Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

9 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1, 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$. (25 *баллов*)

2. Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из *всех* этих цветов *максимально возможное* количество букетов — причём так, чтобы все букеты были одинаковы. Сколько букетов у неё получится? (25 *баллов*)

3. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются всевозможные суммы с числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных значений сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных значений сумм можно получить?

(25 *баллов*)

4. Точка K на медиане BM треугольника ABC такова, что углы AKM и MBC равны. Найдите отношение отрезков AK и BC. (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

9 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1, 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$. (25 *баллов*)

2. Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из *всех* этих цветов *максимально возможное* количество букетов — причём так, чтобы все букеты были одинаковы. Сколько букетов у неё получится? (25 *баллов*)

3. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются всевозможные суммы с числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных значений сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных значений сумм можно получить?

(25 *баллов*)

4. Точка K на медиане BM треугольника ABC такова, что углы AKM и MBC равны. Найдите отношение отрезков AK и BC. (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

10 класс

1. Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из *всех* этих цветов *минимально возможное* количество букетов — причём так, чтобы во всех букетах было одно и то же количество роз и в каждом букете розы были бы одного цвета. Сколько букетов у неё получится? (25 *баллов*)

2. Докажите, что для любых действительных x и y справедливо равенство

$$||x|-|y||+|x|+|y|=|x-y|+|x+y|.$$

(25 *баллов*)

3. Существует ли треугольник с углами A, B и C, для которых $\operatorname{tg} A=1$, $\operatorname{tg} B=2$, $\operatorname{tg} C=3$? (25 *баллов*)

4. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC=2\cdot A'C'$. (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

10 класс

1. Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из *всех* этих цветов *минимально возможное* количество букетов — причём так, чтобы во всех букетах было одно и то же количество роз и в каждом букете розы были бы одного цвета. Сколько букетов у неё получится? (25 *баллов*)

2. Докажите, что для любых действительных x и y справедливо равенство

$$||x|-|y||+|x|+|y|=|x-y|+|x+y|.$$

(25 *баллов*)

3. Существует ли треугольник с углами A, B и C, для которых $\operatorname{tg} A=1$, $\operatorname{tg} B=2$, $\operatorname{tg} C=3$? (25 *баллов*)

4. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC=2\cdot A'C'$. (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

11 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1, 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$. (25 *баллов*)

2. Будем говорить, что число *полупростое*, если оно является произведением двух простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть полупростыми? (25 *баллов*)

3. Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси, причём для всех x выполняются неравенства: $f(x + 2018) \leqslant f(x) \leqslant f(x + 2019)$.

а) Придумайте хотя бы одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

б) Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая.

(25 *баллов*)

4. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot A'C'$. (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

11 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1, 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$. (25 *баллов*)

2. Будем говорить, что число *полупростое*, если оно является произведением двух простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть полупростыми? (25 *баллов*)

3. Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси, причём для всех x выполняются неравенства: $f(x + 2018) \leqslant f(x) \leqslant f(x + 2019)$.

а) Придумайте хотя бы одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

б) Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая.

(25 *баллов*)

4. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot A'C'$. (25 *баллов*)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

Решения задач 9 класса

1. Ответ: 0.

Так как графики проходят через точку (1, 1), то $1 = 1 + a + b$ и $1 = 1 + c + d$, то есть $b = -a$ и $d = -c$. Следовательно, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 - a^3 + c^3 - c^3 = 0$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Приведены частные случаи, из которых получен ответ — 5 баллов. Полное решение — 25 баллов.

2. Ответ: 17.

Пусть всего будет k букетов, в каждом букете m белых и n красных роз. Тогда $mk = 323$ и $nk = 221$. Из этих равенств видно, что число k является общим делителем чисел 323 и 221. По условию k должно быть максимально возможным, поэтому k — наибольший общий делитель, $k = \text{НОД}(323; 221)$. Отсюда $k = 17$, при этом в каждом букете будет 19 белых и 13 красных роз.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Только пример (ответ) с указанием числа белых и красных роз в каждом букете — 10 баллов. Доказано, что $k = \text{НОД}(323; 221)$ — 25 баллов.

3. *а)* **Ответ:** $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Можно считать, что исходные положительные числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Рассмотрим числа

$$\begin{array}{llllll}
a_1, & a_2, & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, \\
a_1 + a_n, & a_2 + a_n, & \ldots & a_{n-2} + a_n, & a_{n-1} + a_n, & \\
a_1 + a_{n-1} + a_n, & a_2 + a_{n-1} + a_n, & \ldots & a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, & & \\
\multicolumn{6}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,} \\
\multicolumn{6}{l}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n.}
\end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего, поэтому все выписанные числа различны. Их количество $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ соответствует требованиям задачи.

Осталось привести пример, в котором больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм получить не удастся. Для этого подойдет набор из первых n натуральных чисел, из которых нельзя составить больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм: эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + +n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

б) **Ответ:** $2^n - 1$.

Числа 1, 10, 10^2, ..., 10^{n-1} дают пример n различных чисел, из которых можно образовать наибольшее количество различных сумм. Сумма любых k чисел этого набора — это число, в десятичной записи которого используются только 1 и 0. Каждая такая сумма может быть представлена в виде n-элементного упорядоченного набора из 0 и 1. Поскольку на каждом месте набора могут быть только две цифры, их общее количество равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Единственный невозможный набор, составленный из n нулей, необходимо исключить, поэтому общее количество допустимых наборов равно $2^n - 1$.

Критерии. Верное решение пункта *а*) — 10 баллов. Только ответ — 0 баллов. Пример с наименьшим числом различных сумм — 5 баллов.

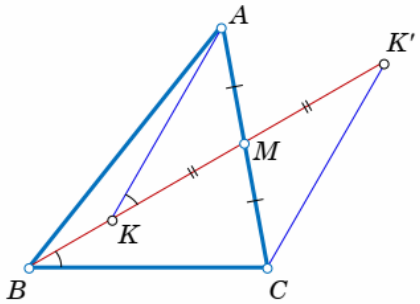
Верное решение пункта *б*) — 15 баллов. Только ответ — 0 баллов. Пример с наибольшим числом различных сумм — 7 баллов.

4. Ответ: $AK : BC = 1$.

Пусть K' — точка, симметричная K относительно точки M. Тогда треугольники KMA и $K'MC$ равны, так как $AM = MC$, $KM = MK'$ и $\angle KMA = \angle K'MC$. Отсюда $\angle MK'C = \angle AKM = \angle MBC$, а также $CK' = AK$. Следовательно, треугольник BCK' — равнобедренный и $CK' = BC$, отсюда $AK = BC$.

Комментарии. Возможны и другие решения. Например, через точку C можно провести параллельную прямую до пересечения с прямой AK в точке L. Тогда несложно доказать, что $BC = KL$. Поскольку KM — средняя линия в треугольнике ALC, получим $AK = KL = BC$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Рассмотрен неверный случай, когда точка K лежит на продолжении медианы BM — 0 баллов. Правильное дополнительное построение — 5 баллов.



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

Решения задач 10 класса

1. Ответ: 32 *букета.*

Пусть p — количество цветов в каждом букете, q — число белых букетов, а r — число красных букетов. Тогда $pk = 323$ и $pr = 221$. Отсюда следует, что p — общий делитель чисел 323 и 221.В задаче требуется минимизировать число букетов $q+r$. Так как

$$q + r = \frac{323}{p} + \frac{221}{p} = \frac{544}{p}.$$

то число p нужно взять максимально возможным, то есть p — наибольший общий делитель 323 и 221, $p = 17$, при этом количество букетов будет равно $q + r = \frac{544}{17} = 32$, из них 19 белых и 13 красных.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Только пример (ответ) с указанием числа «белых» и «красных» букетов — 10 баллов. Доказано, что $p = \text{НОД}(323; 221)$ — 25 баллов.

2. Доказываемое тождество не меняется при замене x на $-x$, y на $-y$, а также при замене x на y. Поэтому его достаточно проверить при $x \geqslant y \geqslant 0$. В этому случае левая часть тождества равна $(x-y)+x+y = 2x$, а правая — $(x-y)+(x+y) = 2x$, то есть они совпадают. В силу указанной чётности и симметрии переменных равенство будет выполняться для *любых* x и y.

Критерии. В решении рассмотрены не все возможные случаи раскрытия модулей — не более 10 баллов. Полное решение — 25 баллов.

3. Ответ: *да, существует.*

Построим треугольник ABC, у которого тангенсы углов A и B равны 1 и 2 соответственно. Треугольник с этими углами легко нарисовать на клетчатой бумаге. Для этого возьмем точки A, B и C с координатами (0; 0), (3; 0), (2; 2) соответственно, при этом $\operatorname{tg} A = 1$ и $\operatorname{tg} B = 2$. Тангенс угла C подсчитаем по формуле суммы тангенсов:

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg}(180^\circ - A - B) = -\operatorname{tg}(A+B) = -\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = -\frac{1+2}{1 - 1 \cdot 2} = 3,$$

то есть требуемый треугольник действительно существует.

Комментарии. Для тангенсов углов произвольного непрямоугольного треугольника ABC справедливо тождество: $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$. Указанные в задаче значения тангенсов удовлетворяют этому равенству.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Указано, что значение тангенса одного из углов выражается через тангенсы двух других (без описания построения треугольника ABC) — 10 баллов. Полное решение — 25 баллов.

4. Ответ: 60° *или* 120°.

Построим на стороне AC как на диаметре окружность, которая пройдет через точки A' и C', так как $\angle AA'C = \angle AC'C = 90^\circ$. Из условия $AC = 2 \cdot A'C'$ следует, что отрезок $A'C'$ равен радиусу построенной окружности. Значит, дуга, стягиваемая хордой $A'C'$, составляет 60°. Отсюда угол $C'CA'$, опирающийся на эту дугу, равен 30°.

Далее, если угол B — острый, то $\angle B = 90^\circ - \angle C'CB = 60^\circ$ (рис. 1); если же угол B — тупой, то $\angle CBC' = 90^\circ - \angle BCC' = 60^\circ$ (рис. 2), и значит, $\angle B = 180^\circ - \angle CBC' = 120^\circ$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Разобран только один из двух случаев — 15 баллов. Полное решение — 25 баллов.

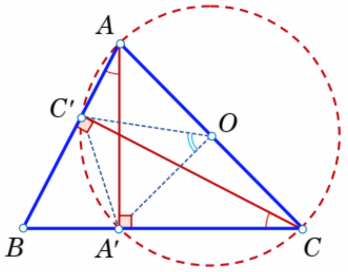


Рис. 1

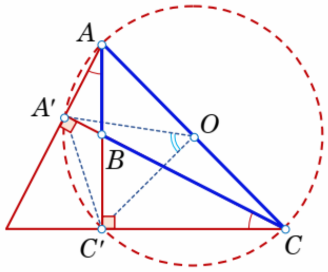


Рис. 2

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика»
заключительный этап
2018-2019 учебный год

Решения задач 11 класса

1. Ответ: 0.

Так как графики проходят через точку (1, 1), то $1 = 1 + a + b$ и $1 = 1 + c + d$, то есть $b = -a$ и $d = -c$. Следовательно, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 - a^3 + c^3 - c^3 = 0$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Приведены частные случаи, из которых получен ответ — 5 баллов. Полное решение — 25 баллов.

2. Ответ: *три.*

Приведем пример трёх последовательных полупростых чисел:

$$33 = 3 \cdot 11, \qquad 34 = 2 \cdot 17, \qquad 35 = 5 \cdot 7.$$

Если бы существовали четыре последовательных полупростых числа, то одно из них делилось бы на 4, и значит, содержало бы два простых множителя: 2 и 2. Так как полупростое является произведением двух простых чисел, то оно может равняться только 4. В таком случае одно из чисел будет равно 5 или 3, которые не полупростые.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример трёх последовательных полупростых чисел — 10 баллов. Доказано, что четырёх последовательных полупростых чисел не существует — 15 баллов.

3. *а)* **Ответ:** *например,* $f(x) = |\sin(\pi x)|$.

б) Представим $x+2019$ в виде $(x+1)+2018$ и применим первое неравенство из условия задачи, взяв в качестве x выражение $x+1$. Тогда $f((x+1)+2018) \leqslant f(x+1)$, и поскольку $f(x) \leqslant f(x+2019)$, имеем $f(x) \leqslant f(x+1)$. Подставив в это неравенство $x+1$ вместо x, получим $f(x+1) \leqslant f(x+2)$, и значит, $f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant f(x+2)$. Повторяя эти рассуждения, получим

$$f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant \ldots \leqslant f(x+2018).$$

Но по условию $f(x+2018) \leqslant f(x)$. Значит, в приведённой цепочке все неравенства обращаются в равенства, то есть $f(x) = f(x+1) = \ldots$ Другими словами, функция $f(x)$ имеет период $T = 1$.

Критерии. Правильное решение пункта *а)* — 10 баллов, пункта *б)* — 15 баллов.

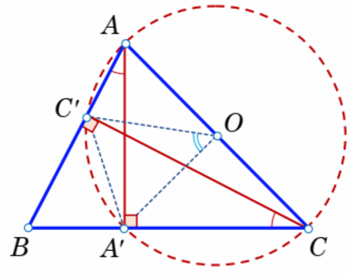


Рис. 1

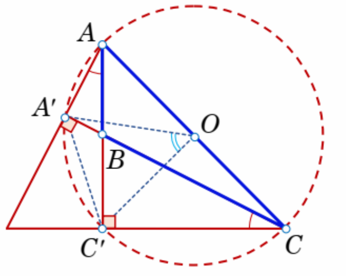


Рис. 2

4. Ответ: 60° *или* 120°.

Построим на стороне AC как на диаметре окружность, которая пройдет через точки A' и C', так как $\angle AA'C = \angle AC'C = 90^\circ$. Из условия $AC = 2 \cdot A'C'$ следует, что отрезок $A'C'$ равен радиусу построенной окружности. Значит, дуга, стягиваемая хордой $A'C'$, составляет 60°. Отсюда угол $C'CA'$, опирающийся на эту дугу, равен 30°.

Далее, если угол B — острый, то $\angle B = 90^\circ - \angle C'CB = 60^\circ$ (рис. 1); если же угол B — тупой, то $\angle CBC' = 90^\circ - \angle BCC' = 60^\circ$ (рис. 2), и значит, $\angle B = 180^\circ - \angle CBC' = 120^\circ$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Разобран только один из двух случаев — 15 баллов. Полное решение — 25 баллов.