Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Физика»
заключительный этап (ответы)
2018-2019 учебный год
11 класс

Задача 11.1.1

Груз массы m опускается с постоянной скоростью v на невесомом тросе с жёсткостью k, сматывающемся с барабана. Какова будет максимальная сила натяжения троса, если барабан внезапно остановится? Каково соотношение между максимальным растяжением троса и амплитудой свободных упругих колебаний этого груза на тросе? (20 б.)

Решение.

Согласно закону сохранения энергии

$$mv^2/2=k(x_{max})^2/2 - mgx_{max},$$

откуда $x_{max} = (mg/k)[1+(1+kv^2/mg^2)^{1/2}]$

и $F_{max} = kx_{max}$

При $v=0$, $F_{max} = 2mg$.

Уравнение движения для свободных вертикальных колебаний груза на тросе:

$$ma = -kx + mg \text{ или } a + kx/m = g.$$

решение которого $x(t) = \dfrac{mg}{k} + x_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$.

Если начало координат положить в точке $x(t=0)=0$, получим

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

следовательно, амплитуда свободных вертикальных колебаний груза на тросе равна $x_0=mg/k$ и $x_{max} = 2mg/k$ равно удвоенной амплитуде свободных упругих колебаний груза на тросе.

Критерии оценивания

Записан закон сохранения энергии, определяющий максимальное растяжение троса при внезапной остановке барабана.	7
Получено правильное аналитическое выражение для максимального растяжения троса с учетом скорости из закона сохранения энергии.	3
Найдена максимальная сила натяжения троса.	2

Показано, что максимальное растяжение троса равно удвоенной амплитуде свободных упругих колебаний груза на тросе.	8

Задача 11.1.2

При исследовании теплоемкости смеси двух газов 1 и 2 было получено, что молярная теплоемкость при постоянном давлении при комнатной температуре оказалась равной 24.94 Дж/(моль·К), а при температуре 5000°С равно 20.79 Дж/(моль·К). Удельная теплоемкость при постоянном объеме той же газовой смеси при комнатной температуре равна 0.924 Дж/(г·К),а при температуре 5000°С равно 1.039Дж/(г·К). Найдите молярные массы газов при комнатной температуре и массовые доли газов в смеси, если удельная теплоемкость газа 1 при постоянном давлении практически не меняется в исследуемом диапазоне температур и равна 5.2 Дж/(г·К). Универсальная газовая постоянная R = 8.315 Дж/(моль·К) (25 баллов)

Решение.

Теплоемкость идеального газа при постоянном давлении определяется формулой:

$$C_p = \left(\frac{i}{2} + 1\right) R$$

где i – число степеней свободы на 1 молекулу. Для одноатомного газа $i = 3$, для 2х атомного $i = 5$, для 3х и более атомных, но не слишком больших молекул $i = 6$. Разделив известные нам молярные теплоемкости на универсальную газовую постоянную получаем с хорошей точностью $C_{p(5000)}$= (5/2)R, $C_{p(20)}$= (6/2)R. Анализируя первое значение, мы приходим к выводу, что при 5000°С газы смести могут быть только одноатомными.

Из условия «удельная теплоемкость газа 1 при постоянном давлении практически не меняется в исследуемом диапазоне температур и равна 5.2 Дж/(г К)» следует, что газ 1 остается одноатомным при всех температурах, а значит мы знаем его молярную теплоемкость C_p= (5/2)R. Воспользовавшись связью молярной и удельной теплоемкости, мы можем сразу же найти молярную массу газа 1:

$$C_{p(\text{уд})} = C_p / M$$

$$M_1 = \frac{2.5R}{5.2\text{Дж}/(\text{г К})} = 4\text{г}/\text{моль}$$

Для того чтобы установить характеристики газа 2 можно рассмотреть два случая. I. Газ 2 двухатомный и испытывает термическую диссоциацию. Тогда при комнатной температуре молярная теплоемкость имеет вид:

$$C_{p(20)} = \left(\frac{5R\nu_1}{2} + \frac{7R\nu_2}{2}\right) / (\nu_1 + \nu_2) = (6/2)\text{R}$$

$$\nu_1 = \nu_2$$

По определению удельная теплоемкость может быть записана как отношение теплоемкости некоторой порции газовой смеси к ее массе.

$$C_v = iR/2;$$

$$C_{v(\text{уд},20)} = \frac{(3\nu_1+5\nu_2)R}{2(M_1\nu_1+M_2\nu_2)}$$

Принимая во внимание, что масса газа не меняется при нагревании:

$$C_{v(\text{уд},5000)} = \frac{(3\nu_1+2\cdot 3\nu_2)R}{2(M_1\nu_1+M_2\nu_2)}$$

Разделив теплоемкости друг на друга и подставив $\nu_1 = \nu_2$ получаем, что должно выполняться соотношение:

$$\frac{C_{v(\text{уд},5000)}}{C_{v(\text{уд},20)}} = \frac{9}{8}$$

Действительно, подставляя известные по условию задачи теплоемкости:

$$\frac{1.039\text{Дж}/(\text{г К})}{0.924\ \text{Дж}/(\text{г К})} = \frac{9}{8}$$

Таким образом двухатомный газ 2 соответствует наблюдаемым параметрам системы и теперь нетрудно вычислить его молярную массу и массовые доли:

$$M_2 = \frac{4R}{C_{v(\text{уд},20)}} - M_1 = 32\text{г/моль}$$

$$\eta_1 = \frac{M_1}{M_1+M_2} = \frac{1}{9};\ \eta_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2} = \frac{8}{9}$$

II После успешного рассмотрения случая двухатомного газа задачу можно считать решенной, но мы все же рассмотрим случай *n* атомного газа чтобы убедится, что у задачи нет альтернативного ответа.

$$C_{p(20)} = \left(\frac{5R\nu_1}{2} + \frac{8R\nu_2}{2}\right)/(\nu_1+\nu_2) = (6/2)\text{R}$$

$$\nu_1 = 2\nu_2$$

$$C_{v(\text{уд},20)} = \frac{(3\nu_1+6\nu_2)R}{2(M_1\nu_1+M_2\nu_2)}$$

$$C_{v(\text{уд},5000)} = \frac{(3\nu_1+n\cdot 3\nu_2)R}{2(M_1\nu_1+M_2\nu_2)}$$

$$\frac{3\cdot 2+n\cdot 3}{3\cdot 2+6} = \frac{9}{8}$$

$$n = 2.5$$

Такой результат противоречит начальному предположению, что n целое. Двухатомный газ является единственным вариантом для газа 2.

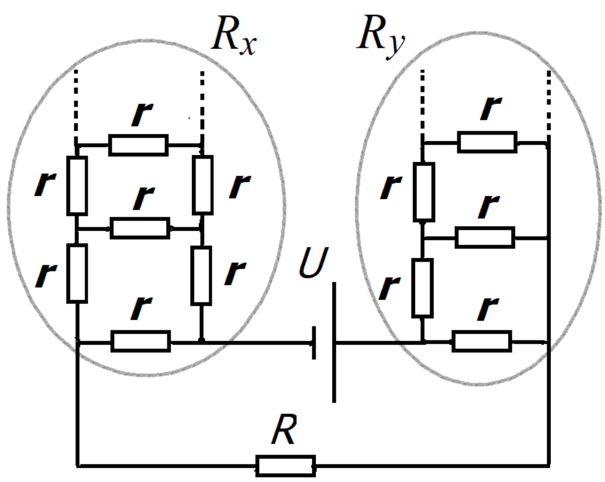
Критерии оценивания:

Приведены и обоснованы значения молярных и удельных теплоемкостей ид. газов C_p и C_v	3
Сделаны вывод о количестве атомов на молекулу у смеси газов при высокой температуре.	3
Сделан вывод о температурной диссоциации газа 2.	5
Вычислено соотношение между количеством газа 1 и газа 2.	5
Проведен анализ для 2 х атомного газа. Поведен анализ для 3х и более атомного газа (не обязательно).	4
Вычислены молярные массы и соотношения масс.	5

Задача 11.1.3

В представленной на рисунке электрической схеме с двумя различающимися бесконечными цепочками сопротивлений найти силу тока через сопротивление *R*. (25 баллов)

Решение.



Найдем сначала сопротивления бесконечных цепочек сопротивлений. Бесконечность такого рода цепочек сопротивлений означает, что добавление к каждой из них ещё одного соответствующего периодического фрагмента не меняет их сопротивлений R_x или R_y (см. рисунок). При добавлении к цепочке R_x ещё одного периодического фрагмента следует: $\dfrac{1}{R_x} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{2r + R_x}$,

откуда $R_x = \left(\sqrt{3} - 1\right) r$. Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_x{}^2 + 2rR_x - 2r^2 = 0$ отбрасываем как нефизический.

Аналогично, при добавлении к цепочке R_y ещё одного периодического фрагмента следует, что

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + R_y},$$

откуда $R_y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)r.$ Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_y{}^2+rR_y-r^2=0$ аналогично отбрасываем как нефизический.

Таким образом, сопротивления слева и справа от источника напряжения, соответственно, равны R_x и R_y, и суммарное сопротивление всей цепи равно

$$R_\Sigma=R+R_x+R_y=R+\left(\sqrt{3}-1\right)r+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)r\,.$$

По закону Ома ток в цепи через сопротивление *R* равен

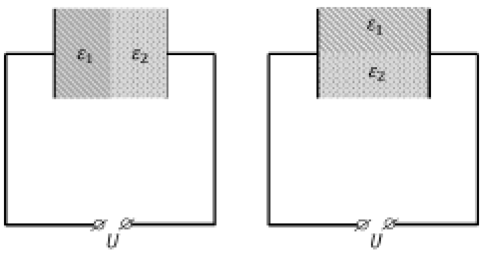
$$I_R=\frac{U}{R_\Sigma}=U\,/\left[R+\left(\sqrt{3}-1\right)r+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)r\right].$$

Критерии оценивания

Есть отдельные уравнения, относящиеся к сути задачи при отсутствии решения или при ошибочном решении.	2
Есть понимание задачи, но не получено одно из необходимых для решения уравнений и в результате решение не найдено.	3
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений левой части.	8
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений правой части.	7
Найдено суммарное сопротивление всей цепи.	3
Найден ток в цепи через сопротивление *R*.	2

Задача 11.1.4

Два одинаковых плоских конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения *U* (см. рис.). Пространство между обкладками конденсаторов заполнено одинаковыми слоями диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2.



В одном конденсаторе слои расположены параллельно обкладкам, во втором перпендикулярно. Во сколько раз отличаются емкости этих конденсаторов и напряженности полей в однородных диэлектриках? (15б баллов)

Решение.

Если слои диэлектрика расположены параллельно обкладкам, то такую систему можно считать двумя последовательно соединенными конденсаторами, емкость которой можно найти по формуле $C_{пс}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$, где $C_1=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}$ и $C_2=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}$ (d – расстояние межу обкладками). Таким образом, емкость системы $C_{пс}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d}$.

Аналогично, если слои диэлектрика расположены перпендикулярно обкладкам, то такую систему можно считать двумя параллельно соединенными конденсаторами, емкость которых можно найти по формуле $C_{пр}=C_1'+C_2'$, где $C_1'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}$ и $C_2'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}$. Таким образом, емкость системы $C_{пр}=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)S}{2d}$.

Чтобы установить, во сколько раз отличаются напряженности полей в слоях диэлектриков, нужно сначала найти значения E_1, E_2, E_1', E_2' в каждом слое для одного и другого случая.

При последовательном соединении конденсаторов емкостями C_1 и C_2 подаваемое на них напряжение U равно сумме напряжений на первом и втором слоях диэлектриков: $U=U_1+U_2$.

Поскольку поля в диэлектриках однородные, то $U_1=E_1\frac{d}{2}$; $U_2=E_2\frac{d}{2}$, и, следовательно, $U=(E_1+E_2)\frac{d}{2}$ (*). При наложении на диэлектрики внешнего поля напряженностью E_0 напряженность в каждой среде уменьшится соответственно в ε_1 и ε_2 раз, т.е. $E_1=E_0/\varepsilon_1$ и $E_2=E_0/\varepsilon_2$, откуда $\varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2$ (**). Из уравнений (*) и (**) находим $E_1=\frac{2\varepsilon_2 U}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d}$ и $E_2=\frac{2\varepsilon_1 U}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d}$.

Если слои диэлектриков перпендикулярны пластинкам, то напряжение на каждом из образовавшихся конденсаторов емкостями C_1' и C_2' одинаково и равно U, поэтому $E_1'=U/d; E_2'=U/d$.

Напряженности полей в первой и второй среде при указанном расположении слоев диэлектриков относятся друг к другу как $\frac{E_1}{E_1'}=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ и $\frac{E_2}{E_2'}=\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

Критерии оценивания

Найдена емкость первой системы конденсаторов.	4
Найдена емкость второй системы конденсаторов.	4
Найдено отношение напряженностей в первой среде.	4
Найдено отношение напряженностей во второй среде.	3

Задача 11.1.5

Рассчитать абсолютную и относительную потерю массы Солнцем за ожидаемое время его жизни, около T_Θ = 10 млрд. лет. Солнечная постоянная, т.е. суммарная мощность солнечного излучения, проходящего через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку на расстоянии одной астрономической единицы (1 а.е. = 149.6 млн. км) от Солнца, по данным внеатмосферных измерений, равна в среднем λ_Θ =1367 Вт/м². Масса Солнца $M_\Theta = 1.99\cdot10^{30}$ кг. Считать, что мощность солнечного излучения за рассматриваемый промежуток времени не изменится. (15 баллов)

Решение.

За время

$$T_\Theta = 10 \text{ млрд. лет} = 3600\cdot24\cdot365\cdot10^{10}\text{ с} = 3.1536\cdot10^{17}\text{ с}$$

суммарная энергия солнечного излучения через сферу радиусом 1 а.е.:

$$\Delta W = 4\pi\,(1\text{ а.е.})^2\,\lambda_\Theta\,T_\Theta = 4\pi\,(149.6\text{ млн. км})^2\,(1367\text{ Вт/м}^2)\cdot3.1536\cdot10^{17}\text{ с} \approx 1.21\cdot10^{44}\text{ Дж}.$$

Потеря массы Солнцем, используя связь массы и энергии,

$$\Delta M = \Delta W/c^2 = 1.347\cdot10^{27}\text{ кг},$$

и относительная потеря массы Солнцем

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta W}{Mc^2} = \frac{1.21\cdot10^{44}}{1.99\cdot10^{30}\cdot9\cdot10^{16}} \approx 0.677\cdot10^{-3} \approx \frac{1}{1480}\ .$$

Критерии оценивания

Есть отдельные уравнения (площадь сферы данного радиуса, формула связи массы и энергии) относящиеся к сути задачи при отсутствии решения или при ошибочном решении.	2
Есть понимание задачи, но не получено одно из необходимых для решения уравнений и в результате решение не найдено.	3
Найдена суммарная энергия солнечного излучения через сферу радиусом 1 а.е.	4
Найдена абсолютная потеря массы Солнцем, используя связь массы и энергии.	4
Найдена относительная потеря массы Солнцем.	2

Задача 11.2.1

Снаряд разлетелся в середине большой комнаты на 3 осколка с одинаковыми массами и скоростями. Один осколок продолжил движение в том же направлении, два других разлетелись в вертикальной плоскости под углом 60 градусов друг к другу. Осколок летевший прямо ударился в стену через время t_1, а время между приземлением двух других осколков равно τ. Когда один из осколков коснулся потолка, скорость его была направлена горизонтально. Все удары упругие. Найти длину и высоту комнаты. (20 баллов)

Решение.

Снаряд, полетевший вперед ударится в стену, и тем самым за время t_1 преодолеет половину длины комнаты. Снаряд полетевший вверх должен коснуться потолка, это значит это будет верхняя точка его траектории, как тела, брошенного под углом к горизонту.

Запишем длину комнаты как L, а высоту комнаты как H, тогда:

$$\frac{L}{2} = v_0 t_1$$

$$\frac{H}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Угол, под которым разлетаются осколки – 60^0. Так как снаряд до разрыва летел горизонтально, то суммарный импульс по вертикали у осколков должен равняться нулю. Тогда угол относительно горизонта у осколков имеющих вертикальную компоненту скорости будет равен 30^0.

Время движения тела, брошенного под углом к горизонту – это и есть время отставания осколка, полетевшего вверх, от осколка, отлетевшего вниз.

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \rightarrow v_0 = \frac{g\tau}{2 \sin \alpha}$$

Полученное значение v_0 подставляем в уравнения для высоты и длины комнаты.

Имея ввиду, что $\sin \alpha = \sin 30^0$, получаем

$$L = \frac{g\tau t_1}{\sin \alpha} = 2g\tau t_1$$

$$H = \frac{g\tau^2}{4}$$

Критерии оценивания

Получены выражения для длины и высоты комнаты через скорости осколков.	4
Правильно определены углы между скоростями осколков и горизонталью в момент разлета.	3
Верно определено время отставания τ осколков друг от друга.	6
Получено правильное конечное значение для дальности и высоты комнаты.	7

Задача 11.2.2

Баллон объемом *V* накачали молекулярным азотом (*M* = 28 г/моль). Затем его помещают в вакуум и делают очень маленькое отверстие (поток газа не возникает, молекулы вылетают по одной). Найдите среднюю силу которая требуется для удержания баллона на месте. Считать, что за время Δt от начала наблюдения из баллона вытекает доля газа η<<1 и температура поддерживается равной *T*. (25 баллов)

Решение.

Модуль силы F требующейся для удержания баллона будет равна по модулю реактивной силе, которая согласно закону изменения импульса будет равна:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\eta m V_x}{\Delta t}$$

Здесь V_x – скорость истечения газа, вдоль одного направления. Так как иные направления скорости не будут давать вклада в силу, мы их исключим.

Формула скорости для одного направления истечения может быть выражена через среднеквадратичную:

$$V_x^2 = \frac{1}{3} v_{\text{ср}}^2 = \frac{kT}{m_0} = \frac{kTN_{\text{а}}}{M} = \frac{RT}{M}$$

Таким образом, сила будет равна:

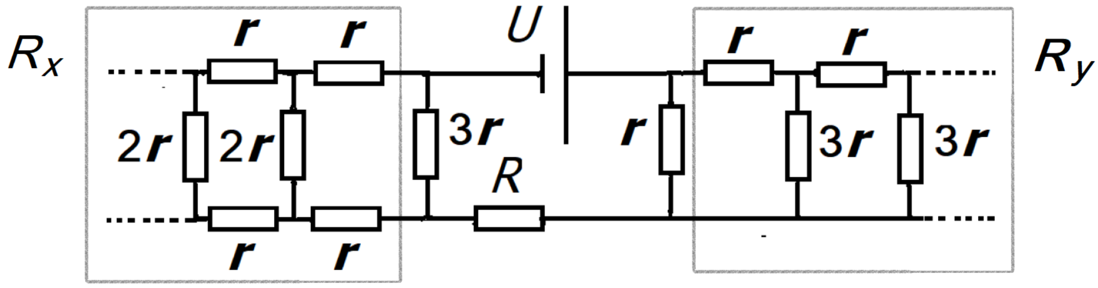
$$F = \frac{\eta m V_x}{\Delta t} = \frac{\eta m}{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{RT}{M}} = \eta \frac{PVM}{\Delta t RT} \cdot \sqrt{\frac{RT}{M}} = \frac{\eta PV}{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{M}{RT}}$$

Критерии оценивания

Записано выражение для силы.	6
Использована связь кинетической энергии и температуры.	5
Выражение для скорости определено с учетом одного только одного направления.	6
Представлено конечное выражение силы через известные параметры.	8

Задача 11.2.3

Найти силу тока через сопротивление R в представленной на рисунке 1 электрической схеме с двумя различающимися бесконечными цепочками сопротивлений. (25 баллов)



Решение.

Найдем сначала сопротивления бесконечных цепочек сопротивлений. Бесконечность такого рода цепочек сопротивлений означает, что добавление к каждой из них ещё одного соответствующего периодического фрагмента не меняет их сопротивлений R_x или R_y (см. рисунок). При добавлении к цепочке R_x ещё одного периодического фрагмента следует:

$$R_x = 2r + \frac{2rR_x}{2r + R_x},$$

откуда $R_x = \left(1+\sqrt{5}\right)r$. Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_x{}^2 - 2rR_x - 4r^2 = 0$ отбрасываем как нефизический.

Аналогично, при добавлении к цепочке R_y ещё одного периодического фрагмента следует, что

$$R_y = r + \frac{3rR_y}{3r + R_y},$$

откуда $R_y = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{13}\right)r$. Второй, отрицательный, корень квадратного уравнения $R_y{}^2 - rR_y - 3r^2 = 0$ аналогично отбрасываем как нефизический.

Таким образом, сопротивления слева и справа от источника напряжения, соответственно, равны $3rR_x/(3r + R_x)$ и $rR_y/(r + R_y)$ и суммарное сопротивление всей цепи равно

$$R_\Sigma = R + \frac{3rR_x}{3r + R_x} + \frac{rR_y}{r + R_y} = R + \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{4+\sqrt{5}}r + \frac{1+\sqrt{13}}{3+\sqrt{13}}r \quad \text{или} \quad R_\Sigma = R + \frac{3\left(3\sqrt{5}-1\right)}{11}r + \frac{5-\sqrt{13}}{2}r.$$

По закону Ома ток в цепи через сопротивление R равен

$$I_R = \frac{U}{R_\Sigma} = U / \left[R + \frac{3\left(3\sqrt{5}-1\right)}{11} r + \frac{5-\sqrt{13}}{2} r \right].$$

Критерии оценивания

Есть отдельные уравнения, относящиеся к сути задачи при отсутствии решения или при ошибочном решении.	2
Есть понимание задачи, но не получено одно из необходимых для решения уравнений и в результате решение не найдено.	3
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений левой части.	6
Найдено сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений правой части.	6
Найдены сопротивления слева и справа от источника напряжения.	3
Найдено суммарное сопротивление всей цепи.	3
Найден ток в цепи через сопротивление *R*.	2

Задача 11.2.4

При последовательном подключении двух одинаковых резисторов к источнику напряжения ток постепенно снижался начиная с 5 А до установившегося значения 4.5 А. Температура резисторов при этом изменилась с 20°С до 170°С. До какой температуры нагреются резисторы при параллельном подключении и каков будет установившийся ток через каждый из резисторов? Считать, что сопротивление линейно зависит от температуры. (15 баллов)

Решение.

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность резистора, U – напряжение на источнике, I_1 – ток в установившемся режиме для двух последовательных резисторов.

$$k\Delta T = UI_1/2$$

$$\Delta T = UI_1/2k$$

где k – теплопроводность поверхности резистора, ΔT - разность температуры резистора комнатной температуры, I_1 – ток в установившемся состоянии для двух последовательно соединенных резисторов. С другой стороны закон Ома сразу после включения и через продолжительное время имеет вид:

$$U = 2R_0 I_0$$

$$U = 2R_0(1 + \alpha\Delta T)I_1$$

$$\alpha = \frac{I_0 - I_1}{I_1 \Delta T} = \frac{2(I_0 - I_1)k}{{I_1}^2 U}$$

Запишем закон Ома для одного резистора в случае параллельного подключения

$$I_1' = \frac{U}{R_0(1 + \alpha \Delta T')} = \frac{U}{R_0\left(1 + \frac{2(I_0 - I_1)kU{I_1}'}{k{I_1}^2 U}\right)} = \frac{2I_0}{1 + \frac{2(I_0 - I_1){I_1}'}{{I_1}^2}}$$

Решая получившееся квадратное уравнение, после подстановки I_1и I_0, получаем

$$I_1' = 7.34\text{А}$$

Принимая во внимание соотношение $k = UI_1/(2\Delta T)$ находим новую температуру резистора

$$\Delta T' = U\frac{I_1'}{k} = \frac{2I_1'\Delta T}{I_1} = 486^o C$$

$$T' = 486^o C + 20^o C = 509^o C$$

Критерии оценивания:

Верно записано равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность.	3
Найден коэффициент, определяющий температурную зависимость сопротивления.	3
Получено верное уравнение для тока или температуры.	5
Получено правильное значение тока и температуры.	4

Задача 11.2.5

Звездолет может развивать скорость вплоть до скорости света в вакууме, с $=3\cdot 10^8$ м/с. Астронавты обратили внимание на то, что вид звёздного неба зависит от скорости звездолёта. В самом деле, в соответствии со специальной теорией относительности справедлив закон преобразования углов

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha}$$

где α и α' углы между направлениями скорости звездолёта v и светового потока в системах отсчёта, связанных с неподвижным наблюдателем (α) и звездолётом (α'). Что увидят астронавты при $v \to c$? Под какими углами α в неподвижной системе отсчёта будут достигать звездолёта лучи, которые астронавты будут видеть как лучи, перпендикулярные направлению полёта звездолёта при скоростях $v = 0.5c$ и $v = 0.5c\sqrt{3} \approx 0.866c$? (15 баллов)

Решение.

При $v \to c$ из формулы следует, что $\cos\alpha'$=-1 вне зависимости от угла α, т.е. все изображение (звёздное небо) сожмётся в одну яркую точку перед звездолётом. Лучи, которые астронавты будут видеть, как перпендикулярные направлению полёта звездолёта означают, что α'=0, т.е. $\cos\alpha - \frac{v}{c} = 0$. Из этого следует, что лучи, которые астронавты будут видеть как лучи, перпендикулярные направлению полёта звездолёта при скоростях $v = 0.5c$ и $v = 0.5c\sqrt{3} \approx 0.866c$ будут достигать звездолёта в неподвижной системе отсчёта под углами $\alpha = \arccos(0.5) = 60^\circ$ и $\alpha = \arccos(0.5\sqrt{3}) = 30^\circ$ соответственно.

Критерии оценивания

Показано, что все изображение (звёздное небо) сожмётся в одну яркую точку перед звездолётом.	7
Показано, что лучи, которые астронавты будут видеть как лучи, перпендикулярные направлению полёта звездолёта при скорости $v = 0.5c$ будут достигать звездолёта в неподвижной системе отсчёта под углом 60°.	4
Показано, что лучи, которые астронавты будут видеть как лучи, перпендикулярные направлению полёта звездолёта при скорости $v = 0.5c\sqrt{3} \approx 0.866c$ будут достигать звездолёта в неподвижной системе отсчёта под углом 30°.	4