Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Физика»
заключительный этап (ответы)
2018-2019 учебный год
9 класс

Задача 9.1.1

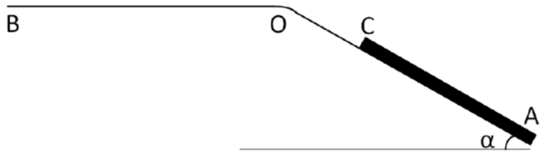


Рис. 1

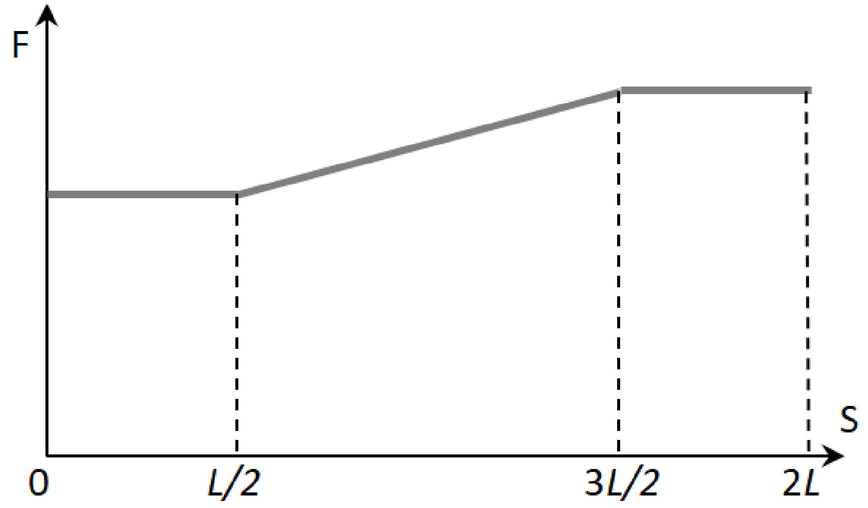
Найти минимальную работу, которую нужно совершить для перемещения одного из концов каната массой m и длины L из точки С в точку В, прикладывая силу к одному из концов (см. рис 1). Расстояние АО и ОВ равно $1.5L$. В точке О имеется закругление, радиус которого много больше толщины каната, но при этом пренебрежимо мал по сравнению с L. Коэффициент трения везде одинаков и равен μ <1, угол между наклонной поверхностью и горизонталью равен α. (25 баллов)

Решение.

Рассмотрим вариант решения задачи без отрыва каната от поверхности. В случае постоянного угла между силой и перемещением механическая работа пропорциональна площади под графиком силы от перемещения. Коэффициент пропорциональности равен косинусу угла между силой и перемещением. Будем тянуть канат вдоль поверхности за верхний конец. Приложенная при этом сила **F** равна по модулю и противоположена по направлению сумме силы трения и проекции силы тяжести на наклонную плоскость. Обе эти силы антипараллельны перемещению. Приведем выражение для модуля приложенной силы в зависимости от пройденного верхним концом каната пути.

$$\begin{cases} F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha, \qquad S < \dfrac{L}{2} \\ F = \dfrac{1}{L}\left(\mu mg\left(S - \dfrac{L}{2}\right) + \left(\dfrac{3L}{2} - S\right)(mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)\right), \qquad \dfrac{L}{2} < S < \dfrac{3L}{2} \\ F = \mu mg, \qquad S > \dfrac{3L}{2} \end{cases}$$

График этой функции имеет вид



Площадь под графиком можно разбить на 2 прямоугольника и трапецию:

$$A = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)\frac{L}{2} + \mu mg\frac{L}{2} + \frac{L}{2}(mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + \mu mg)$$

$$A = mgL(\sin\alpha + \mu(\cos\alpha + 1))$$

Решение с отрывом от поверхности мы рассматривать здесь не будем, отметим только что при соблюдении условия $\mu > \mathrm{tg}\alpha$ можно практически полностью нивелировать расход энергии на преодоление силы трения. Решения с отрывом от плоскости рассматриваются индивидуально вне нижеприведенных критериев.

Критерии оценивания:

Записаны выражения для силы трения на горизонтальной поверхности.	2
Записана сила трения на наклонной поверхности.	3
Записано выражение для проекции силы тяжести либо изменения потенциальной энергии.	3
Записано выражение для малого приращения работы.	2
Предложен метод вычисления работы с помощью графика F(S) либо другой верный метод.	5
а) Проведен безошибочный расчет работы без отрыва каната от поверхности. б) Проанализирована возможность отрыва от плоскости. Проведены точные либо приблизительные расчеты работы.	10

Задача 9.1.2

Два бруска одинакового объема V и плотностями $\rho_1<\rho_0<\rho_2$ (ρ_0 - плотность воды) скреплены пружиной. На столе сжатие пружины равно x_1, найти деформацию пружины, если эта система будет плавать в воде (см. рис.2) и объем погруженной части верхнего бруска. (20 баллов)

Решение.

В первом положении пружина сжата по причине того, что на нее действует сила тяжести со стороны верхнего бруска. То есть $kx_1 = m_1 g = \rho_1 V g$. В воде нужно рассмотреть второй закон Ньютона для обоих дел. Поскольку более тяжелый брусок тонет, то сила упругости на него будет действовать наверх, а на верхнее тело вниз. Поэтому можно будет записать два равенства сил:

$$\rho_1 V g + kx_2 = \rho_0 g V_1$$

$$kx_2 + \rho g V = \rho_2 g V$$

$V_1 -$ погруженная часть объема первого (верхнего) бруска. Далее из $kx_1 = \rho_1 g V$ и уравнений получаем:

$$\frac{\rho_1 x_2}{x_1} = (\rho_2 - \rho_0) \rightarrow x_2 = x_1 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_1}$$

$$V_1 = \frac{(\rho_1 + \rho_2 - \rho_0)V}{\rho_0}$$

Критерии оценивания

Записано равенство сил для брусков на столе.	4
Записаны уравнения сил для брусков в жидкости.	4
Представлено выражение для деформации пружины в жидкости.	6
Представлено выражение для объема погруженной части верхнего бруска.	6

Задача 9.1.3

Пользуясь данными о размерах планет и давлении атмосферы у поверхности, вычислить массы атмосфер Венеры, Земли и Марса. Средний радиус R Венеры 6052 км, Земли – 6371 км, Марса - 3390 км. Давление у поверхности Венеры в 92 раза больше земного, давление у поверхности Марса - в 160 раз меньше земного. Атмосферное давление на Земле $P_з$ = 10^5 Па. (15 баллов)

Решение.

Давление у поверхности Земли $P_з$ = 10^5 Па. Такое же давление на Земле создают столб воды высотой около 10 м или 750 мм ртутного столба. Площадь поверхности шара (планеты) S=4πR^2, где R - радиус шара (планеты). Сила давления атмосферы на поверхность планеты F=PS, которая эквивалентна весу атмосферы $F = Mg = PS$. Масса атмосферы $M = F/g = P4\pi R^2/g$, где $g = GM_п/R^2$ – ускорение свободного падения, которое хорошо известно для Земли, $M_п$ – масса планеты. К сожалению, в результате ошибки, в задаче недостаточно данных для строгого расчета ускорения свободного падания на Венере и Марсе. Можно получить приемлемые оценки веса атмосферы, предполагая равную плотность планет земной группы, однако по решению методической комиссии для получения полного балла за эту задачу достаточно было рассчитать вес атмосферы Земли:

$M_{\text{АЗ}} = P_{\text{з}} 4\pi R_{\text{з}}^2 / g_{\text{з}} = 10^5$ Па$\cdot$ $4\pi\cdot$ (6371 км)^2/9.8м/с^2= $5.2\cdot10^{18}$ кг.

Масса атмосферы Венеры равна

$M_{\text{АВ}} = P_{\text{В}} 4\pi R_{\text{В}}^2 / g_{\text{В}} = 92\cdot10^5$ Па $\cdot$ $4\pi\cdot$ (6052 км)^2/8.87м/с^2= $4.8\cdot10^{20}$ кг.

Масса атмосферы Марса равна

$M_{\text{АМ}} = P_{\text{М}} 4\pi R_{\text{М}}^2 / g_{\text{М}}$= ($10^5$ Па/160)$\cdot$ $4\pi\cdot$ (3390 км)^2/3.71м/с^2= $2.4\cdot10^{16}$ кг.

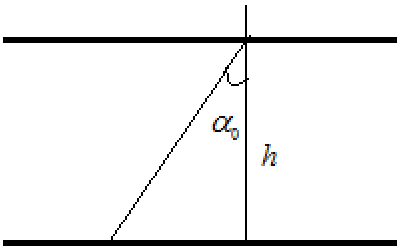
Критерии оценивания

Приведена формула для площади поверхности сферы (планеты).	2
Приведена формула для силы тяжести атмосферы планеты через площадь её поверхности и давление атмосферы на ней.	5
Получена формула для массы атмосферы.	5
Найдена масса атмосферы Земли.	3

Задача 9.1.4

В водоем на некоторую глубину помещают источник белого света. Показатель преломления воды для красных лучей $n_{кр} = 1.328$, для фиолетовых $n_{ф} = 1.335$. Вычислите отношение радиусов кругов, в пределах которых возможен выход красных и фиолетовых лучей в воздух. (15 баллов)

Решение.



Граница выхода лучей в ввоздух определяется углом полного внутреннего отражения α_0 (см. рис). По закону Снеллиуса, $\sin\alpha_0 = 1/n$. Радиус круга $R = htg\alpha_0$.

Подставляя одно уравнение в другое, получаем $R = h/\sqrt{n^2-1}$. Следовательно, отношение кругов $R_{\text{кр}}/R_{\text{ф}} = \sqrt{(n_{\text{ф}}^2-1)/(n_{\text{кр}}^2-1)}$ = 1.012. $R_{ф}/R_{кр}$ = 0.988

Критерии оценивания

Верно записано выражения для угла полного внуреннего отражения.	5
Верно записано выражение для радиуса круга.	2
Верно записано выпадение для отношение радиусов кругов.	5
Получен правильный ответ.	3

Задача 9.1.5

Однажды у Карлсона, совершавшего дальний перелёт, заглох моторчик и Карлсон стал падать вертикально вниз с постоянной скоростью v_1=4 м/с. После серьёзного ремонта моторчик опять стал развивать ту же самую постоянную силу тяги и Карлсон совершал вертикальный взлёт со скоростью v_2=2 м/с. С какой постоянной скоростью он двигался в горизонтальном направлении? **Указание:** силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости Карлсона; Карлсон, будучи в меру упитанным, одинаково обтекаем во всех направлениях. (25 баллов)

Решение.

При вертикальном падении $\mathrm{mg} = kv_1^2$, откуда $k = \mathrm{mg}/v_1^2$. При вертикальном взлёте сила тяги F равна сумме силы тяжести и силы сопротивления воздуха:

$$F = \mathrm{mg} + kv_2^2 = \mathrm{mg}[1+(v_2/v_1)^2\ ].\ (1)$$

При горизонтальном полёте сила тяги компенсирует векторную сумму сил тяжести и сопротивления воздуха, в соответствии с чем

$$F^2 = (\mathrm{mg})^2 + [kv_3^2\ ]^2 = (\mathrm{mg})^2\{1 + (v_3/v_1)^4\}.\ (2)$$

С помощью формул (1) и (2) получим $v_3=[2v_1^2v_2^2 + v_2^4\ ]^{1/4}$

Численное значение $v_3=2(3)^{1/2}$ м/с = 3.464 м/с.

Критерии оценивания

Определен коэффициент сопротивления воздуха.	3
Записано уравнение для силы тяги при вертикальном взлёте как сумме силы тяжести и силы сопротивления воздуха.	6
Получено уравнение при горизонтальном полёте: сила тяги компенсирует векторную сумму сил тяжести и сопротивления воздуха.	7
Получено правильное аналитическое выражение для постоянной скорости при движении в горизонтальном направлении.	6
Получено правильное численное значение для постоянной скорости при движении в горизонтальном направлении.	3

Задача 9.2.1

Снаряд разлетелся в середине большой комнаты на 3 осколка с одинаковыми массами и скоростями. Один осколок продолжил движение в том же направлении, два других разлетелись в вертикальной плоскости под углом 60 градусов друг к другу. Осколок летевший прямо ударился в стену через время t_1, а время между приземлением двух других осколков равно τ. Когда один из осколков коснулся потолка, скорость его была направлена горизонтально. Все удары упругие. Найти длину и высоту комнаты. (25 баллов)

Решение.

Снаряд, полетевший вперед ударится в стену, и тем самым за время t_1 преодолеет половину длины комнаты. Снаряд полетевший вверх должен коснуться потолка, это значит это будет верхняя точка его траектории, как тела, брошенного под углом к горизонту.

Запишем длину комнаты как L, а высоту комнаты как H, тогда:

$$\frac{L}{2} = v_0 t_1$$

$$\frac{H}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Угол, под которым разлетаются осколки – 60^0. Так как снаряд до разрыва летел горизонтально, то суммарный импульс по вертикали у осколков должен равняться нулю. Тогда угол относительно горизонта у осколков имеющих вертикальную компоненту скорости будет равен 30^0.

Время движения тела, брошенного под углом к горизонту – это и есть время отставания осколка, полетевшего вверх, от осколка, отлетевшего вниз.

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \to v_0 = \frac{g\tau}{2 \sin \alpha}$$

Полученное значение v_0 подставляем в уравнения для высоты и длины комнаты.

Имея ввиду, что $\sin \alpha = \sin 30^0$, получаем

$$L = \frac{g\tau t_1}{\sin \alpha} = 2g\tau t_1$$

$$H = \frac{g\tau^2}{4}$$

Критерии оценивания

Получены выражения для длины и высоты комнаты через скорости осколков.	5
Правильно определены углы между скоростями осколков и горизонталью в момент разлета.	5
Верно определено время отставания τ осколков друг от друга.	7
Получено правильное конечное значение для дальности и высоты комнаты.	8

Задача 9.2.2

Инженер Левшов изобрел машину, способную двигаться с постоянной скоростью V = 36 км/ч в вертикальном направлении, если стартовать с экватора. В машину встроена система безопасности, которая остановит её, если перестанет ощущать притяжение к Земле. Через сколько времени это произойдет? Радиус Земли R= 6400 км. (20 баллов)

Решение.

Отрываясь от поверхности Земли такая машина будет продолжать двигаться со скоростью $v-$ линейной скоростью вращения Земли вокруг своей оси. Её выражение приблизительно равно:

$$v = \frac{2\pi R}{T_{\text{сут}}} = \frac{2\pi R}{24\text{ ч}}$$

В таком случае, машина перестанет чувствовать притяжение Земли тогда, когда на высоте h от поверхности центробежные силы будут скомпенсированы с силой гравитации.

$$G \cdot \frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$$

Тогда высота будет равна

$$h = G \cdot \frac{M}{v^2} - R = G \cdot \frac{MT^2}{4\pi^2 R^2} - R$$

Так как $g = G \cdot \frac{M}{R^2}$, то в итоге получаем:

$$h = \frac{gT^2}{4\pi^2} - R = 1.9 \cdot 10^9\text{м}$$

Тогда время, через которое машина остановится:

$$t = \frac{h}{V} \cong 6\text{ лет}$$

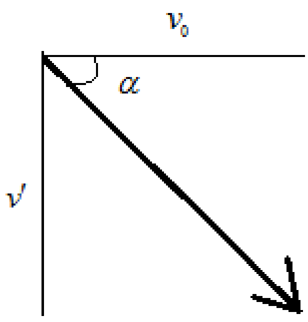
Критерии оценивания

Учтена скорость вращения Земли и правильно записано её выражение.	6
Записано условие, при котором машина останавливается.	6
Рассчитано расстояние от Земли на котором произойдет выключение, и время через которое это произойдет.	8

Задача 9.2.3

С самолета, летящего на высоте h_0 со скоростью v_0, на какой высоте его скорость будет направлена под углом α к горизонту? Трение не учитывать. (15 баллов)

Решение.



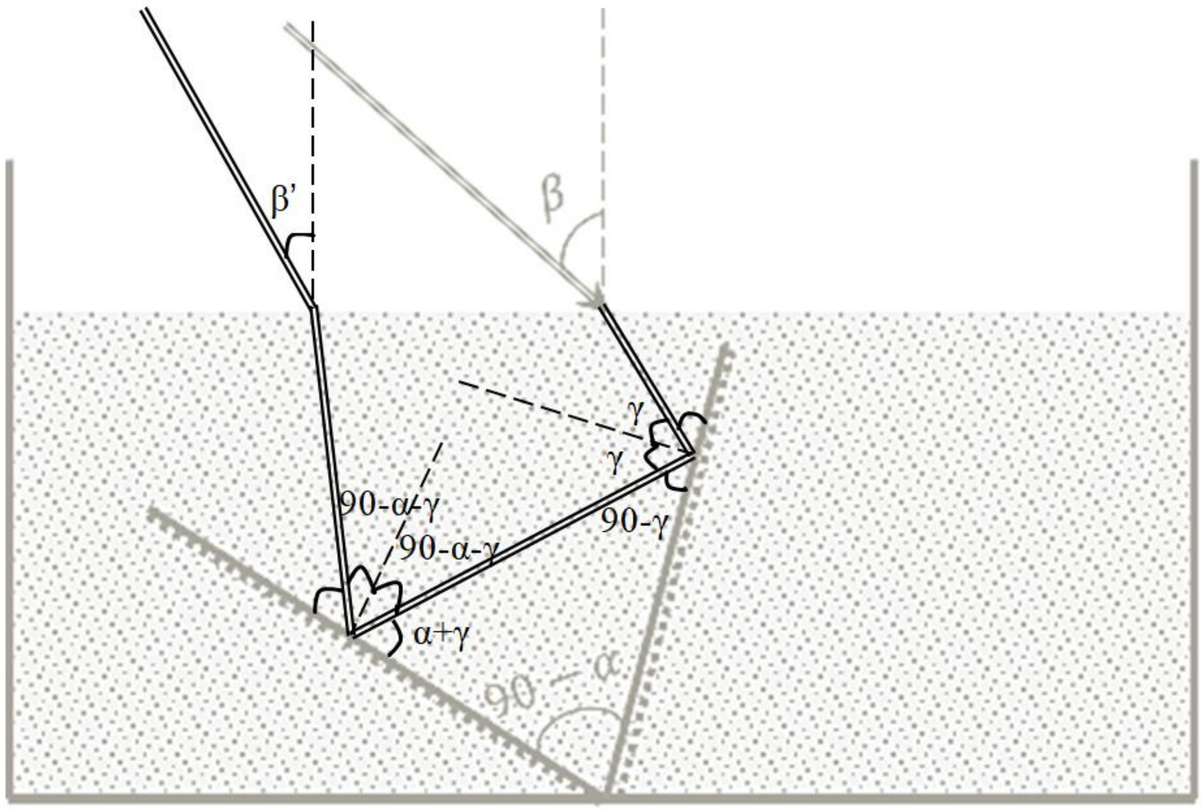
Горизонтальная составляющая скорости при падении всегда будет равна v_0, вертикальная $v' = gt$. Из рисунка видно, что $tg\alpha = \frac{v'}{v_0} = \frac{gt}{v_0}$. Следовательно, $t = \frac{v_0 tg\alpha}{g}$. Искомая высота $h = h_0 - \frac{gt^2}{2}$. Подставляя сюда выражение для *t*, получаем $h = h_0 - \frac{v_0^2 tg^2\alpha}{2g}$.

Критерии оценивания

Верно определены составляющие скорости.	3
Найдено выражение для тангенса угла наклона.	6
Получена зависимость высоты от времени.	3
Получен правильный ответ.	3

Задача 9.2.4

На дне сосуда с водой расположены два зеркала под углом 90 - α, α - малый угол, может быть как положительным так и отрицательным. На поверхность воды падает лазерный луч под углом падения β и, преломляясь, попадает на первое зеркало, а затем на второе (см. рисунок 2). Определите угол между вошедшим в воду и вышедшим из воды лучем. Показатель преломления воды n. Указание: возможно будет полезна формула sin(α+β) = sin(α)cos(β) + sin(β)cos(α); для малого α в первом приближении sin(α)≈α, cos(α)≈1. (15 баллов)



Решение.

Рассматривая последовательное отражение от двух зеркал легко получить (см. рисунок), что угол между падающим на первое зеркало и отраженным от второго равен $\Delta = 2\gamma + 2(90 - \alpha - \gamma) = 180 - 2\alpha$. Таким образом, угол между преломленным на границе воздух-вода θ и углом падения на границу вода-воздух θ’ равен 2α. Запишем закон Снелиуса:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\theta} = n = \frac{\sin\beta'}{\sin(\theta - 2\alpha)}$$

Данное уравнение дает формальное решение задачи, но для малого α ответ можно упростить. Используя формулу для разности синусов и представляя $\beta' = \beta - \varepsilon$ получаем:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\theta} = \frac{\sin\beta - \varepsilon\cos\beta}{\sin\theta - 2\alpha\cos\theta}$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha\cos\theta}{\cos\beta} n = \frac{2\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\beta}}{\cos\beta}$$

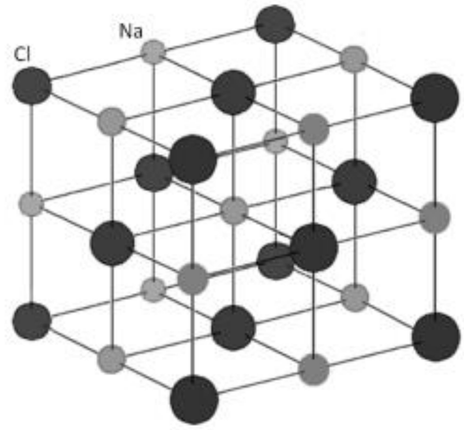
Отметим, что при отрицательном α возможна ситуация, при которой луч не выйдет из воды из-за полного внутреннего отражения.

Критерии оценивания:

Правильно построен ход луча.	3
Рассчитан угол падения на границу вода воздух через угол преломления на границе воздух – вода.	7
Получено формальное решение.	3
Получено упрощенное выражение с учетом малости углов.	2

Задача 9.2.5.

Согласно закону Дюлонга и Пти теплоемкость большинства твердых тел (при не очень низких температурах) на 1 атом составляет приблизительно 3k, где $k=1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана. Рассчитайте плотность и оцените удельную теплоемкость кристаллической поваренной соли, если расстояние между соседними атомами хлора равно a = 0,5639 нм (см. рисунок 1). Молярная масса натрия 22,99 г/моль, хлора 35,45 г/моль. (25 баллов)



Решение.

Кристалл соли может быть составлен из ячеек, содержащих 4 атома хлора и 4 атома натрия в вершинах куба, путем трансляций и отражений. Плотность такой ячейки совпадает с плотностью всего кристалла. Чтобы корректно рассчитать массу ячейки нужно подсчитать скольким ячейкам принадлежит каждый атом. Для кубического кристалла это число равно 8, это легко видеть на рисунке. Объем ячейки равен $(a/2)^3$. (Условия задачи в данном случае неоднозначны, под соседними также можно понимать диагональные атомы хлора. В этом случае объем равен $(a/\sqrt{2})^3$. Оба варианта будут считаться правильными.) Принимая во внимание, что масса атома равна его молярной массе (в кг/моль) деленное на число Авогадро $N_A = 6\cdot 10^{-23}$, плотность равна:

$$\rho = \frac{(4M_{Cl} + 4M_{Na})}{8N_A(a/2)^3} = 2173\ \text{кг/м}^3;$$

Для нахождения молярной теплоемкости достаточно умножить $2\cdot3k$ (2 атома на молекулу) на число N_A. Учитывая очевидную связь между молярной теплоемкостью получаем:

$$C = \frac{6kN_A}{M_{NaCl}} = 850\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

Критерии оценивания:

Описана идея расчета плотности как отношение массы ячейки к ее объему.	5
Правильно подсчитано количество атомов на ячейку.	5
Получен верный численный ответ / выражение через число Авогадро / в а.е.м./м^3	5
Вычислена молярная теплоемкость.	3
Указана связь между молярной и удельной теплоемкостью.	3
Приведен верный численный ответ для теплоемкости, либо ответ выражен через число Авогадро.	4