Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап (разбор задач)
2020-2021 учебный год
9 класс

Задача 9.1 (12 б.) Скорость колес.

Машина едет по плоской круговой траектории с постоянной скоростью таким образом, что внутреннее колесо движется по окружности радиусом R = 10 м. Расстояние между левым и правым колесом d = 1.75 м. Найдите отношение угловых скоростей внутреннего и внешнего передних колес. Колеса не проскальзывают.

Возможное решение:

За один полный круг ось внутреннего колеса проходит путь $2\pi R$, внешнее колесо $2\pi(R+d)$. Такой же путь проходит точка на «ободе» колеса в системе отсчета, связанной с осью, причем с той же линейной скоростью, что и центр колеса. Тогда скорости (1-внешнего и 2- внутреннего колеса) будут удовлетворять соотношению:

$$v_1 = \frac{2\pi(R+d)}{T} = \omega_1 r$$

$$v_2 = \frac{2\pi R}{T} = \omega_2 r$$

Деля одно выражение на другое получаем, что

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R}{R+d} \approx 0.851$$

Критерии оценивания:

Найдена связь между скоростью оси колеса и скоростью шины	4
Скорость точки на «ободе» выражена через путь, пройденный колесом	4
Получен аналитический ответ (не обязательно, если численный верный)	3
Получен численный ответ	1

Задача 9.2 (17 б.) Баллистическая траектория.

Тело брошено под углом к горизонту и движется в плоскости xy. Вектор ускорения свободного падения направлен против оси y. В таблице приведены координаты тела в различные моменты времени. Трением о воздух можно пренебречь. Определить начальную скорость и угол между начальной скоростью и горизонталью. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

x, м	0	0.30	0.60	0.9	1.2	1.5
y, м	0	0.35	0.60	0.75	0.8	0.75

Возможное решение:

Можно заметить, что предпоследняя точка (1.2; 0.8) соответствует максимуму баллистической траектории тела. Действительно, парабола симметрична относительно прямой $x = x_m$ и точка максимума должна лежать точно между (0.9; 0.75) и (1.5; 0.75). Тогда можно воспользоваться формулами для дальности полета и высоты подъема тела*.

$$2.4 = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$0.8 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{16}{25}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{v_0^2 16}{500}$$

$$v_0 = 5 \text{ м/с}$$

*Эти формулы легко вывести из законов движения тела по оси x и y.

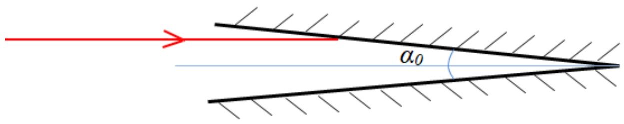
Ответ: 5 м/с, $\arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$;

Критерии оценивания:

Записана система уравнений для скорости и угла между начальной скоростью и горизонталью	7
Найдена какая-либо тригонометрическая функция угла между начальной скоростью и горизонталью	5
Найдена начальная скорость тела	5

Задача 9.3 (23 б.) Многократное отражение.

Два бесконечных плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha_0 << 1$. Параллельно биссектрисе линейного угла* данного двугранного угла, на одно из зеркал падает луч лазера. Оцените количество отражений луча в зеркалах, после которых луч «выйдет» из системы.



*Угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, проведенными в его гранях из одной точки ребра, называется линейным углом двугранного угла.

Возможное решение:

Будем следить за углом между направлением к двугранному углу по биссектрисе – осью x и лучом. Пусть угол между лучом и осью x равен φ, тогда после отражения угол между осью x и лучом будет равен $\varphi' = \varphi + 2\alpha$, $\alpha = \alpha_0/2$ (см. Рис. 1). Отражение от верхнего зеркала можно получить, отразив Рис.1 от оси x. Зависимость $\varphi'(\varphi)$ будет иметь тот же вид.

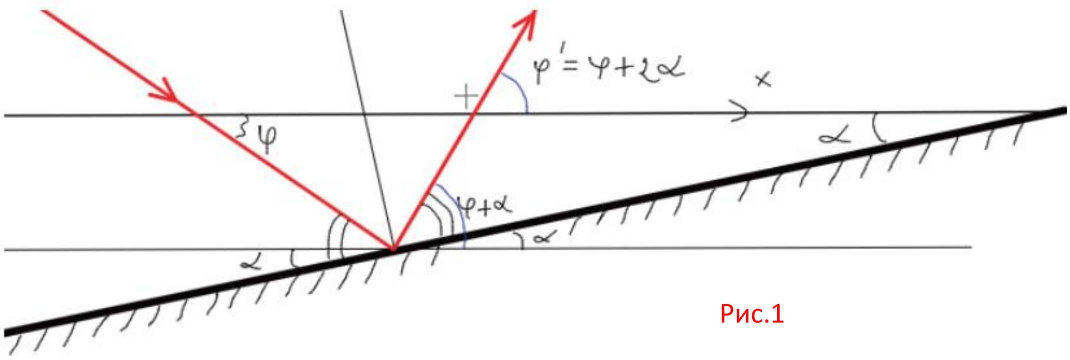


Рис.1

Таким образом, угол между лучом и осью x увеличивается и в какой-то момент луч сменит проекцию на ось x на обратную. Рассмотрим отдельно этот случай (см. Рис.2)*. Зависимость $\varphi'(\varphi)$ в этом случае имеет прежний вид.

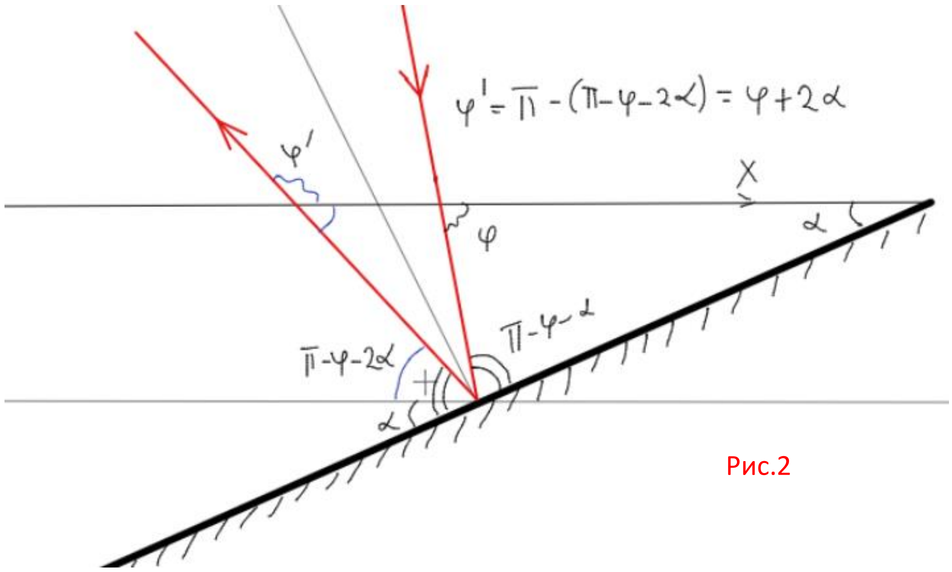


Рис.2

Движение от угла можно не рассматривать отдельно: обратим направление стрелки на Рис.1 и будем следить (на Рис.1) за углами π – φ' и π – φ соответственно. Таким образом, во всем диапазоне углов φ имеет место соотношение φ' = φ + 2α. Учитываем, что изначально φ = 0, φ' = $k\alpha_0$, где k – число отражений. Чтобы луч вышел из системы, φ' должен удовлетворять следующему неравенству

$$\pi - \frac{\alpha_0}{2} \le k\alpha_0 \le \pi + \frac{\alpha_0}{2}$$

Решением этого неравенства является ближайшее целое к π/α_0 значение k, за исключением случая полуцелого π/α_0. В этом случае возможны два ответа, отличающиеся на 1. Учитывая малость угла α_0 ответ можно записать как π/α_0, или π/α_0, округленное до целого.

Ответ: округленное до целого π/α_0.

* Учитывая малость угла α_0, на данном этапе можно ограничится упрощенными соображениями.

Критерии оценивания:

Найдено отклонение луча при отражении от зеркала	5
Найдено направление луча после многократного отражения	8
Рассмотрены все необходимые случаи	4
Записано условие выхода луча из системы	3
Получен ответ	3

Задача 9.4 (23 б.) Нагрев провода.

По длинной медной жиле (проводу) сечением $s = 1.5$ мм^2 течет ток $I = 16$ А. Провод (жила) покрыт ПВХ изоляцией толщиной $b = 2$ мм с коэффициентом теплопроводности $\kappa = 0.12$ Вт/(м·К). Теплопроводность меди много больше теплопроводности изоляции.

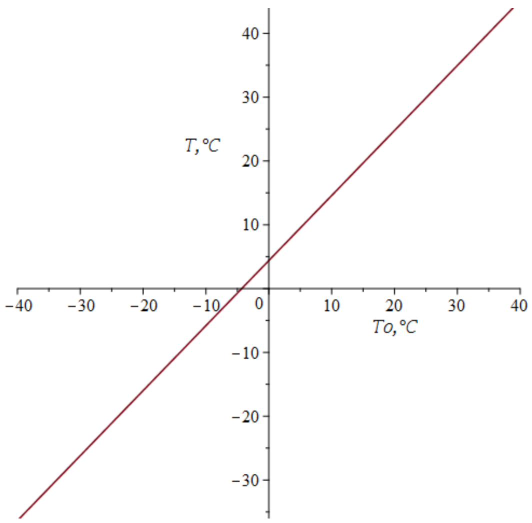
Найти температуру провода (жилы) T как функцию температуры окружающей среды T_O. Построить график зависимости температуры провода (жилы) T от температуры окружающей среды в диапазоне T_O от -40°C до +40°C. Найти температуру провода (жилы) T как функцию величины тока I. Построить при температуре окружающей среды $T_O = 20$°C график зависимости температуры жилы при величинах токов от 16 А до 25 А.

Удельное сопротивление меди при $T_{20} = 20$°C составляет $\rho_{20} = 0.0175$ Ом·мм^2/м. Тепловой коэффициент сопротивления меди $\alpha = 0.004$ °C^{-1}, т.е. удельное сопротивление меди меняется с температурой по закону $\rho = \rho_{20}\,[1+ \alpha\,(T - T_{20})]$.

Указание: Принять во внимание, что полная мощность теплопередачи может быть вычислена по формуле $P = \frac{\kappa S \Delta T}{d}$, где κ – коэффициент теплопроводности материала. В данном случае речь идёт о стационарном потоке тепла от одной грани параллелепипеда площадью S к другой, расстояние между гранями равно d, разность температур ΔT. Поток тепла для простоты можно считать по сечению в середине слоя изоляции. Теплообменом через торцы провода пренебречь.

Возможное решение:

Мощность (теплота), выделяемая за счет сопротивления равна $P = I^2 R = I^2 \rho \dfrac{L}{s}$, где L – длина отрезка провода. В тоже время, эта теплота переносится изоляцией в окружающую среду по формуле $\kappa \dfrac{S_И\left(T - T_O\right)}{b}$, где T – температура провода (жилы). Площадь изоляции выбранного отрезка провода равна $S_И = 2\pi\left(a + \dfrac{b}{2}\right)L$, где $a = \sqrt{\dfrac{s}{\pi}}$ - радиус медной жилы. Приравнивая теплоту (мощность), выделяемую за счет сопротивления, теплоте в единицу времени, переносимой изоляцией в окружающую среду, и сокращая L слева и справа, получаем уравнение:



$$I^2 \rho_{20}\left[1 + \alpha\left(T - T_{20}\right)\right]\frac{1}{s} = 2\pi\frac{\kappa}{b}\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(T - T_O\right) \qquad (1)$$

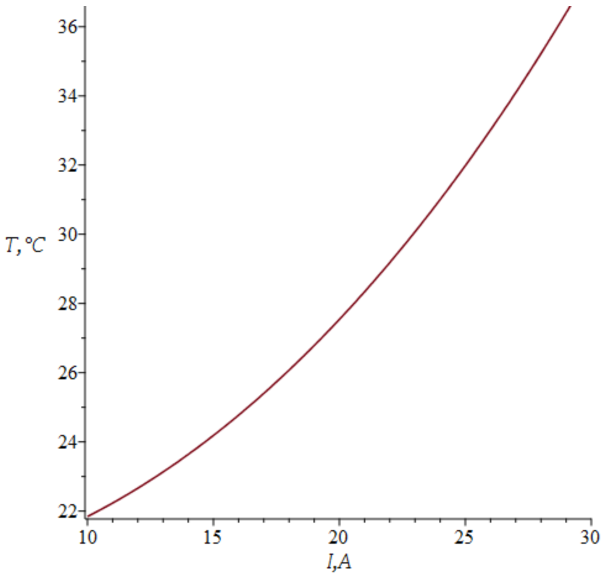
Преобразовывая полученное уравнение и выделяя T, получим

$$T = \frac{I^2\rho_{20}(1-\alpha T_{20}) + T_O s\kappa\left(\pi + 2\sqrt{\pi s}/b\right)}{-I^2\rho_{20}\alpha + s\kappa\left(\pi + 2\sqrt{\pi s}/b\right)} \qquad (2)$$

Подставляя численные значения, при $I = 16$ А получим функцию

$$T(T_O) \approx 4.12 + 1.02 \times T_O \ \text{°C}, \qquad (3)$$

т.е. график будет линейным и температура жилы, по которой течет ток, всегда будет выше, и будет возрастать чуть быстрее, чем возрастает температура окружающей среды.



Подставляя численные значения для получения зависимости температуры жилы от величины тока, при $T_O = 20$°С получим функцию:

$$T(I) = \frac{0.0161 \times I^2 + 18.36}{0.938 - I^2 \times 7 \times 10^{-5}} \ {}^\circ\text{C}, \qquad (4)$$

откуда при токе $I = 25$ А температура жилы будет 30.5 °С, т.е. на 10.5 °С выше температуры окружающей среды и расти при увеличении величины тока быстрее, чем квадратично.

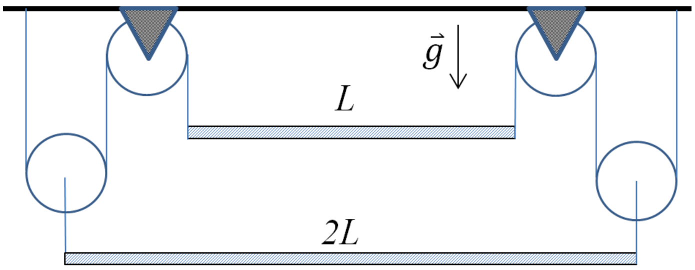
Критерии оценивания:

Записано уравнение, связывающее теплоту (мощность), выделяемую за счет сопротивления, с теплотой, переносимой изоляцией в окружающую среду	3
Найдена температура провода (жилы) как функция температуры окружающей среды	6
Построен график зависимости температуры провода (жилы) как функция температуры окружающей среды	4
Найдена температура провода (жилы) как функция величины тока	6
Построен график зависимости температуры провода (жилы) как функция величины тока	4

Задача 9.5 (25 б.) Нестандартный баланс.

Две однородные гладкие доски длиной L и $2L$, подвешенные с помощью системы идеальных* нитей и блоков (см. Рис), изначально находятся в равновесии в горизонтальном положении. Масса верхней доски M. На нижнюю доску закрепляют небольшой груз массой M на расстоянии $a = 2L/3$ от левого края. На каком расстоянии от левого края нужно поместить (закрепить) на верхнюю доску груз массы $m = M/6$, чтобы доски могли находиться в состоянии равновесия в горизонтальном положении?

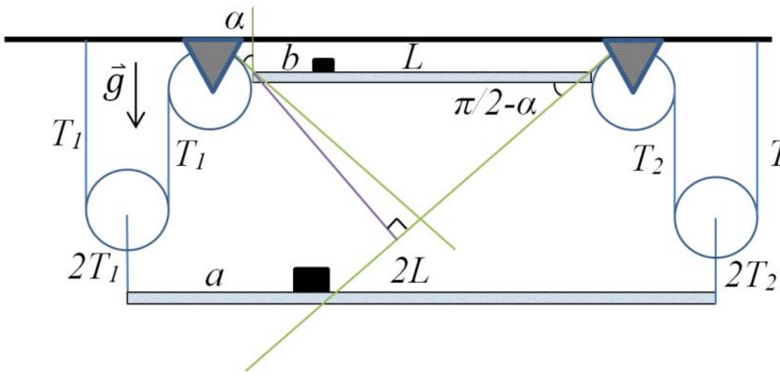
*Под идеальными нитями здесь подразумеваются гибкие невесомые и нерастяжимые нити. Под идеальными блоками – невесомые блоки, способные вращаться без трения.



Возможное решение:

Рассматривая равновесное состояние без грузов легко установить массу нижней й доски M₂. Баланс сил, действующих на первую доску, приводит к равенству

$$2T = Mg$$



Для идеальных подвижных блоков мы легко находим силу натяжение нитей, удерживающих нижнюю доску (см. Рис). Из баланса сил для нижней доски находим

$$4T = 2Mg = M_2 g;\ M_2 = 2M$$

Рассмотрим нижнюю доску после размещения грузов. Запишем проекцию баланса сил на вертикальную ось и баланс моментов сил относительно точки закрепления левой нити (см. Рис)

$$2T_1 + 2T_2 = 2Mg + 6mg$$

$$4LT_2 = 2MLg + 6mga$$

$$T_2 = \frac{Mg}{2} + mg = \frac{2Mg}{3}$$

$$T_1 = \frac{Mg}{2} + 2mg = \frac{5Mg}{6}$$

Рассмотрим теперь верхнюю доску. Очевидно что, если нити вертикальны, баланс сил для верхней доски не достигается. Рассмотрим более общий случай (см. Рис) и запишем систему из проекции баланса сил на вертикальную ось и баланс моментов сил относительно левой точки закрепления нити

$$(T_1 + T_2)\cos\alpha = (M + m)g$$

$$LT_2 \cos\alpha = \frac{MLg}{2} + mgb$$

$$b = \frac{LT_2(M+m)}{(M+3m)mg} - \frac{ML}{2m} = \frac{L\left(\frac{Mg}{2} + mg\right)(M+m)}{(M+3m)mg} - \frac{ML}{2m}$$

$$b = \frac{L\left(\frac{Mg}{2} + mg\right)7}{9mg} - 3L \ = \ \frac{L}{9}$$

Критерии оценивания:

Определены соотношения между силами натяжения нитей для верхней и нижней доски	1
Найдена масса нижней доски	2
Записано условие баланса сил и моментов для нижней доски	3
Найдены T_1 и T_2	4
Идея об отклонении нитей от вертикали (желательно рисунок)	5
Записано условие баланса сил и моментов для верхней доски	5
Найдено положение груза	5