Задание 1

Ответ – 45 рублей.

Заметим, что изначально цена была ≥ 10, т.к. в ней было ≥ 2 цифры, т.к. продавец ~~поменял цифры местами~~ переставил цифры руб., но < 100. Тогда изначальная цена – двузначное число рублей. Пусть изначальная цена $= \overline{ab}$ рублей (a, b – цифры), а стала $\overline{ba}$ рублей. $\overline{ab} = 10a + b$; $\overline{ba} = 10b + a$.

Тогда $\overline{ab} \cdot 1{,}2 = \overline{ba} \Rightarrow \overline{ab} \cdot 12 = \overline{ba} \cdot 10 = 120a + 12b =$

$= 100b + 10a \Rightarrow (100b + 10a) - (120a + 12b) = 88b - 110a = 0$,

$88b = 110a$

поделим на 22, получим $4b - 5a = 0$ и $5a = 4b$.

Поскольку $a \neq 0$, т.к. a – первая цифра в числе, $b \neq 0$ и $4b \vdots 5 \Rightarrow b \vdots 5$, т.к. 5 и 4 взаимнопросты. Поскольку $0 < b < 10$, то $b = 5$ и $a = 4$. Тогда $\overline{ab} = 45$ и $\overline{ba} = 54$,

45 подходит, т.к. $54 = 45 + 9 = 45 \cdot 1{,}2$. Значит, ответ – 45 рублей.

Задание 2

Ответ: 0

Докажем по индукции, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) < \frac{2n}{2n+1};$$

База для $n=1$: $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

Переход $(n \to n+1)$: Если $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$,

то $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right) < \frac{2n}{2n+1} + \left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{2n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n(2n+2)+1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n+1}{2n+2}$. ~~что~~ Переход доказан. Тогда по доказанному нашему утв. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}<\frac{2022}{2023}$, и исходное выражение $<\frac{2022}{2023}+\frac{1}{2023}=1$.

Заметим также, что оно >0, т.к.

$1-\frac{1}{2}>0$, т.к. $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}>0$; $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}>0$; ... $\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}>0$. ★

Тогда $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)+\frac{1}{2023}>0$.

Тогда исходное выражение >0, но $<1 \Rightarrow$ его целая часть равна 0.

★ т.к. при любом $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$, т.к. ~~2n~~ $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n(2n-1)}>0$.

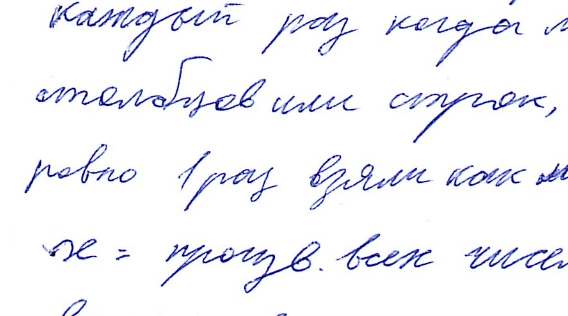
Задание 3

Ответ – 3: Оценка: Если у нас k раз встречается число 1, то $21+22-k$ раз число -1. Поэтому сумма всех чисел равна $k+(43-k)\cdot -1 = 2k-43$, что является нечётным числом. Значит если сумма могла быть <3, то только 1.

Докажем, что сумма не может равняться 1:

Если она равна 1, то заметим, что тогда у нас 22 раза встретилось число 1 среди произведений, и 21 раз -1, т.к. если k раз число 1 встретилось, то сумма равна $2k-43=1 \Rightarrow k=22$. Заметим, что если мы перемножим все произведения по строкам и столбцам отдельно, то оба раза получим произведение всех чисел в таблице, т.к. каждый раз когда мы перемножали все произведения столбцов или строк, $\forall$ элемент в таблице мы ~~умн равно 1~~ равно 1 раз взяли как ~~множитель~~ в произведение. Значит, если x = произв. всех чисел в таблице, то если мы перемножим все произв. строк и столбцов вместе, получим x^2, а если у нас 21 раз встретился знак -1, то есть нечётное число раз, то при произведении получим $-1 = x^2$ (?!). Значит, 21 раз -1 встретиться не мог и 1 в сумме получиться не могло. Значит, сумма ≥ 3.

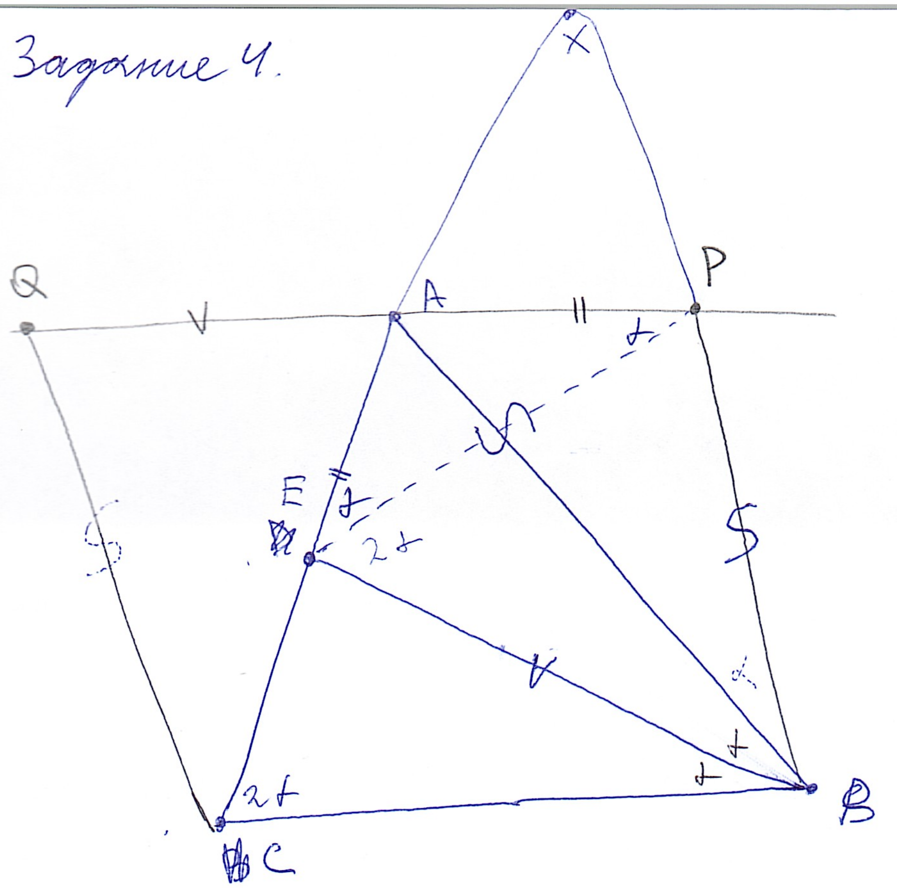
Пример:



В первых 21 из 22 столбцах проставим везде 1, в последнем везде, кроме последней клетки поставим -1, в последней 1. Итого 20 в первых 20 строках произв. будет -1, в последней 1; во всех столбцах произв. равно 1 или $1\cdot(-1)^{20}=1$. Итого сумма произведений равна $1+22\cdot 1+20\cdot -1 = 3$.

Значит, ответ – 3.

Задание 4.



Проведём из т. A прямую l, параллельную BC. Отметим точки P и Q на l, как на картинке, что $AP = AE$, $AQ = BE$. Тогда отрезок PQ будет параллелен BC ~~пр~~ и равен $AE + BE = BC$, тогда ▱ $CQPB$ – параллелограмм. Также известно из условия, что $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha \Rightarrow \angle CAB = 180 - 4\alpha$. Заметим, что раз $AP \parallel CB$, то $\angle PAB = \angle ABC = 2\alpha \Rightarrow \angle EAP = 180 - 4\alpha + 2\alpha = 180 - 2\alpha$, а также $EA = AP \Rightarrow \angle AEP = \angle APE = \alpha$. Тогда в ~~EAPB~~ ▱ $APBE$ $\angle APE = \angle ABE = \alpha \Rightarrow$ ▱ $APBE$ – вписанный. Тогда $\angle PBE = 180 - \angle EAP = 2\alpha \Rightarrow \angle PBA = \alpha$, а также $\angle PEB = \angle PAB = 2\alpha \Rightarrow \angle PEB = \angle PBE = 2\alpha \Rightarrow PB = PE$, а также $PB = QC$, т.к. ▱ $CQPB$ – параллелограмм. Продлим PB и AE до пересечения в точке X. Заметим, что X лежит на лучах EA и BE, т.к. $\angle PBE + \angle BCA < 180°$, тогда заметим, что $\triangle BEX = \triangle AQC$, т.к. $BE = AQ$, $\angle EBX = \angle QAC = 2\alpha$ (т.к. $AQ \parallel BC$), $\angle AQC = \angle BEX = 3\alpha$. Тогда $EX = QC$, также $PE = QC \Rightarrow PE = EX$, $\angle XPE = \underbrace{90 - \frac{\alpha}{2}}_{= 90 - \frac{\angle PEX}{2}} = 4\alpha = \angle PEB + \angle PBE \Rightarrow 90 = 4{,}5\alpha \Rightarrow \alpha = 20°$, тогда $\angle BAC = 180 - 4\alpha = 100°$.