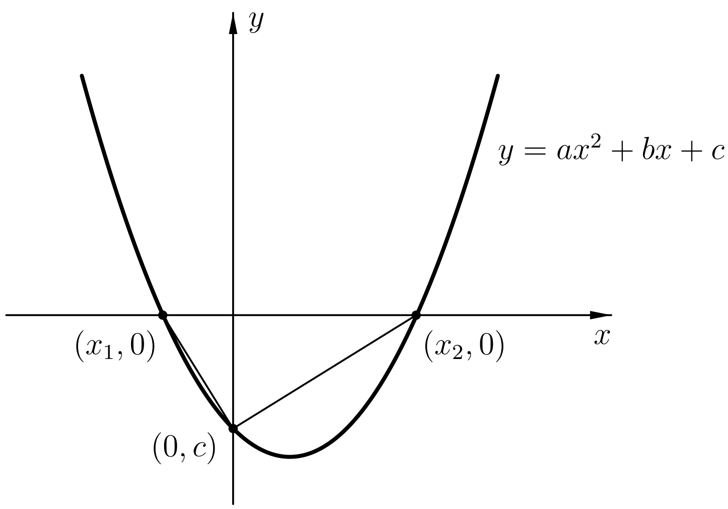
Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Заключительный этап (решения/ответы)
2019–20 учебный год
9 класс

Задача 1

График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает оси координат в трех различных точках. Докажите, что треугольник с вершинами в этих точках является прямоугольным тогда и только тогда, когда $ac = -1$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Можно считать, что $a > 0$ и ветви параболы направлены вверх. В противном случае умножим $f(x)$ на (-1), произведение ac от этого не изменится, а треугольник с вершинами в точках пересечения с осями отразится симметрично относительно оси абсцисс.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$. Ясно, что если $x_1 = x_2$, то парабола касается оси абсцисс, и тогда все три точки пересечения совпадают, поэтому треугольник из условия задачи является вырожденным. Поэтому мы будем считать, что $x_1 < x_2$. Кроме того, ясно, что точка пересечения с осью ординат имеет координаты $(0, c)$.



Найдем квадраты длин сторон треугольника. Они равны $x_1^2 + c^2$, $x_2^2 + c^2$ и $(x_1 - x_2)^2$ соответственно. Ясно, что они прямым может быть только угол при вершине $(0, c)$ (два других — острые). Поэтому этот треугольник — прямоугольный тогда и только тогда, когда

$$(x_1^2 + c^2) + (x_2^2 + c^2) = (x_2 - x_1)^2.$$

Раскрыв скобки в правой части этого равенства, получим

$$(x_1^2 + c^2) + (x_2^2 + c^2) = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 \iff -2x_1x_2 = 2c^2 \iff x_1x_2 = -c^2.$$

По теореме Виета, $x_1x_2 = -\dfrac{c}{a}$. Следовательно, треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда

$$-c^2 = \frac{c}{a} \iff ac = -1.$$

Критерии. Доказано только, что из прямоугольности треугольника следует равенство $ac = -1$ — 15 баллов.

Сразу принято, что $a > 0$ (или $a < 0$) без объяснения, почему так можно сделать — 21 балл (или 11 баллов, если применен первый критерий).

Задача 2

Найдите две последние цифры перед запятой (цифры единиц и десятков) в десятичной записи числа $\dfrac{10^{120}}{10^5+1}$.

Ответ. 99.

Решение. Заметим, что для любого x справедливо равенство $x^{120} - 1 = (x^5+1)(x^{115} - x^{110} + x^{105} - \ldots - x^{10} + x^5 - 1)$. Следовательно, $10^{120} - 1$ делится нацело на $10^5 + 1$, причем частное имеет вид $B = 10^5 \cdot k - 1$, так как в нем все слагаемые, кроме последнего, делятся на 10^5. Поэтому это частное заканчивается на цифры $\ldots 9999$.

Число $A = \dfrac{10^{120}}{10^5+1}$ можно представить в виде

$$A = \frac{10^{120}}{10^5+1} = \frac{10^{120}-1+1}{10^5+1} = \frac{10^{120}-1}{10^5+1} + \frac{1}{10^5+1} = B + \frac{1}{10^5+1}.$$

Очевидно, что второе слагаемое положительно и меньше 1, поэтому оно не влияет на цифры перед запятой (целую часть числа A). Поэтому две последние цифры перед запятой (цифры единиц и десятков) совпадают с последними двумя цифрами числа B, следовательно, равны 99.

Критерии. Только ответ — 3 балла.

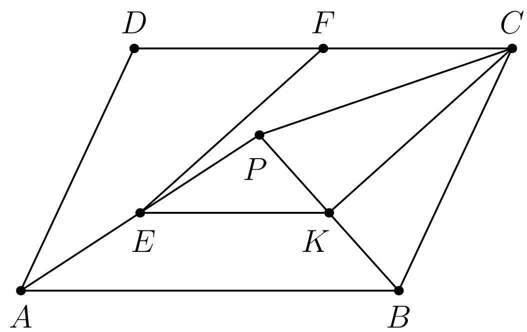
Найдено только выражение для целой части (число B) — 15 баллов.

Задача 3

Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $PC = BC$. Точка E — середина отрезка AP, а точка F — середина отрезка CD. Докажите, что прямые BP и EF перпендикулярны.

Решение. Треугольник CBP по условию равнобедренный, поэтому его медиана CK совпадает с высотой, то есть, перпендикулярна BP. Поэтому достаточно доказать, что CK параллельно EF.

В треугольнике APB отрезок EK — средняя линия, следовательно, $EK \| AB$ и $EK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$. По условию, отрезок FC тоже параллелен AB и равен $\frac{1}{2}CD$. Поэтому отрезки EK и FC равны и параллельны, откуда следует, что четырехугольник $EKCF$ — параллелограмм. Тогда $CK \| EF$.

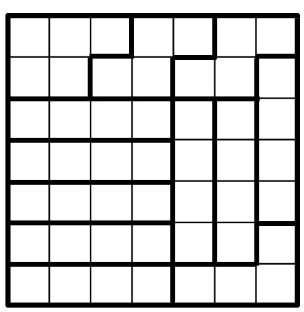


Задача 4

Дан квадрат 7×7 (сторона клетки равна 1). *Клетчатой фигуркой* назовем многоугольник, составленный из клеток. а) Можно ли его разбить на 12 клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы? б) Можно ли его разбить на 13 клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы?

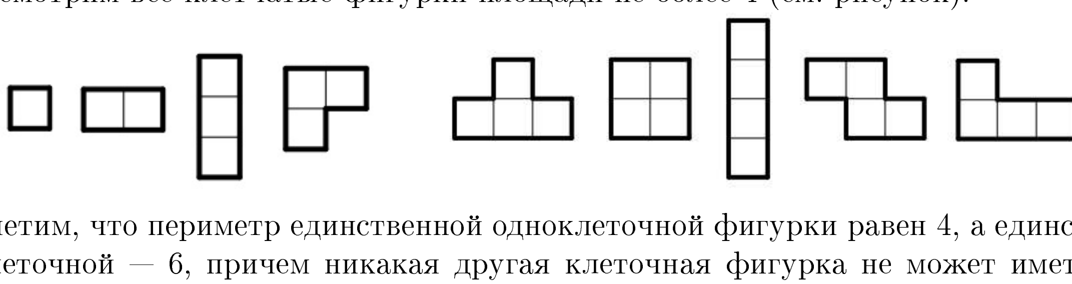
Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Примеров много, один из них изображен на рисунке.



б) Заметим, что $49/13 < 4$, поэтому среди фигурок найдется хотя бы одна площади не больше, чем 3.

Рассмотрим все клетчатые фигурки площади не более 4 (см. рисунок).



Заметим, что периметр единственной одноклеточной фигурки равен 4, а единственной двухклеточной — 6, причем никакая другая клеточная фигурка не может иметь такой маленький периметр. Периметр обеих трехклеточных фигурок (тримино) равен 8. Следовательно, пробовать разрезать квадрат 7×7 можно только на фигурки периметра 8.

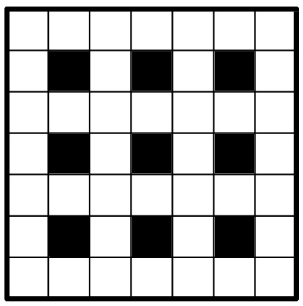
Из всех четырехклеточных фигурок (тетрамино) только квадрат 2×2 имеет периметр 8, а все остальные — периметр 10. Кроме того, понятно, что любая фигурка из более, чем

4 клеток, будет иметь периметр хотя бы 10. Следовательно, разрезать мы сможем только на тримино и квадраты 2×2. Пусть в разрезании участвует x тримино и y квадратов. Тогда

$$x + y = 13, \quad 3x + 4y = 49$$

(второе уравнение следует из сравнения площадей). Эта система уравнений имеет единственное решение $x = 3$, $y = 10$.

Осталось показать, что в квадрате 7×7 невозможно разместить 10 непересекающихся квадратов 2×2. Действительно, покрасим 9 клеток квадрата в черный цвет, как показано на рисунке:

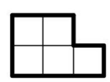


Тогда каждый квадрат 2×2, который можно разместить внутри квадрата 7×7, обязательно содержит в себе (причем ровно одну) черную клетку. Поэтому больше 9 таких квадратов разместить невозможно.

Критерии. Любой верный пример в п. а) — 10 баллов.

В п. б) показано, что должна быть фигурка площади не больше 3 — 3 балла.

В п. б) показано, что должно быть 3 тримино и 10 квадратов — 5 баллов. Эти два критерия суммируются.

Замечание. Соображения, аналогичные приведенным в решении п. б), помогают построить пример в п. а). Прямая проверка показывает, что единственная пятиклеточная фигурка (пентамино) периметра 10 — это , а периметр всех остальных больше 10. Следовательно, резать нужно на фигурки периметра 10. Аналогичная система уравнений $x + y = 12$, $4x + 5y = 49$ имеет решение $x = 11$, $y = 1$. Поэтому нужно задействовать ровно одну фигурку пентамино, и 11 тетрамино, причем нельзя использовать квадраты 2×2.