Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап (разбор задач)
2020-2021 учебный год
10 класс

Задача 10.1 (14 б.) Вращательная кинематика.

Тело начинает вращаться из состояния покоя вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением γ до угловой скорости ω, а затем вращается с этой угловой скоростью. Через некоторое время тело начинает останавливаться с тем же постоянным угловым ускорением γ. В момент, когда его угловая скорость достигает нуля, движение прекращается. За все время движения тело совершило N полных оборотов. Сколько времени заняло вращение тела?

Возможное решение:

Время движения состоит из времени разгона t_1, равного ему времени торможения и времени равномерного вращения t_2.

$$2\pi N = 2\frac{\gamma t_1^2}{2} + \omega t_2$$

$$\omega = \gamma t_1\,;\, t_1 = \frac{\omega}{\gamma}$$

$$2\pi N - \frac{\omega^2}{\gamma} = \omega t_2$$

$$t_2 = \frac{2\pi N}{\omega} - \frac{\omega}{\gamma}$$

Общее время

$$2t_1 + t_2 = \frac{2\pi N}{\omega} + \frac{\omega}{\gamma}$$

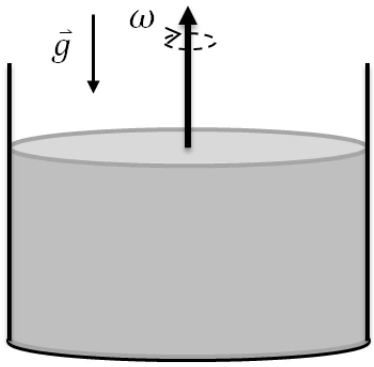
Ответ: $\frac{2\pi N}{\omega} + \frac{\omega}{\gamma}$

Критерии оценивания:

Записано уравнение кинематики	5
Связь между скоростью и ускорением	1
Найдено время равномерного вращения	4
Найдено общее время движения	4

Задача 10.2 (22 б.) Параболическое зеркало.

В высокий цилиндр, диаметр дна которого d, налита ртуть. Цилиндр раскручивают с угловой частотой ω вокруг оси проходящей через центр. В результате поверхность ртути в разрезе (плоскостью, содержащей ось) принимает форму параболы, вершина которой касается дна. Не останавливая цилиндр, вертикально сверху на него направляют лазерный луч. Луч дважды отражается от поверхности ртути на одной высоте и выходит вертикально вверх. Найдите, в какую точку (расстояние до оси и высоту над уровнем дна) нужно направить луч, чтобы наблюдать такое явление.



Возможное решение:

Перейдем в неинерциальную систему отсчета (НИСО), связанную с движущейся жидкостью. В такой системе отсчета возникает сила инерции $-m\bar{a}$, и ускорение свободного падения получает поправку

$$\bar{g}_{эфф} = \bar{g} - \bar{a}$$

В остальном такая система ничем не отличается от инерциальной, и поверхность жидкости будет перпендикулярна $\bar{g}_{эфф}$, стремясь занять положение с наименьшей (эффективной) потенциальной энергией. Пользуясь этим фактом легко найти угол наклона поверхности жидкости по отношению к горизонтали.

$$tg\alpha = \frac{\omega^2 x}{g} \qquad (1)$$

Здесь x — расстояние вдоль оси x от оси вращения до точки.

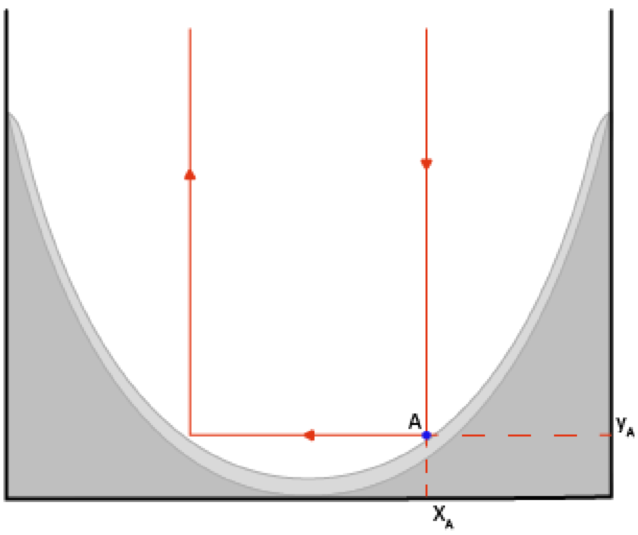
Предположим, что парабола, которая образуется в разрезе цилиндра поверхностью ртути, будет подчиняться уравнению вида $y = ax^2$. Производная дает значение тангенса угла наклона кривой в точке. Это значит, что в данной точке функция $y' = 2ax$ при данном x должна быть равна $tg\alpha$. Получаем:

$$2ax = \frac{\omega^2 x}{g}$$

$$a = \frac{\omega^2}{2g}$$

Таким образом, получится функция:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \qquad (2)$$



Заметим, что для реализации описанного хода луча, угол между падающим и отраженным лучом должен быть равен 90°, а, значит, угол между падающим лучом и нормалью должен быть равен 45°. Следовательно, угол между отражающей поверхностью и горизонталью также равен α= 45°. Из уравнения (1):

$$x_A = \frac{g}{\omega^2}$$

Используя уравнение параболы (2) находим, что луч должен быть направлен в точку

$$(\frac{g}{\omega^2}, \frac{g}{2\omega^2})$$

Критерии оценивания:

Найдено условие, определяющее локальную форму поверхности жидкости	5
Записано выражение для угла наклона поверхности жидкости	4
Найдено уравнение параболы	5
Определен угол падения для первого и второго отражения	2
Найдено расстояние от оси	3
Найдена высота над уровнем дна сосуда	3

Задача 10.3 (22 б.) Поворот цилиндра.

Цилиндр объемом V разделен на две части достаточно легкой теплоизолирующей перегородкой, которая может свободно двигаться. Масса перегородки M, а площадь S. В левой половине цилиндра содержится ν_1 идеального газа при температуре T_1, а в правой половине ν_2 при температуре T_2. Найдите смещение перегородки x, если цилиндр повернуть (поставить) в вертикальное положение, так, чтобы левая часть цилиндра оказалась внизу. Температура в частях цилиндра поддерживается постоянной. Считайте, что $x \ll V/S^*$.
Указание: Возможно, Вам будет полезна формула $(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x$ при $x \ll 1$.

*Это условие следует понимать как малость величины x по сравнению с аналогичными линейными размерами левой и правой части сосуда.
Изначально цилиндр лежал горизонтально на боковой поверхности.

Возможное решение:

В горизонтальном положении, поскольку перегородка находится в покое, что означает, что давление в левой и правой частях одинаково, выполняется равенство

$$\frac{\nu_1 T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 T_2}{V_2},$$

Так как $V_1 + V_2 = V$, получаем

$$V_1 = V \cdot \frac{\nu_1 T_1}{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}$$

$$V_2 = V \cdot \frac{\nu_2 T_2}{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}$$

где $V_1 -$ объем левой части сосуда, $V_2 -$ объем левой части сосуда.

В вертикальном положении давление на нижнюю часть будет больше на величину $\frac{Mg}{S}$.
Получаем еще одно равенство:

$$\frac{R\nu_1 T_1}{(V_1 - Sx)} - \frac{Mg}{S} = \frac{R\nu_2 T_2}{V_2 + Sx}$$

Обозначим $L_1 = \frac{V_1}{S}$ и $L_2 = \frac{V_2}{S}$, тогда

$$\frac{\nu_1 T_1}{L_1\left(1 - \frac{x}{L_1}\right)} = \frac{\nu_2 T_2}{L_2\left(1 + \frac{x}{L_2}\right)} + \frac{Mg}{R}$$

Так как $(1+\alpha)^\gamma \approx 1 + \gamma\alpha$, то

$$\frac{\nu_1 T_1\left(1+\frac{x}{L_1}\right)}{L_1}=\frac{\nu_2 T_2\left(1-\frac{x}{L_2}\right)}{L_2}+\frac{Mg}{R}$$

Очевидно, что $\frac{\nu_1 T_1}{L_1}=\frac{\nu_2 T_2}{L_2}$, тогда

$$x\left(\frac{\nu_1 T_1}{L_1^2}+\frac{\nu_2 T_2}{L_2^2}\right)=\frac{Mg}{R}$$

и в итоге получаем:

$$x=\frac{Mg}{R}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\nu_1 T_1}{L_1^2}+\frac{\nu_2 T_2}{L_2^2}\right)}=\frac{Mg}{R}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\nu_1 T_1 S^2}{V_1^2}+\frac{S^2\nu_2 T_2}{V_2^2}\right)}=\frac{MgV^2}{RS^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\nu_1 T_1}+\frac{1}{\nu_2 T_2}\right)\cdot(\nu_1 T_1+\nu_2 T_2)^2}$$

Критерии оценивания:

Записано условие баланса сил/давлений в горизонтальном положении	3
Найдены объемы правой и левой части сосуда в горизонтальном положении	4
Записано условие баланса сил/давлений в вертикальном положении	4
Корректно использована малость смещения поршня (не обязательно)	4
Найдено смещение поршня	7

Задача 10.4 (17 б) Глубокий аквариум.

Ученые изготовили прозрачную смесь и залили её в огромный аквариум. Оказалось, что показатель преломления смеси линейно увеличивается с глубиной. У поверхности он равен n, а далее увеличивается на величину γ с каждым метром. На дне аквариума поместили маленький лазер, луч которого направлен под углом α к вертикали. Найдите минимальную глубину h по которой пройдет этот луч, если вся глубина аквариума H.

Возможное решение:

Показатель преломления среды меняется с глубиной по закону:

$$n(x) = n + \gamma x$$

Луч, запущенный под углом α будет преломляться в каждом следующем слое, в результате чего на какой-то глубине произойдет полное внутреннее отражение. Это произойдет на глубине h, когда будет выполнено условие:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{n(h)}{n(H)} = \frac{n + \gamma h}{n + \gamma H}$$

Выражаем отсюда h

$$h = \frac{n(\sin\alpha - 1)}{\gamma} + H\sin\alpha$$

Найдем общий знаменатель и запишем:

$$h = \frac{(H\gamma + n)\sin\alpha - n}{\gamma}$$

Тогда можно видеть, что если $(H\gamma + n)\sin\alpha - n < 0,$ то $h = 0$, так как луч в этом случае выходит наружу.

Ответ:

$$h = \frac{n(\sin\alpha - 1)}{\gamma} + H\sin\alpha$$

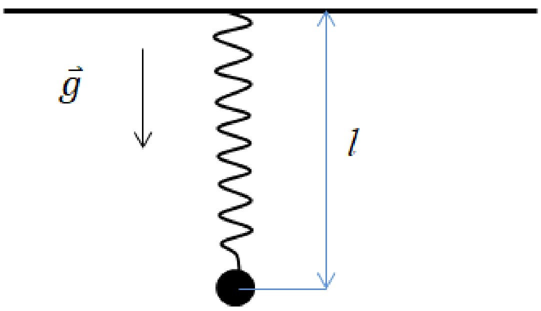
$$\text{и} \quad h = 0, \qquad \text{если } (H\gamma + n)\sin\alpha - n < 0$$

Критерии оценивания:

Записано условие полного внутреннего отражения	6
Найдено выражение для глубины	4
Исследована область применимости полученной формулы	3
Записан ответ для всех случаев	4

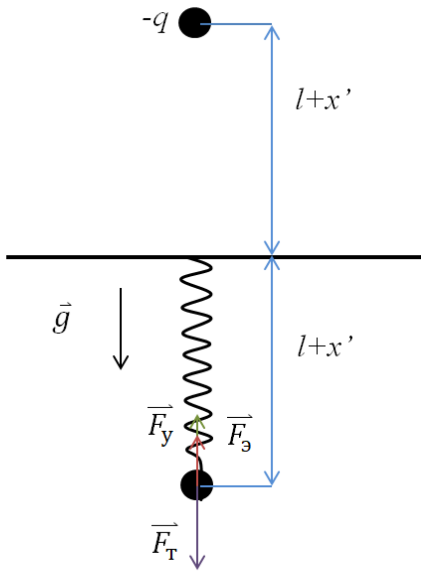
Задача 10.5 (25 б.) Притягательная пластина.

Маленький шарик с зарядом q и массой m подвешен на невесомой непроводящей пружине к бесконечной проводящей плоскости (заземленной) с очень высокой проводимостью. В равновесии пружина растянута и имеет длину l. Жесткость пружины τ. Найти период малых вертикальных колебаний вблизи точки равновесия, если таковые имеют место. Достаточно учесть электростатическое взаимодействие шарика только с проводящей плоскостью. Электромагнитным излучением и сопутствующими явлениями можно пренебречь.
Возможно, Вам будет полезна формула $(1+x)^\gamma \approx 1+\gamma x$ при $x \ll 1$.



Возможное решение:

Кроме силы тяжести и силы упругости, на шарик действует сила электростатического притяжения с изображением заряда шарика в металлической плоскости. Положение заряда-изображения находится стандартным образом из требования равенства нулю электрического потенциала на металлической плоскости.



Рассмотрим сначала стационарное состояние. Спроецируем силы на вертикальную ось

$$0 = -\tau(l - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4l^2} \qquad (1)$$

Предположим далее, что расстояние между плоскостью и шариком x. $|x-l| << l$. Второй закон Ньютона, спроецированный на вертикальную ось, имеет вид

$$m\ddot{x} = -\tau(x - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4x^2}$$

Введем новую переменную $x' = x - l << 1$.

$$m\ddot{x} = -\tau(x - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4x^2}$$

$$m\ddot{x}' = -\tau(x' + l - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4(l + x')^2}$$

$$m\ddot{x}' = -\tau(x' + l - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4(l + x')^2}$$

Воспользуемся малостью величины *x'*

$$m\ddot{x}' = -\tau(x' + l - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4l^2(1 + \frac{x'}{l})^2}$$

$$m\ddot{x}' \approx -\tau(x' + l - l_0) + mg - \frac{kq^2}{4l^2}\left(1 - \frac{2x'}{l}\right)$$

Учитывая (1) в первом порядке по *x'*

$$m\ddot{x}' = -\tau x' + \frac{kq^2 x'}{2l^3}$$

$$\ddot{x}' + x'\left(\frac{\tau}{m} - \frac{kq^2}{2ml^3}\right) = 0$$

Если выражение в скобках положительно, в системе наблюдаются малые колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{\tau}{m} - \frac{kq^2}{2ml^3}}$;

Период малых колебаний $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\tau}{m} - \frac{kq^2}{2ml^3}}}$

Критерии оценивания:

Записано условие равновесия (1)	3
Записан второй закон Ньютона	4
Второй закон Ньютона переписан через малое смещение из положения равновесия	5
Записан второй закон Ньютона в первом порядке малости по смещению из положения равновесия	6
Найдена циклическая частота и период колебаний	7