11 класс

1. Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если
а) $d = 25$; *б*) $d = 24,99$? (25 *баллов*)

2. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет равенству $f(x)f(y) = f(x-y)$. Известно, что $f(\frac{1}{2}) = 1$. Чему равно $f(2020)$? (25 *баллов*)

3. Неотрицательные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d = 4$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = ab + bc + cd$ и определите все четвёрки (a, b, c, d) чисел, для которых это максимальное значение достигается. (25 *баллов*)

4. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = AE$. Прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников ADC и BEC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Чему равно отношение $KC : LC$? (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по предмету «Математика»
Заключительный этап, 2019-2020 учебный год

11 класс

1. Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если
а) $d = 25$; *б*) $d = 24,99$? (25 *баллов*)

2. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет равенству $f(x)f(y) = f(x-y)$. Известно, что $f(\frac{1}{2}) = 1$. Чему равно $f(2020)$? (25 *баллов*)

3. Неотрицательные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d = 4$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = ab + bc + cd$ и определите все четвёрки (a, b, c, d) чисел, для которых это максимальное значение достигается. (25 *баллов*)

4. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = AE$. Прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников ADC и BEC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Чему равно отношение $KC : LC$? (25 *баллов*)

11 класс

1. Ответ: *а) можно; б) нельзя.*

а) Нужные куски всегда можно получить, например, так. Выберем из образовавшихся частей ту, которая не короче другой (и значит, не короче $12,5$ метров), вырезаем из неё 12-метровый кусок. У нас останется две части, сумма длин которых равна 13 *м*. По крайней мере одна из этих частей будет не короче $6,5$ *м*; вырезаем 6-метровый кусок и так далее. (Оставаться будут пары частей с суммами длин 7 *м*, 4 *м* и 2 *м*, а вырезаться куски длиной 3 *м*, 2 *м* и 1 *м* соответственно.)

б) Если провод длиной $l = 24,99$ метров разрезали, например, на части с длинами $0,995$ *м* и $23,995$ *м*, то получить требуемые куски нельзя. В самом деле, из куска $0,995$ *м* невозможно вырезать ни одного требуемого куска, а из куска $23,995$ *м* это сделать не получится, поскольку сумма длин $1+2+3+6+12 = 24$ больше $23,995$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное решение пункта *а*) — 20 баллов, пункта *б*) — 5 баллов.

2. Ответ: 1.

Подставив в равенство $x = 1$ и $y = \frac{1}{2}$, получим $f(1)\cdot f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, откуда $f(1) = 1$.

Теперь возьмём $y = 1$, тогда $f(x)\cdot f(1) = f(x-1)$, и значит, $f(x) = f(x-1)$. Полученное равенство означает, что f — периодическая функция с периодом 1. Поэтому $1 = f(1) = f(2) = \ldots = f(2020)$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что $f(1) = 1$ — 5 баллов. Доказана периодичность функции $f(x)$ — ещё 10 баллов.

3. Ответ: 4.

При $a = b = 2$, $c = d = 0$ имеем $S = 4$. Докажем, что это значение наибольшее. Оценим сумму S, добавив к ней неотрицательное число da:

$$S = ab + bc + cd \leqslant (ab + bc) + (cd + da) = (a + c)(b + d).$$

Учтём, что $b + d = 4 - (a + c)$, и обозначим $x = a + c$, тогда $S \leqslant x(4 - x) \leqslant 4$. Последнее неравенство легко доказывается, поскольку эквивалентно очевидному $0 \leqslant (x-2)^2$. Знак равенства достигается при $a + c = b + d = 2$ и $da = 0$, то есть $c = 2 - a$, $d = 2 - b$ и $ad = a(2 - b) = 0$. Следовательно, наибольшее значение $S = 4$ достигается только для четвёрок (a, b, c, d) вида $(0, t, 2, 2 - t)$, $(t, 2, 2 - t, 0)$, где $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Критерии. Только пример — 5 баллов. Оценка S — 15 баллов. Правильно указаны *все* четвёрки (a, b, c, d) — ещё 10 баллов. Доказана оценка, но указаны *не* все четвёрки — не более 23 баллов.

4. Ответ: $1 : 1$.

Пусть описанные окружности треугольников ADC и BEC пересекаются в точках C и P (рис. 1). Докажем, что $KC = LC$, и значит, искомое отношение равно 1.

Как известно, линия, соединяющая центры описанных окружностей ADC и BEC, перпендикулярна общей хорде CP этих окружностей, так что $CP \perp KL$.

Так как точки A, P, D, C принадлежат одной окружности, сумма углов CAP и CDP равна $180°$. Но сумма смежных углов CDP и BDP тоже равна $180°$, значит, $\angle EAP = \angle BDP$. Аналогично, $\angle AEP = \angle DBP$. Из этих двух равенств, а также из условия $AE = BD$ следует, что треугольники APE и DPB равны. Отсюда $PE = PB$. Из равенства этих хорд следует равенство соответствующих дуг, а значит, и равенство вписанных углов BCP и PCE.

Таким образом, треугольник LCK — равнобедренный, так как CP является биссектрисой и высотой; поэтому $KC = LC$.

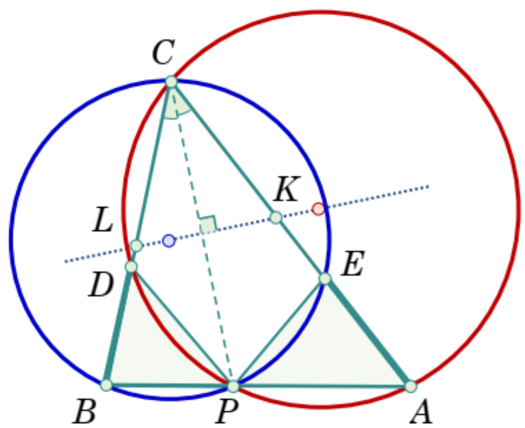

Рис. 1

Замечание. Тот факт, что CP — биссектриса можно доказать и по-другому. По теореме о секущей $AE \cdot AC = AP \cdot AB$ и $BD \cdot BC = BP \cdot BA$, отсюда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}\,.$$

то есть прямая CP делит сторону AB на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам треугольника. Значит, CP — биссектриса, что и требовалось.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что $CP \perp KL$ — 5 баллов. Доказано только, что CP является биссектрисой угла KCL, — 15 баллов.