет равна

$$h = G \cdot \frac{M}{v^2} - R = G \cdot \frac{MT^2}{4\pi^2 R^2} - R$$

Так как $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$, то в итоге получаем:

$$h = \frac{gT^2}{4\pi^2} - R = 1.9 \cdot 10^9\text{м}$$

Тогда время, через которое машина остановится:

$$t = \frac{h}{V} \cong 6\ \text{лет}$$

Критерии оценивания

Учтена скорость вращения Земли и правильно записано её выражение.	5
Записано условие, при котором машина останавливается.	5
Рассчитано расстояние от Земли на котором произойдет выключение, и время через которое это произойдет.	6

Задача 10.2.3

Доска длиной L=4 м скользит по гладкой горизонтальной поверхности и наезжает на шероховатый участок, где коэффициент трения между доской и шероховатой поверхностью μ= 0.25. Найти время торможения доски до остановки, если известно, что доска наехала на шероховатый участок лишь частично. (22 баллов)

Решение.

Пусть x – длина участка доски, наехавшей на шероховатый участок. Сила трения (проекция на горизонталь), действующая на шероховатый участок, равна

$$F_{\text{тр}} = -\frac{\mu m x g}{L}$$

Где m – масса доски, g – ускорение свободного падения. Уравнение движения доски имеет вид:

$$ma = -\frac{\mu m x g}{L} = -kx, \text{где } k = \frac{\mu m g}{L}$$

Оно аналогично движению груза массой m под действием упругой силы F=-kx. Закон движения массы m представляет собой гармонические колебания с циклической частотой

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Время торможения доски до полной остановки рано четверти «периода колебаний»

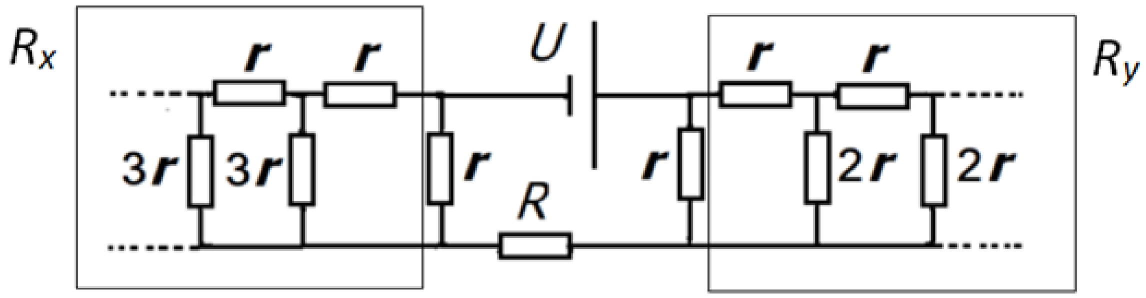
$$t = -\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4}{0.25 \cdot 10}}\,c \approx 2c$$

Критерии оценивания:

Записано выражение для силы трения.	5
Найден закон движения (по аналогии с гармоническими колебаниями или другим способом).	10
Получено правильное аналитическое выражение для времени торможения.	4
Получен верный численный ответ.	3

Задача 10.2.4

Найти силу тока через сопротивление R в представленной на рисунке 1 электрической схеме с двумя различающимися бесконечными цепочками сопротивлений. (22б)



Решение.

Найдем сначала сопротивления бесконечных цепочек сопротивлений. Бесконечность такого рода цепочек сопротивлений означает, что добавление к каждой из них ещё одного соответствующего периодического фрагмента не меняет их сопротивлений R_x или R_y (см. рисунок). При добавлении к цепочке R_x ещё одного периодического фрагмента следует:

$$R_x = r + \frac{3rR_x}{3r + R_x},$$

откуда $R_x = 0.5\left(1+\sqrt{13}\right)r.$ Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_x^{\ 2} - rR_x - 3r^2 = 0$ отбрасываем как нефизический.

Аналогично, при добавлении к цепочке R_y ещё одного периодического фрагмента следует, что

$$R_y = r + \frac{2rR_y}{2r + R_y},$$

откуда $R_y = 2r.$ Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_y^{\ 2} - rR_y - 2r^2 = 0$ аналогично отбрасываем как нефизический.

Таким образом, сопротивления слева и справа от источника напряжения, соответственно, равны $rR_x/(r+R_x)$ и $rR_y/(r+R_y)$ и суммарное сопротивление всей цепи равно

$$R_\Sigma = R + \frac{rR_x}{r+R_x} + \frac{rR_y}{r+R_y} = R + \frac{1+\sqrt{13}}{3+\sqrt{13}}r + \frac{2}{3}r \quad \text{или} \quad R_\Sigma = R + \frac{5-\sqrt{13}}{2}r + \frac{2}{3}r.$$

По закону Ома ток в цепи через сопротивление R равен

$$I_R = \frac{U}{R_\Sigma} = U \Big/ \left[R + \frac{5-\sqrt{13}}{2}r + \frac{2}{3}r \right].$$

Критерии оценивания

Есть отдельные уравнения, относящиеся к сути задачи при отсутствии решения или при ошибочном решении.	2
Есть понимание задачи, но не получено одно из необходимых для решения уравнений и в результате решение не найдено.	2
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений левой части.	5
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений правой части.	5
Найдены сопротивления слева и справа от источника напряжения	3
Найдено суммарное сопротивление всей цепи.	3
Найден ток в цепи через сопротивление R.	2

Задача 10.2.5

При последовательном подключении двух одинаковых резисторов к источнику напряжения ток постепенно снижался начиная с 5 А до установившегося значения 4.2 А. Каков будет установившийся ток через каждый из резисторов при параллельном подключении к тому же источнику? Считать, что сопротивление линейно зависит от температуры. (20 баллов)

Решение.

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность резистора, U – напряжение на источнике, I_1 – ток в установившемся режиме для двух последовательных резисторов.

$$k\Delta T = UI_1/2$$

$$\Delta T = UI_1/2k$$

где k – теплопроводность поверхности резистора, ΔT - разность температуры резистора комнатной температуры, I_1 – ток в установившемся состоянии для двух последовательно соединенных резисторов. С другой стороны закон Ома сразу после включения и через продолжительное время имеет вид.

$$U = 2R_0 I_0$$

$$U = 2R_0(1 + \alpha\Delta T)I_1$$

$$\alpha = \frac{I_0 - I_1}{I_1 \Delta T} = \frac{2(I_0 - I_1)k}{{I_1}^2 U}$$

Запишем закон Ома для одного резистора в случае параллельного подключения

$$I_1' = \frac{U}{R_0(1+\alpha\Delta T')} = \frac{U}{R_0\left(1+\frac{2(I_0-I_1)kUI_1'}{kI_1{}^2U}\right)} = \frac{2I_0}{1+\frac{2(I_0-I_1)I_1'}{I_1{}^2}}$$

Решая получившееся квадратное уравнение, после подстановки I_1и I_0, получаем

$$I_1' = 6.35\text{А}$$

Критерии оценивания:

Верно записано равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность.	4
Найден коэффициент, определяющий температурную зависимость сопротивления.	4
Получено верное уравнение для тока.	8
Получено правильное значение тока.	4