Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап (разбор задач)
2020-2021 учебный год
8 класс

Задача 8.1 (23 б.) Плотность масла.

В сосуде слой масла плавает на поверхности воды. Брусок плавает в сосуде таким образом, что отношение объема бруска, погруженного в воду ко всему объему бруска равно α. Доля объема бруска, погруженная в масло, равна β. Остальная часть объема находится над поверхностью масла. В сосуд доливают масло таким образом, что брусок перестает касаться воды. Доля объема бруска, находящаяся **над поверхностью** масла в таком состоянии, равна γ. Найдите плотность масла, если плотность воды $\rho_в$. Дайте также и численный ответ, если $\alpha = \beta = 1/3$, $\gamma = 1/4$, плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Возможное решение:

Запишем проекцию баланса сил на вертикальную ось в первом случае

$$mg = F_{Aм} + F_{Aв}$$

$$gV\rho = \alpha gV\rho_в + \beta gV\rho_м \tag{1}$$

$$\rho = \alpha\rho_в + \beta\rho_м$$

Аналогично во втором случае

$$mg = F_{Aм}$$

$$gV\rho = (1-\gamma)gV\rho_м \tag{2}$$

$$\rho = (1-\gamma)\rho_м$$

Приравнивая правые части выражения (1) и (2), получаем

$$\alpha\rho_в + \beta\rho_м = (1-\gamma)\rho_м$$

$$\rho_м = \frac{\alpha}{1-\beta-\gamma}\rho_в$$

Ответ: $\frac{\alpha}{1-\beta-\gamma}\rho_в$, 800 кг/м^3.

Критерии оценивания:

Записан баланс сил в начальном состоянии	6
Получено выражение для плотности тела	4
Записан баланс сил в конечном состоянии	5
Получено аналитическое выражение для плотности масла	6
Получено численное значение плотности масла	2

Задача 8.2 (23 б.) Искусственное глобальное потепление.

Для нагрева поверхности планеты, похожей на Землю, с радиусом $R = 6370$ км, и полностью покрытой океаном (слоем воды) глубиной $H = 300$ м при температуре чуть выше 0°C, решили использовать 1 миллион ($N = 10^6$) ядерных реакторов, равномерно распределённых по площади, около дна, непрерывно работающих с тепловыделением $P = 1.2$ ГВт каждый. Найти изменение температуры океана ΔT через $t = 30$ лет. Теплоемкость воды C=4200 Дж/(кг·°C), плотность воды 1000 кг/м^3. Теплообменом воды через дно и с атмосферой пренебречь.

Указание: Площадь поверхности сферы вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$.

Возможное решение:

Теплота Q, выделяемая ядерными реакторами, будет тратиться на нагрев воды. Запишем уравнение

$$Q = 10^6 \cdot P \cdot t = CM\Delta T, \tag{1}$$

где $M = 4\pi R^2 H \rho$ - масса воды. Тридцать лет – это $t = 30 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 9.47 \cdot 10^8$ с. Подставляем формулу для массы воды в уравнение (1) и получаем для ΔT выражение:

$$\Delta T = \frac{NPt}{4\pi R^2 HC\rho} \approx 1.77$$

$$\Delta T = \frac{NPt}{4\pi R^2 HC\rho} \approx 1.77\ °\mathrm{C}$$

Критерии оценивания:

Верно записано уравнение теплового баланса	7
Получена корректная формула в аналитическом виде для изменения температуры океана ΔT	7
Получен правильный численный ответ	9

Задача 8.3 (27 б.) Объемное расширение.

Ученик Вася взял медную проволоку при температуре $t_0 = 0°\text{C}$ и замкнул её через батарейку. Через некоторое время ее объем увеличился в χ раз, причем $\chi - 1$ << 1. Найдите, насколько была нагрета проволока, если коэффициент линейного теплового расширения меди α. Коэффициент линейного теплового расширения - это относительное* изменение линейных размеров тела, происходящее в результате изменения его температуры на 1 °C при постоянном давлении.

Указание: проволоку можно считать, для определенности, цилиндрической. Объем цилиндра $V = \pi l R^2$, где R –радиус основания цилиндра, l – высота.

*Относительно исходных линейных размеров тела.

Возможное решение:

По определению коэффициента линейного теплового расширения

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha t$$

$$\Delta l = l\alpha t$$

Где Δl и l – абсолютное удлинение (изменение длины) и длина проволоки соответственно. Аналогичное выражение можно записать для радиуса проволоки

$$\Delta R = R\alpha t$$

Тогда χ можно выразить через αt

$$\chi - 1 = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi(R + R\alpha t)^2(l + l\alpha t) - \pi l R^2}{\pi l R^2} = (1 + \alpha t)^3 - 1$$

$$\chi - 1 = 3\alpha t + 3(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3$$

$$\alpha t = \frac{\chi - 1}{(3 + 3\alpha t + (\alpha t)^2)}$$

Отсюда следует, что если $\chi - 1$ <<1, то и αt << 1. Вторым и третьим слагаемым в знаменателе мы можем пренебречь. Тогда окончательно получаем

$$t = \frac{\chi - 1}{3\alpha}$$

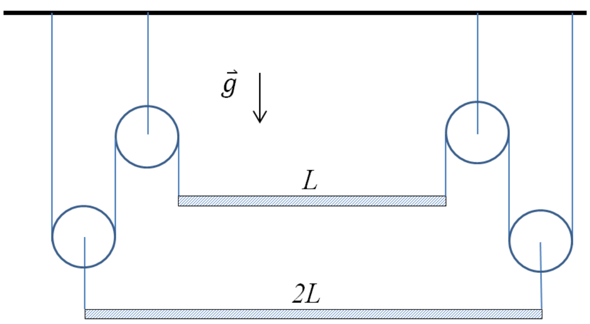
Критерии оценивания:

Записано формульное выражение определения коэффициента линейного расширения	3
Изменение радиуса выражено через α и температуру	3
Изменение объема выражено через α и температуру	6
Получена связь между χ и αt	5
Получена связь между χ и αt с учетом малости $\chi - 1$	6
Получен правильный ответ	4

Задача 8.4 (27 б.) Тонкий баланс.

Две однородные доски длиной L и $2L$, подвешенные с помощью системы идеальных* нитей и блоков (см. Рис), изначально находятся в равновесии в горизонтальном положении. Масса верхней доски M. На нижнюю доску кладут небольшой груз массой m на расстоянии $a = 2L/3$ от левого края (груз сместиться не может). Груз какой массы и на каком расстоянии от левого края нужно поместить на верхнюю доску, чтобы доски находились в состоянии равновесия в горизонтальном положении, а нити, закрепленные на концах досок, были вертикальны?

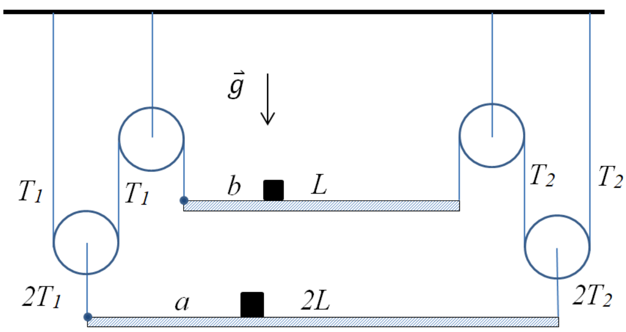
*Под идеальными нитями здесь подразумеваются гибкие невесомые и нерастяжимые нити. Под идеальными блоками – невесомые блоки, способные вращаться без трения.



Возможное решение:

Рассматривая равновесное состояние без грузов легко установить массу нижней доски M_2. Баланс сил, действующих на первую доску, приводит к равенству

$$2T = Mg$$



Для идеальных подвижных блоков мы легко находим силы натяжения нитей, удерживающих нижнюю доску (см. Рис). Из баланса сил для нижней доски находим

$$4T = 2Mg = M_2g; \qquad M_2 = 2M$$

Рассмотрим нижнюю доску после размещения грузов. Запишем проекцию баланса сил на вертикальную ось и баланс моментов сил относительно точки закрепления левой нити (см. Рис)

$$2T_1 + 2T_2 = 2Mg + mg$$

$$4LT_2 = 2MLg + mga$$

$$T_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{6}$$

$$T_1 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{3}$$

Рассмотрим теперь верхнюю доску. Искомую массу легко найти, проецируя баланс сил на вертикальную ось.

$$T_1 + T_2 = Mg + \frac{mg}{2} = Mg + m_x g$$

$$m_x = \frac{m}{2}$$

Положение тела массой m_x легко найти из баланса моментов сил

$$LT_2 = \frac{MLg}{2} + \frac{mgb}{2}$$

$$\frac{MgL}{2} + \frac{mgL}{6} = \frac{MLg}{2} + \frac{mgb}{2}$$

$$b = \frac{L}{3} = \frac{a}{2}$$

Задачу можно решить намного проще из соображений масштабной инвариантности, но все шаги должны быть аккуратно обоснованы.

Критерии оценивания:

Определены соотношения между силами натяжения нитей для верхней и нижней доски	2
Найдена масса нижней доски	3
Записано условие баланса сил и моментов для нижней доски	4
Найдены T_1 и T_2	5
Записано условие баланса сил и моментов для верхней доски	4
Найдена масса груза	4
Найдено положение груза	5