Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап (разбор задач)
2020-2021 учебный год
11 класс

Задача 11.1 (20 б.) Замерзание водоема.

Водоем покрыт льдом толщиной d_0 = 7.5 см. Сколько времени займет увеличение толщины льда до d_1 = 15 см? Температура воздуха постоянна и равна -15 ^oC, температура воды 0^0C, теплообменом с дном водоема пренебречь.

Принять во внимание, что полная мощность теплопередачи может быть вычислена по формуле $P = \frac{\chi S \Delta T}{d}$, где χ – коэффициент теплопроводности материала. В данном случае речь идёт о стационарном потоке тепла от одной грани параллелепипеда площадью S к другой, расстояние между гранями равно d, разность температур ΔT. Плотность льда $\rho =$900 кг/м^3, теплота плавления $\lambda =$330 кДж/кг, коэффициент теплопроводности льда χ = 2.1 Вт/(К·м).

Возможное решение

Мощность тепловых потерь водоема через поверхность водоема обеспечивается энергией, выделяющейся при замерзании воды на нижней поверхности льда

$$P = \frac{\chi S \Delta T}{d} = \frac{\lambda \Delta m}{\Delta t}$$

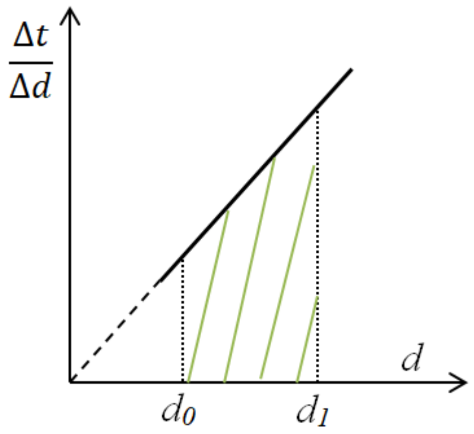
$$\frac{\lambda \Delta m}{\Delta t} = \frac{\lambda \rho S \Delta d}{\Delta t}$$

$$\frac{\chi S \Delta T}{d} = \frac{\lambda \rho S \Delta d}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\lambda \rho d \Delta d}{\chi \Delta T}$$

Таким образом, мы установили, сколько потребуется времени для нарастания малого слоя льда толщиной Δd. Построим график $\frac{\Delta t}{\Delta d}$ как функцию d.

$$\frac{\Delta t}{\Delta d} = \frac{\lambda \rho d}{\chi \Delta T}$$



Площадь, отмеченная на графике, будет численно равна искомому времени:

$$t = \sum \Delta t = \sum \frac{\Delta t}{\Delta d} \Delta d = \frac{\lambda \rho (d_1 + d_0)}{2\chi \Delta T}(d_1 - d_0) = \frac{\lambda \rho (d_1^2 - d_0^2)}{2\chi \Delta T}$$

$$t = 22{,}1 \text{ ч.}$$

Критерии оценивания:

Записана мощность, выделяемая при замерзании малого объема льда	3
Записан тепловой баланс при замерзании малой порции льда	3
Выражение для замерзания малого объема льда	5
Найдено время замерзания в аналитическом виде	7
Численное значение времени замерзания	2

Задача 11.2 (15 б.) Тепловой баланс.

Вдалеке от Солнца по круговой орбите летает астероид, который нагревается излучением, доходящим к нему от Солнца. Сам астероид быстро вращается вокруг своей оси и имеет достаточно высокую теплопроводность, по этой причине можно считать, что он равномерно прогревается до температуры T. Найдите эту температуру, если известно, что астероид находится на расстоянии трех астрономических единиц от Солнца. Для простоты считайте астероид абсолютно черным телом. Излучение единицы площади поверхности абсолютно черного тела в космосе определяется законом Стефана-Больцмана

$$N = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 K^4}$$

Солнечную постоянную считать равной $1367\,\text{Вт/м}^2$. Солнечная постоянная – это суммарная мощность солнечного излучения, проходящего через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно потоку, на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца вне земной атмосферы.

Возможное решение:

Энергия излучения астероида должна равняться той энергии, которая достигает поверхности астероида. Энергия излучения Солнца распределяется по сфере площадью $4\pi R^2$. Это означает, что энергия, падающая на квадратный метр поверхности планеты и астероида, будет меняться обратно пропорционально квадрату расстояния до планеты или астероида.

Расстояние от Солнца до Земли $a = 1\,\text{а.е.}$, тогда расстояние до астероида будет $3a$ и соответствующая мощность излучения на квадратный метр, достигающая поверхность астероида получается

$$N = \frac{N_з}{3^2}$$

Постоянство температуры указывают на форму астероида, близкую к сферической. Действительно, в противном случае, в силу закона сохранения момента импульса, поглощающая поверхность астероида менялось бы в течении периода обращения вокруг Солнца (За исключением частного случая совпадения оси вращения с нормалью к плоскостью орбиты. Если это указано, решение рассматривается вне критериев). Соответственно полная энергия, поглощаемая астероидом в секунду, будет

$$Q = \frac{N_з}{9} \cdot \pi r^2,$$

где $r -$ радиус астероида.

Из условия равновесия эта мощность должна быть равна мощности излучения самого астероида, которую можно посчитать по закону Стефана-Больцмана. Однако излучает астероид уже со всей своей площади и получается, что энергия, излучаемая им за единицу времени будет:

$$Q = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$$

В итоге получаем температуру

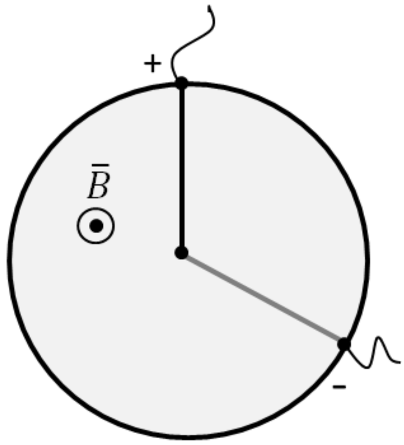
$$T = \sqrt[4]{\frac{N_3}{36\sigma}} = 160{,}8\ \text{К}$$

Критерии оценивания:

Найдена мощность солнечного излучения на орбите астероида	4
Найдена энергия, поглощаемая астероидом	4
Выражение для энергии, излучаемой астероидом	4
Найдена температура астероида	3

Задача 11.3 (20 б.) Циферблат в магнитном поле.

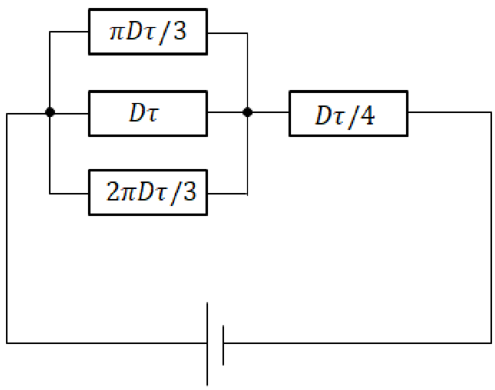
Исследуемая система представляет собой циферблат от настенных часов (без часового механизма) с металлическими стрелками. Циферблат окаймлен проводящим недеформируемым ободом. Стрелки находятся в электрическом контакте с ободом и друг с другом (на оси). Стрелки могут свободно вращаться без сухого трения. Диаметр обода D, сопротивление стрелок и обода на единицу длины τ. Стрелки имеют одинаковую массу и длину. Циферблат расположен горизонтально и помещен в достаточно сильное постоянное однородное магнитное поле B, направленное перпендикулярно плоскости циферблата. В начальный момент времени часы "показывают" ровно 4 часа (см. Рис.) и находятся в состоянии покоя.



К точкам обода "12" и "4" подключают батарейку с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением $r = D\tau/4$. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь. Найдите силу, действующую на стрелки в момент подключения батарейки. Найти положение стрелок, когда они окончательно остановятся. Изобразите качественный (без масштаба осей) характер зависимости тока через "минутную" стрелку от времени. За положительное направление тока примите ток от обода к центру. Магнитным взаимодействием между стрелками можно пренебречь.

Возможное решение:

Ответим сначала на первый вопрос задачи. Модуль силы Ампера, действующей на стрелку равен $BI_cD/2$, где I_c – ток, текущий через каждую из стрелок. Ток несложно найти из закона Ома для полной цепи. Найдем суммарный ток меду клеммами "12" и "4" (см. эквивалентную схему)



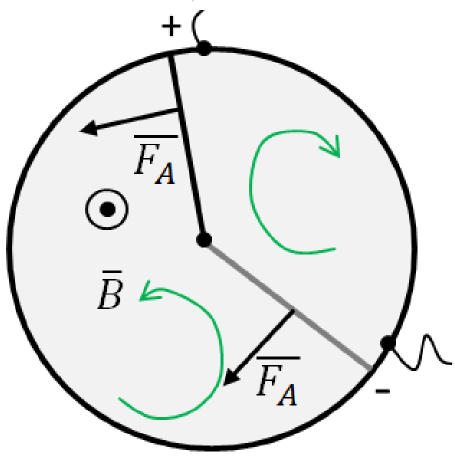
$$I = \frac{\xi}{\frac{D\tau}{4} + R_{\text{общ}}}$$

$$R_{\text{общ}} = \left(\frac{3}{\pi D\tau} + \frac{3}{2\pi D\tau} + \frac{1}{D\tau}\right)^{-1} = \frac{2\pi D\tau}{9+2\pi}$$

$$I = \frac{4\xi(9+2\pi)}{D\tau(10\pi+9)}$$

Напряжение - разность потенциалов между клеммами на циферблате

$$U = IR_{\text{общ}} = \frac{8\pi\xi}{(10\pi + 9)}$$



Ток через стрелки

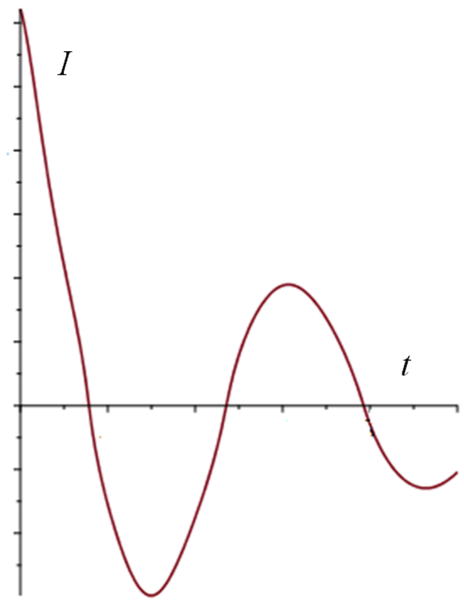
$$I_c = \frac{U}{D\tau} = \frac{8\pi\xi}{D\tau(10\pi + 9)}$$

Сила Ампера, действующая на стрелку равна по модулю

$$F_A = \frac{4\pi\xi B}{\tau(10\pi + 9)}$$

Направление силы Ампера можно установить по правилу левой руки (см. Рис).

Для ответа на второй вопрос достаточно качественно рассмотреть динамику стрелок. Под действием силы Ампера стрелки будут разгоняться в направлении друг к другу с равными по модулю ускорениями. В первый раз стрелки встрется на равном угловом расстоянии от начального положения - на отметке 8 часов. Ток, текущий по стрелкам будет при этом сокращаться при приближении к этой отметке и обратится в 0 в точке 8 часов (как и в любой точке, где стрелки по какой - то причине встретятся). Когда стрелки по инерции проскочат это положение, направление тока в каждой из них сменится на обратное. Следовательно, сила Ампера также сменит направление на противоположенное. Таким образом, возникнет «возвращающая сила».



ЭДС индукции в данной системе будет выполнять роль вязкого трения. Обоснуем это утверждение. На рисунке зелеными стрелками показан индукционный вклад в ток, текущий по контурам. Направление тока проще всего установить по правилу Ленца: «Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток». Величина индукционного тока, согласно закону Фарадея, будет пропорциональна скорости. Дополнительная сила Ампера, которая при этом возникает, будет всегда направлена против скорости стрелок. Таким образом, влияние электромагнитной индукции в данной системе эквивалентно влиянию вязкого трения.

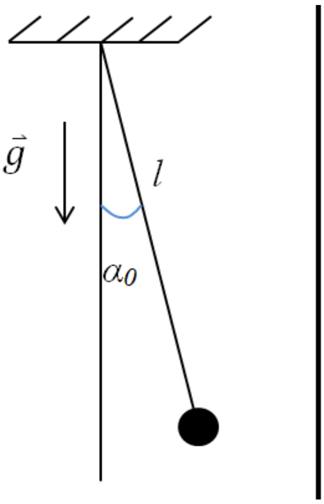
Сказанное выше приводит нас к выводу, что колебания стрелок постепенно остановятся под влиянием индукционного тока. В силу симметрии, они остановятся в положении 8 часов (при выбранной полярности, при противоположной - на 2х часах). Следует отметить, что несмотря на возникновение возвращающей силы, положение равновесия стрелок на 8 часах является безразличным. Они вместе могут сместиться из него под действием слабой внешней силы.

Пара стрелок будет представлять собой проводник с сопротивлением $D\tau$, соединенный параллельно с участком обода. Сопротивление этого участка будет пропорционально угловому расстоянию между стрелками. Последовательно с этим участком цепи будет подключена оставшееся часть обода между "4" и "12". Учитывая описанную выше динамику стрелок, искомая зависимость тока от времени будет иметь следующий характер (см. Рис.). При больших временах ток обратится в 0.

Критерии оценивания:

Найдено сопротивление циферблата со стрелками	4
Найден ток через стрелки	2
Найдена сила Ампера	3
Анализ динамики стрелок	4
Роль индукционных токов	1
Равновесное положение стрелок	2
График тока от времени	4

Задача 11.4 (25 б.) Притягательная пластина.



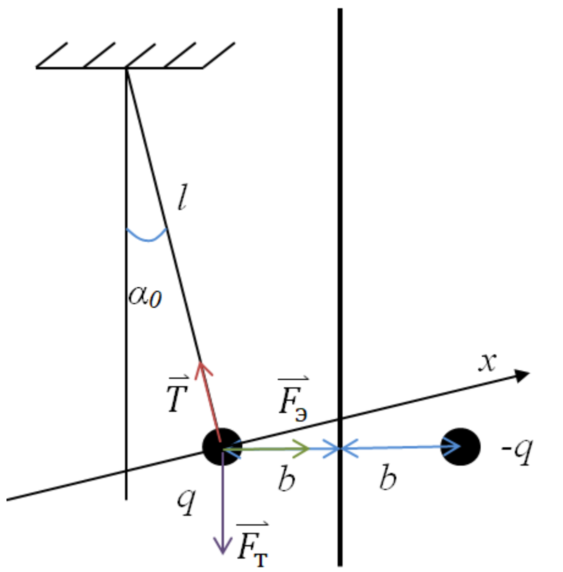
Маленький шарик с зарядом q и массой m закреплен на невесомом непроводящем жестком стержне таким образом, что он может свободно отклонятся на любой угол в плоскости рисунка. Вертикально, перпендикулярно плоскости рисунка, расположена бесконечная проводящая плоскость (заземленная) с очень высокой проводимостью. В состоянии равновесия стержень отклоняется от вертикали на угол α_0. Найти период малых колебаний (в плоскости рисунка) вблизи точки равновесия, если таковые имеют место. Длина стержня l. Достаточно учесть электростатическое взаимодействие шарика только с проводящей плоскостью. Электромагнитным излучением и сопутствующими явлениями можно пренебречь.
Возможно, Вам будет полезна формула $(1+x)^\gamma \approx 1+\gamma x$ при $x \ll 1$.

Возможное решение:

Кроме силы тяжести и силы упругости, на шарик действует сила электростатического притяжения с изображением заряда шарика в металлической плоскости. Положение заряда-изображения находится стандартным образом из требования равенства нулю электрического потенциала на бесконечной плоскости.
Рассмотрим сначала стационарное состояние. Спроецируем силы на ось x (см. Рис)

$$0 = -mg\sin\alpha_0 + \frac{kq^2\cos\alpha_0}{4b^2} \qquad (1)$$

$$b = \sqrt{\frac{kq^2\cot\alpha_0}{4mg}}$$



Предположим далее, что угол между стержнем и вертикалью α . $|\alpha - \alpha_0| << l$. Второй закон Ньютона, спроецированный на ось x, имеет вид

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha + \frac{kq^2\cos\alpha}{4\big(b + l(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)\big)^2}$$

Введем новую переменную $\alpha' = \alpha - \alpha_0 << 1$.

$$ml\ddot{\alpha} = -mg(\sin\alpha'\cos\alpha_0 + \sin\alpha_0\cos\alpha') + \frac{kq^2(\cos\alpha_0\cos\alpha' - \sin\alpha_0\sin\alpha')}{4\big(b + l(\sin\alpha_0 - \sin\alpha'\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0\cos\alpha')\big)^2}$$

Используя первый замечательный предел и его следствия, получим в первом порядке по α'

$$ml\ddot{\alpha} = -\,mg(\alpha' \cos\alpha_0 + \ \sin\alpha_0\,) + \frac{kq^2(\cos\alpha_0 - \alpha' \sin\alpha_0)}{4b^2\left(1 - \frac{l\alpha' \cos\alpha_0}{b}\right)^2}$$

$$ml\ddot{\alpha} = -\,mg(\alpha' \cos\alpha_0 + \ \sin\alpha_0\,) + \frac{kq^2 \cos\alpha_0}{4b^2}(\cos\alpha_0 - \alpha' \sin\alpha_0)\left(1 + \frac{2l\alpha' \cos\alpha_0}{b}\right)$$

Учитывая (1) в первом порядке по α'

$$ml\ddot{\alpha} = -\,mg\alpha' \cos\alpha_0 + \frac{kq^2\alpha' \cos\alpha_0}{4b^2}\left(\frac{2l\cos^2\alpha_0}{b} - \sin\alpha_0\right)$$

$$\ddot{\alpha} + \alpha'\left(\frac{g\cos\alpha_0}{l} - \frac{kq^2\cos\alpha_0}{4mb^2}\left(\frac{2\cos^2\alpha_0}{b} - \frac{\sin\alpha_0}{l}\right)\right) = 0$$

Если выражение в скобках положительно, в системе наблюдаются малые колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha_0}{l} - \frac{kq^2}{4mb^2}\left(\frac{2\cos^3\alpha_0}{b} - \frac{\sin 2\alpha_0}{2l}\right)}$;

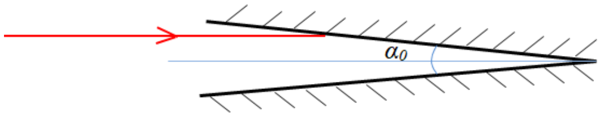
Период малых колебаний $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g\cos\alpha_0}{l} - \frac{kq^2}{4mb^2}\left(\frac{2\cos^3\alpha_0}{b} - \frac{\sin 2\alpha_0}{2l}\right)}}$, где $b = \sqrt{\frac{kq^2\cot\alpha_0}{4mg}}$;

Критерии оценивания:

Записано условие равновесия (1). Найдено равновесное положение маятника	5
Записан второй закон Ньютона	4
Второй закон Ньютона переписан через малое смещение из положения равновесия	3
Записан второй закон Ньютона в первом порядке малости по смещению из положения равновесия	7
Найдена циклическая частота и период колебаний	6

Задача 11.5 (20 б.) Многократное отражение.

Два бесконечных плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha_0 = \pi/n$, где n – натуральное число ≥ 2. Параллельно биссектрисе линейного угла* данного двугранного угла, на одно из зеркал падает луч лазера. Найдите количество отражений луча в зеркалах и угол между падающим и вышедшим лучом после всех отражений.



*Угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, проведенными в его гранях из одной точки ребра, называется линейным углом двугранного угла.

Возможное решение:

Будем следить за углом между направлением к двугранному углу по биссектрисе – осью x и лучом. Пусть угол между лучом и осью x равен φ, тогда после отражения угол между осью x и лучом будет равен $\varphi' = \varphi + 2\alpha$, $\alpha = \alpha_0/2$ (см. Рис. 1). Отражение от верхнего зеркала можно получить, отразив Рис.1 от оси x. Зависимость φ'(φ) будет иметь тот же вид.

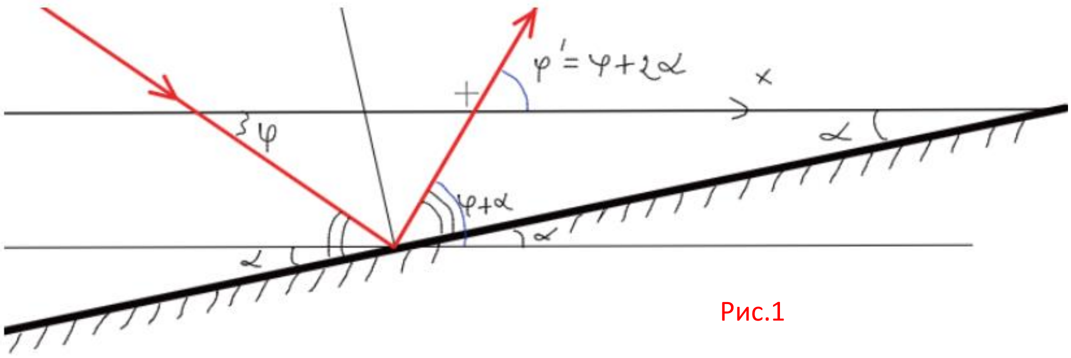


Рис.1

Таким образом, угол между лучом и осью x увеличивается и в какой-то момент луч сменит проекцию на ось x на обратную. Рассмотрим отдельно этот случай (см. Рис.2). Зависимость φ'(φ) в этом случае имеет прежний вид.

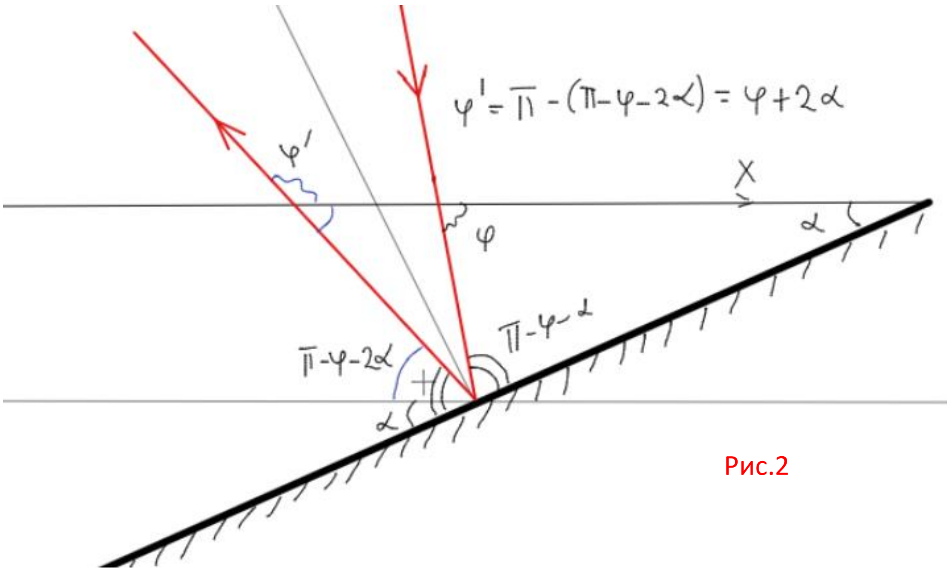


Рис.2

Движение от угла можно не рассматривать отдельно: обратим направление стрелки на Рис.1 и будем следить (на Рис.1) за углами $\pi - \varphi'$ и $\pi - \varphi$ соответственно. Таким образом, во всем диапазоне углов φ имеет место соотношение $\varphi' = \varphi + 2\alpha$. Учитывая, что изначально $\varphi = 0$, $\varphi' = k\alpha_0$, где k – число отражений. Чтобы луч вышел из системы, φ' должен удовлетворять следующему неравенству

$$\pi - \frac{\alpha_0}{2} \le k\alpha_0 \le \pi + \frac{\alpha_0}{2}$$

$$\pi - \frac{\pi}{2n} \le k\frac{\pi}{n} \le \pi + \frac{\pi}{2n}$$

$$-\frac{1}{2} \le k - n \le +\frac{1}{2}$$

Единственным натуральным решением этого неравенства является $k = n$. Угол между падающим и вышедшим лучом равен π.

Ответ: n, π.

Критерии оценивания:

Найдено отклонение луча при отражении от зеркала	4
Найдено направление луча после многократного отражения	6
Рассмотрены все необходимые случаи	5
Записано условие выхода луча из системы	3
Получен верный ответ	2