Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Физика»
заключительный этап (решения)
2019-2020 учебный год
11 класс

Задача 11.1

Космический корабль вращается по круговой орбите вокруг Солнца на том же расстоянии $R_З$ = $1.5\cdot10^8$ км, что и Земля. Он переходит на другую круговую орбиту вокруг Солнца, радиус которой соответствует радиусу орбиты Марса $R_M = 2.3\cdot10^8$ км (в данной задаче мы для простоты пренебрегаем эксцентриситетом орбит Земли и Марса). Совершая этот маневр, он кратковременно включает двигатели дважды: на расстоянии от Солнца $R_З = 1.5\cdot10^8$ км и R_M = $2.3\cdot10^8$ км, при этом направление тяги выбирается по касательной к соответствующей круговой орбите. Найдите модули изменения скорости корабля за время первого и второго интервала работы двигателей. Изобразите примерную траекторию движения корабля. При решении задачи следует пренебречь изменением массы корабля в процессе работы двигателя и гравитацией всех тел, кроме Солнца. Масса Солнца $M_C = 2\cdot10^{30}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6.67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 . Ответ приведите в символьном и численном виде. (11 баллов)
Указание: Можно воспользоваться законом сохранения момента импульса: Момент импульса $\bar{L} = \sum_l[\bar{r_l}, \bar{p_l}]$ относительно любой неподвижной точки для замкнутой системы тел сохраняется. Здесь $\bar{p_l}$ – импульс частицы, $\bar{r_l}$ – радиус-вектор, проведенный из выбранной неподвижной точки.

Возможное решение:

На первой круговой орбите до включения двигателя корабль имел скорость:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_З}}, \qquad (1)$$

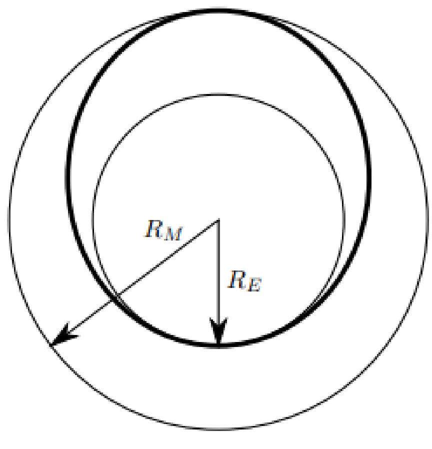
которая совпадает с орбитальной скоростью движения Земли вокруг Солнца. Данное выражение получается из условия равенства ускорения сообщаемого силой гравитации центростремительному ускорению на данной круговой орбите. Аналогично, скорость корабля на второй круговой орбите после второго включения двигателя:

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_M}}, \qquad (2)$$

которая совпадает с орбитальной скоростью движения Марса вокруг Солнца.
Космический корабль в промежутке между моментами пусками двигателей движется в поле тяготения Солнца и на него не действуют никакие другие силы. Запишем закон сохранения момента импульса относительно Солнца для этих двух моментов времени, обозначив скорости $\overline{u_1}$ и $\overline{u_2}$, и массу корабля m:

$$mu_1R_З = mu_2R_M \qquad (3)$$

С другой стороны, справедлив закон сохранения энергии:



$$\frac{mu_1^2}{2} - G\frac{mM_C}{R_З} = \frac{mu_2^2}{2} - G\frac{mM_C}{R_M} \quad (4)$$

Гравитация является силой притяжения, поэтому потенциальная энергия отрицательна. Решив совместно уравнения (3) и (4) относительно неизвестных u_1 и u_2, найдем, что:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2GM_C R_M}{R_З(R_З + R_M)}}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2GM_C R_З}{R_M(R_З + R_M)}}$$

По условию сила тяги двигателей направлена вдоль касательных к круговым орбитам в обоих случаях, поэтому векторы скоростей $\overline{u_1}$ и $\overline{u_2}$ коллинеарны векторам $\overline{v_1}$ и $\overline{v_2}$ соответственно. Отсюда, модули разностей скоростей равны:

$$u_1 - \mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_З}}\left(\sqrt{\frac{2R_M}{R_З + R_M}} - 1\right) = 3 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

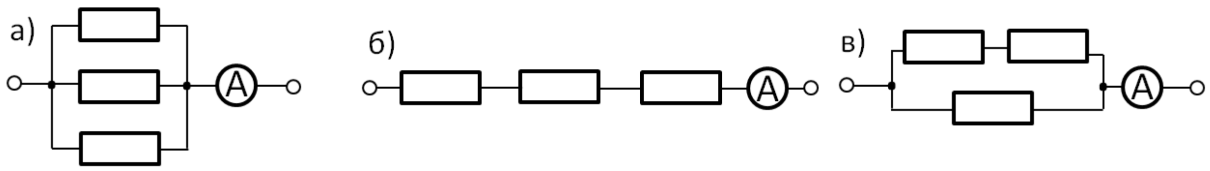
$$\mathrm{v}_2 - u_2 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_M}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_З}{R_З + R_M}}\right) = 2{,}7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Критерии оценивания:

Найдены орбитальные скорости на орбите Земли и Марса (включая численные значения)	2
Верно использован закон сохранения момента импульса	2
Записан закон сохранения энергии для интервала времени между пусками двигателей	3
Изображена качественно правильная траектория движения	1
Из законов сохранения энергии и импульса верно найдены искомые добавочные скорости	3

Задача 11.2

При подключении трех параллельно соединенных резисторов к идеальному источнику напряжения идеальный амперметр показывает I_2 = 8 А (а). При последовательном подключении тех же резисторов в тех же условиях I_1 = 1 А (б). Какой ток будет показывать амперметр в цепи на рис. (в), если в ней содержатся те же резисторы и источник. Все токи указаны в установившемся режиме, зависимость сопротивления резисторов от температуры считать линейной, термодинамические свойства внешней среды во всех случаях идентичны. (11 баллов)



Возможное решение:

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность резистора. Обозначим за U напряжение на источнике, k – коэффициент, связывающий разность температур окружающей среды и резистора и тепловую мощность потерь энергии через его поверхность.

$$\begin{cases} k\Delta T_1 = \dfrac{UI_1}{3} \\ k\Delta T_2 = \dfrac{UI_2}{3} \end{cases}$$

С другой стороны закон Ома с учетом температурной зависимости сопротивления для случая а) и б) имеет вид

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{3R_0(1+\alpha\Delta T_1)} \\ \dfrac{I_2}{3} = \dfrac{U}{R_0(1+\alpha\Delta T_2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{3R_0(1+\frac{\alpha U I_1}{3k})} \\ \dfrac{I_2}{3} = \dfrac{U}{R_0(1+\frac{\alpha U I_2}{3k})} \end{cases}$$

Введем параметры $I_0 = \frac{U}{R_0}$ и $b = \frac{\alpha U}{3k}$.

$$\begin{cases} 3I_1 = \dfrac{I_0}{(1+bI_1)} \\ \dfrac{I_2}{3} = \dfrac{I_0}{(1+bI_2)} \end{cases}$$

$$b = \frac{9I_1 - I_2}{I_2^2 - 9I_1^2} \approx 0.018\ A^{-1},\ \ I_0 = \frac{3I_1 I_2 (I_2 - I_1)}{I_2^2 - 9I_1^2} \approx 3.055\ A$$

Ток для двух последовательно соединенных резисторов можно найти из закона Ома. В данном случае он представляет из себя квадратное уравнение для тока

$$I_x = \frac{I_0}{2(1+\frac{3bI_x}{2})}$$

$$I_x = \frac{-1 \pm \sqrt{3bI_0 + 1}}{3b}$$

Положительный корень этого уравнения имеет численное значение $I_x \approx 1.468$ А.

Легко заметить, что ветвь содержащая 1 резистор находиться в тех же условиях, что и каждый резистор в случае а) и ток через него равен 8/3 А.

Окончательно, искомый ток равен $I \approx 4.135$ А.

Критерии оценивания:

Верно записано равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность	2
Закон Ома для случая а) и б) с учетом зависимости от температуры	2
Найден коэффициент, определяющий температурную зависимость сопротивления и параметр, определяющий ток через «холодный» резистор (либо другие параметры, подходящие для дальнейшего решения поставленной задачи)	3
Найден ток через два последовательных резистора	2
Найден ток через 1 резистор и окончательный ответ	2

Задача 11.3

Непроводящий шар содержит 2 слоя: внутренний – шар, имеет радиус R и равномерно заряжен по объему и имеет заряд Q; внешний - сферический слой равномерно заряжен с той же по модулю, но противоположенной по знаку объемной плотностью заряда. Внешний радиус подобран таким образом, что полный заряд системы равен нулю. В шаре просверлен тонкий прямой канал, проходящий через центр шара. В канал влетает частица со скоростью v_0, массой m и зарядом q. Частица, двигаясь по каналу без трения, пролетает шар насквозь. Определите максимальную и минимальную скорость частицы. (11баллов)

Указание: Можно воспользоваться (без доказательства) следующим следствием из теоремы Гаусса: Электрическое поле сферически симметричного распределения зарядов в точке, отстоящей от центра симметрии на r, определяется только суммарным зарядом, расположенным внутри концентрической сферы радиуса r.

Возможное решение:

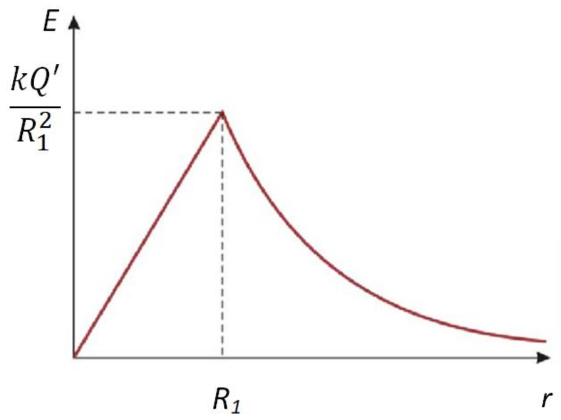
Определим радиус внешней оболочки R_e. Условие равенства объемов приводит к уравнению:

$$R_e^3 - R^3 = R^3; \quad R_e = \sqrt[3]{2}R;$$

Систему можно представить в виде суперпозиции двух концентрических однородных шаров: один с зарядом $2Q$ и радиусом R и второго с зарядом $-2Q$ и радиусом $\sqrt[3]{2}R$. Далее рассмотрим однородный шар радиуса R_1 и зарядом Q_1. Пользуясь выражением для электрического поля точеного заряда в сочетании с Указанием приходим к выражению для электрического поля в любой точке

$$\bar{E} = \frac{kQ'\bar{r}}{r^3},$$

где $Q' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ заряд внутри сферы радиуса r. Выразив плотность заряда ρ через полный заряд и объем сферы получаем электрическое поле однородного шара (см. рис)



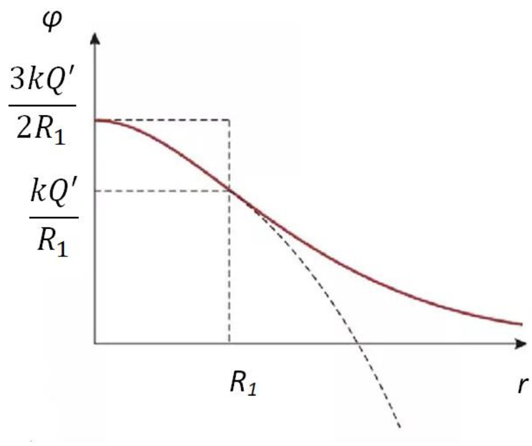
$$\begin{cases} \bar{E} = \dfrac{kQ_1\bar{r}}{R_1^3} \text{ при } r < R_1 \\ \bar{E} = \dfrac{kQ_1\bar{r}}{r^3} \text{ при } r > R_1 \end{cases}$$

Зная электрическое поле можно вычислить зависимость потенциала от расстояния до центра шара. Эти вычисления можно провести различными способами, в частности можно вычислить работу, совершаемую внешними силами по перемещению заряда из некоторой точки внутри шара на его границу. Мы знаем потенциал на границе и вне шара. Он совпадает с потенциалом точечного заряда, расположенного в центре симметрии. Работа внешних сил по квазистатическому перемещению пробного заряда будет равна изменению его потенциальной энергии. С другой стороны, эту работу можно вычислить как площадь под частью линейного участка графика на графике $E(r)$:

$$(\varphi(R) - \varphi(r))q = \frac{-(R-r)\left(\frac{kQ_1 r}{R_1^3} + \frac{kQ_1}{R_1^2}\right)}{2} q$$

Таким образом, потенциал однородного шара имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi(r) = \dfrac{3kQ_1}{2R_1} - \dfrac{kQ_1 r^2}{2R_1^3} \text{ при } r < R_1 \\ \varphi(r) = \dfrac{kQ_1}{r} \text{ при } r > R_1 \end{cases}$$



Теперь, пользуясь принципом суперпозиции, находим потенциал внутри канала в каждой точке. В силу подобия шаров с противоположным зарядом, потенциал будет знакопостоянным и монотонно убывать по величине при удалении от центра шара. В зависимости от знака произведения Qq скорость будет достигать максимум или минимум именно в центре шара. Величину скорости в центре шара найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{exstr}^2}{2} + q\varphi(0) = \frac{mv_{exstr}^2}{2} + \frac{3Qq}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

Окончательно, при $Qq>0$

$$v_{max} = v_0$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{mv_0^2}{2} - \frac{3kQq}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)}$$

при $Qq<0$

$$v_{min} = v_0$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{mv_0^2}{2} - \frac{3kQq}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)}$$

Критерии оценивания:

Найден внешний радиус шара	1
Использование принципа суперпозиции*	1
Найдено электрическое поле однородного шара	2
Найден потенциал однородного шара	3
Найден потенциал в канале	2
Найдена скорость в центре шара из закона сохранения энергии	1
Рассмотрены оба варианта знака Qq	1

*При решении можно не использовать принцип суперпозиции, также можно не находить в явном виде потенциал шара. Такое решение оценивается без использования приведенных критериев.

Задача 11.4

Холодное газовое облако очень большого размера и массы M, состоящее из молекулярного водорода, сжимается в молодую звезду радиуса R. Оцените среднюю температуру звезды до начала термоядерного синтеза (не учитывайте выделение энергии, связанное с ним). Проведите оценку для массы и радиуса Солнца $R_C = 6.95\cdot10^8$ м; $M_C = 2\cdot10^{30}$ кг. Какой радиус должен иметь объект с массой Юпитера $M_{Ю} = 1.9\cdot10^{27}$ кг, чтобы набрать температуру, полученную Вами ранее для параметров Солнца? Гравитационная постоянная $G = 6.67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг², 1 а.е.м = $1.66\cdot10^{-27}$ кг, $k_B = 1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К. (8 баллов)

Указание: Гравитационная энергия однородного шара вычисляется по формуле $E_g = -\frac{3GM^{\gamma}}{5R^{\beta}}$, γ и β восстановите из соображений размерности.

Возможное решение:

Для холодного газового облака, энергию системы можно считать равной нулю. В то время как после сжатия, газ нагревается, а значит у газа появляется энергия $\sim kT$. Используя указание к задаче и тот факт, что молекулярный водород будет при высоких температурах диссоциировать на отдельные атомы, получаем:

$$-\frac{3GM_c^2}{5R_c}+\frac{3}{2}NkT=0,$$

где N – количество молекул:

$$N=\frac{M_{\text{с}}}{m_H}=\frac{M_{\text{с}}N_A}{M_H}.$$

Получаем, что температура будет:

$$T=\frac{2}{5}\cdot\frac{GM_c^2}{R_ckN}=\frac{2}{5}\cdot\frac{GM_cM_H}{R_ckN_A}=9{,}2\text{ млн К}^*$$

Радиус для Юпитера считаем по той же формуле, выразив R:

$$R=\frac{2}{5}\cdot\frac{GM_cM_H}{kTN_A}=6.6\cdot10^5\text{ м}$$

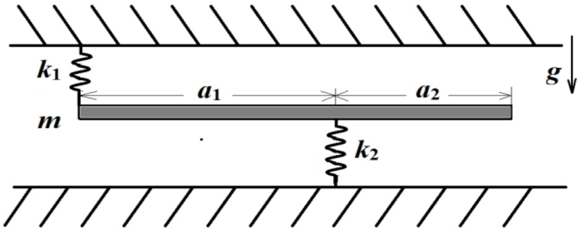
*В зависимости от предположений о составе получившейся звезды температура может получиться несколько отличной, так как это влияет на теплоемкость. Наиболее реалистичной на наш взгляд является оценка, когда учитывается полная ионизация водорода (около 5 млн К), однако она немного выходит за рамки школьной программы для данного этапа обучения. Однако, если оно проведено, то засчитывается как верное.

Критерии оценивания:

Верно определены константы γ и β	1
Определено количество молекул	1
Записан закон сохранения энергии и выражение для температуры	3
Рассчитан радиус для Юпитера	2
Проведена оценка температуры с учетом изменения состава газа под действием температуры/ Проведена оценка тля двухатомного газа, но	1

приведены рассуждения о возможной температурной диссоциации и ионизации	

Задача 11.5



Прямой однородный брусок, находящийся внутри ящика, прикрепили к пружинам жесткостью k_1 и k_2 ($k_1 < k_2$) как показано на рисунке и так, что в состоянии свободного падения ящика пружины не напряжены и брусок расположен строго параллельно стенкам ящика. Расстояние между креплениями пружин к бруску равно a_1 и длина свободного конца бруска равна a_2, как показано на рисунке. Найти соотношение длин a_1 и a_2 при заданных k_1 и k_2, чтобы при нахождении системы в покое брусок массы m оставался по прежнему строго параллельно стенкам ящика в поле силы тяжести g. (9 баллов)

Возможное решение:

Когда ящик находится в поле силы тяжести, то скомпенсированы силы и моменты сил. Запишем баланс сил:

$$mg - k_2 x - k_1 x = 0\,, \qquad (1)$$

где учтено, что растяжение одной пружины равно сжатию другой, так как в невесомости пружины не напряжены и выполнено условие параллельности бруска стенкам ящика. Запишем баланс моментов сил, для этого выберем в качестве точки опоры место крепления к бруску пружины с жесткостью k_1. Запишем:

$$-k_2 x a_1 + mg\frac{a_1 + a_2}{2} = 0\,, \qquad (2)$$

Выражая из уравнения (1) деформацию x и подставляя ее в уравнение (2) находим:

$$\frac{2k_2}{k_1 + k_2} a_1 = a_1 + a_2$$

Отсюда находим искомое соотношение длин:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_2 - k_1}\,.$$

Критерии оценивания:

Математически сформулировано условие параллельности бруска стенкам ящика	2
Правильно записано условие баланса сил	2
Правильно записано условие моментов сил. Указана точка опоры.	2
Выражена величина деформации пружин. Растяжения и сжатия	1
Получено правильное отношение длин a_1 и a_2	2