Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2020-21 учебный год

---

11 класс

1. Даны три целых числа. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего, а из третьего вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться соответственно *а*) 2, 3, 4? *б*) 3, 4, 5?

(25 *баллов.*)

2. Существует ли такая непостоянная функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, что при всех действительных x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$? *б*) $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$?

(25 *баллов.*)

3. Натуральное число n назовём *удачным*, если его можно единственным образом разбить в сумму 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все удачные числа.

(25 *баллов.*)

4. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. В каком отношении прямая XC делит хорду DE?

(25 *баллов.*)

11 класс

1. Даны три целых числа. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего, а из третьего вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться соответственно *а*) 2, 3, 4? *б*) 3, 4, 5?

(25 *баллов.*)

Ответ: *а*) *могут;* *б*) *не могут.*

а) Например, подходят числа 10, 8, 5. Тогда соответствующие разности равны $10-8=2$, $8-5=3$, $5-1=4$.

б) Пусть a, b, c — исходные числа. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. По признаку делимости на 9 числа n и $S(n)$ имеют равные остатки при делении на 9, и значит, разность $n-S(n)$ кратна 9. По условию, разности $a-S(b)$, $b-S(c)$, $c-S(a)$ равны числам 3, 4, 5 соответственно. Тогда их сумма

$$(a-S(b))+(b-S(c))+(c-S(a))=(a-S(a))+(b-S(b))+(c-S(c))$$

должна делиться на 9. С другой стороны, эта сумма равна $3+4+5=15$ и на 9 не делится, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. За правильное решение пункта *а*) — 10 баллов, пункта *б* — 15 баллов.

2. Существует ли такая непостоянная функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, что при всех действительных x выполняется равенство

а) $f(\sin x)+f(\cos x)=1$? *б*) $f(\sin x)-f(\cos x)=1$?

(25 *баллов.*)

Ответ: *а*) *существует;* *б*) *не существует.*

а) Например, подходит функция $f(t)=t^2$, так как $f(\sin x)+f(\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

б) Пусть такая функция существует. Тогда при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$ имеем равенства

$$\begin{matrix} f(\sin 0)=f(\cos 0)+1, \\ f\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)+1. \end{matrix} \quad\iff\quad \begin{matrix} f(0)=f(1)+1, \\ f(1)=f(0)+1. \end{matrix}$$

Отсюда $f(1)=(f(1)+1)+1$, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. За правильное решение пункта *а*) — 10 баллов, пункта *б* — 15 баллов.

3. Натуральное число n назовём *удачным*, если его можно единственным образом разбить в сумму 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все удачные числа.

(25 *баллов.*)

Ответ: 55 *и* 56.

Пусть число n — удачное, $n=a_1+a_2+\ldots+a_{10}$, где $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$ — натуральные слагаемые. Если предположить, что $a_1>1$, то n можно разбить в сумму различных натуральных слагаемых еще одним способом: $n=(a_1-1)+a_2+\ldots+(a_{10}+1)$. Таким образом, $a_1=1$.

Далее, если предположить, что $a_2 > 2$, то для n опять можно привести другое разбиение: $n = a_1 + (a_2 - 1) + a_3 + \ldots + (a_{10} + 1)$. Значит, $a_2 = 2$. Продолжая так далее, получаем $a_3 = 3$, $a_4 = 4, \ldots, a_9 = 9$. Если $a_{10} > 11$, то $a_9 + 1 < a_{10} - 1$, и снова можно сконструировать другое разбиение.

Наконец, нетрудно видеть, что при $a_{10} = 10$ или $a_{10} = 11$ получающиеся числа 55 и 56 являются удачными.

Критерии. За каждый правильный пример удачного числа — 5 баллов. Доказано, что других чисел нет — ещё 15 баллов.

4. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. В каком отношении прямая XC делит хорду DE?

(25 *баллов.*)

Ответ: $1 : 1$.

Первое решение. (Рис. 2.) Пусть O — центр окружности, M — точка пересечения CX и DE. Докажем, что $OM \perp DE$, и значит, $DM = ME$.

Прежде всего, угол DMC равен полусумме дуг CD и EX. Так как дуги между параллельными хордами BX и DE равны, то $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{EX}$, поэтому

$$\angle CMD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EX}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CB} = \frac{1}{2}\angle COB = \angle COA.$$

(Последнее следует, например, из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOC.) Из равенства углов COA и CMA следует, что точки A, C, M, O лежат на одной окружности. Поскольку радиус OC перпендикулярен касательной AC, диаметр этой окружности совпадает с отрезком AO. Значит, $\angle AMO = 90°$, то есть $OM \perp DE$.

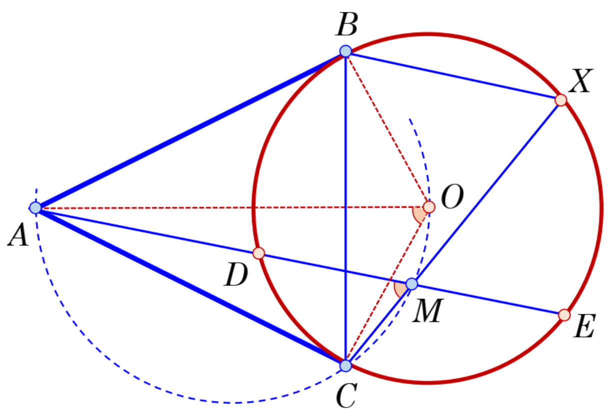

Рис. 2

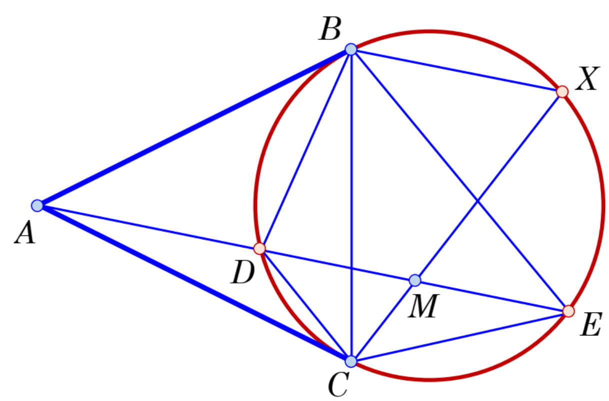

Рис. 3

Второе решение. (Рис. 3.) Отметим, что $\angle BCD = \angle ECX$, так как соответствующие дуги заключены между параллельными хордами. Кроме того, из равенства углов ABD и AEB следует подобие треугольников ABD и AEB, и значит, равенство $BD/BE = AD/AB$. Аналогично получаем, что $CD/CE = AD/AB$, то есть $BD \cdot CE = CD \cdot BE = \frac{1}{2}BC \cdot DE$ (последнее равенство следует из теоремы Птолемея.)

Пусть теперь CX пересекает DE в точке M. Тогда треугольники CBD и CME подобны, следовательно, $BD \cdot CE = CB \cdot EM$. Отсюда и из предыдущего равенства получаем, что $EM = ED/2$.

Критерии. Доказано, что точки A, C, M, O лежат на одной окружности — 15 баллов.