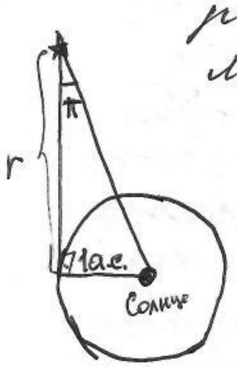
Задание 11.2

Сделаем рисунок. Параллакс π связан с расстоянием до неё как $tg\,\pi = \frac{1\,а.е.}{r}$. Для малых углов справедливо $tg\,\pi = \pi$ в радианах. Выражая параллакс в секундах дуги π'', а расстояние в парсеках $r_{пк}$ имеем:



$$\pi'' = \frac{1}{r_{пк}} \Longleftrightarrow r_{пк} = \frac{1}{\pi''}$$

Поэтому расстояние $r_{пк}$ до звезды с параллаксом $\pi = 0{,}015'' \pm 0{,}005''$ равно

$r_{пк} = \frac{1}{0{,}015} \approx 66{,}7$ пк

Относительная погрешность $\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \pi}{\pi} = \frac{0{,}005''}{0{,}015''} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ абсолютная погрешность $\Delta r = r \cdot \frac{1}{3} \approx 86{,}7 \cdot \frac{1}{3} \approx 22{,}2$ пк

Итого, расстояние до звезды $r = 66{,}7\,пк \pm 22{,}2\,пк$.

Ответ: $66{,}7\,пк \pm 22{,}2\,пк$

Задание 11.4

Рассчитаем большую полуось орбиты геостационарного спутника. По обобщённому III закону Кеплера:

$$\frac{T^2(M+m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G},$$

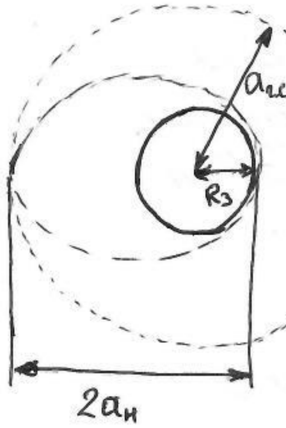
где T - период обращения, a - большая полуось орбиты, G - гравитационная постоянная, M и m — массы центрального и обращающегося тел. В нашем случае $m \ll M$, M – масса Земли ($\approx 6\cdot10^{24}$ кг), $T = \cancel{24^ч} \approx 23^ч 56^м = 86160$ с. Тогда

$$a_{г.с} = \sqrt[3]{\frac{GT^2M}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(86160)^2\cdot6\cdot10^{24}}{4\pi^2}} \approx \cancel{6{,}18\cdot10^7\,м}\ 42{,}2\cdot10^6\,м$$

Скорость спутника на геостационарной (круговой) орбите:

$$v_{г.с.} = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{4{,}22\cdot10^7}} \approx 3080\,м/с.$$

Теперь рассмотрим падение спутника на поверхность Земли.



Чтобы спутник перешёл на более низкую орбиту (в частности, коснулся поверхности Земли), его скорость надо уменьшить. При минимальном изменении скорости в пренебрежении трением орбита касается поверхности Земли в перицентре, а в апоцентре скорость спутника изменяется. Поэтому новая большая полуось

$$a_н = \frac{1}{2}(a_{гс}+R_\oplus).$$

Так как спутник геостационарный, то $R_\oplus=6378$ км (радиус экватора Земли). Тогда

$$a_н=\frac{1}{2}(4{,}22\cdot10^7 м+6{,}378\cdot10^6 м)=24289000 м\approx 2{,}429\cdot10^7 м.$$

Скорость тела в апоцентре найдём из интеграла энергии

$$v^2=GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

где r – расстояние от точки орбиты до гравитирующего тела. Скорость спутника должна упасть до

$$v_a=\sqrt{GM\left(\frac{2}{a_{гс}}-\frac{1}{a_н}\right)}=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot\left(\frac{2}{4{,}22\cdot10^7}-\frac{1}{2{,}429\cdot10^7}\right)}\approx 1580 м/с.$$

Изменение скорости $\Delta v=v_a-v_{гс}\approx 1580-3080=-1500$ м/с, что меньше нуля, т.е. скорость уменьшилась.

<u>Ответ</u>: уменьшится на 1500 м/с

<u>P.S</u>: можно предположить, что спутник можно вывести на солнечную орбиту, увеличив скорость до II космической $v_{II}=\sqrt{2}\cdot v_I=\sqrt{2}\cdot 3080=$
$=4360$ м/с. Тогда $v_{сп}=v_{II}$, по интегр. эн-гии

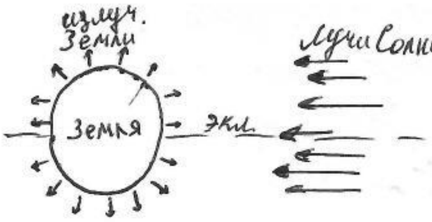
$v_{сп}^2=G\cdot M_\odot\left(\frac{2}{a_\oplus}-\frac{1}{a}\right)$ новая больш. п-ось

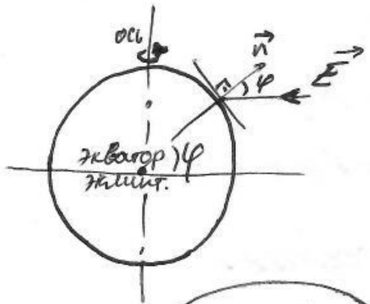
$$a=\left(\frac{2}{a_\oplus}-\frac{v_{сп}^2}{GM_\odot}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{1{,}5\cdot10^{11}}-\frac{(4360)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}\right)^{-1}\approx 7{,}58\cdot10^{10}=\frac{1}{2} а.е.$$

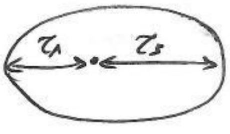
Период обращения $T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{(7{,}58\cdot10^{10})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}}=\frac{1}{3}$ года ⇒

⇒ спутник не встретится с Землёй в первый оборот.

Задание 11.3







Пренебрежём парниковым эффектом.
Рассчитаем равновесную температуру. Излучаемая мощность E_{out} равна поглощаемой E_{in}.
По закону Стефана-Больцмана

$E_{out} = \sigma T_{пл}^4$, где $T_{пл}$ – температура ~~пл~~ участка планеты, кот. мы рассматриваем.
Поглощаемое излучение E_{in}:
угол между солнечными лучами $\vec{E}$ и нормалью к поверхности Земли $\vec{n}$ равен широте места $\angle(\vec{n};\vec{E}) = \varphi$. Тогда, учитывая альбедо $E_{in} = E_0 \cdot \cos\varphi \cdot (1-A)$, $A \approx 0{,}3$ – альбедо Земли, где E_0 – мощность солнечного излучения на орбите Земли. При изотропном распространении света по з-ну Стеф.-Больцм.:

$$E_0 = \sigma T_\odot^4 \cdot \frac{4\pi R_\odot^2}{4\pi r^2} = \sigma T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{r^2},$$

где $T_\odot$ – температура Солнца, $R_\odot$ – его радиус, r – расстояние до Земли. $\Rightarrow E_{in} = \sigma T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{r^2} \cdot \cos\varphi \cdot (1-A)$

Тогда: $E_{out} = E_{in} \Leftrightarrow \sigma T_{пл}^4 = \sigma T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{r^2} \cdot \cos\varphi \cdot (1-A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad T_{пл}^4 = T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{r^2} \cos\varphi\,(1-A)$$

Отсюда расстояние Солнце-Земля $r = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_{пл}}\right)^2 \sqrt{\cos\varphi\,(1-A)}$

По условию широта Казани $\varphi = 56°$, летняя температура $T_л = 25°C = 298\,K$, зимняя $T_з = -20°C = 253\,K$; радиус Солнца $6{,}96 \cdot 10^8$ м, температура $T_\odot = 5800\,K$. Тогда летом расстояние Солнце-Земля

$$\cancel{r_л = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_л}\right)^2 \sqrt{\cos\varphi} = 6{,}96 \cdot 10^8 \left(\frac{5800}{298}\right)^2 \sqrt{\cos 56°} \approx 1{,}97 \cdot 10^{11}\,м \approx 1{,}32\,а.е.}$$

~~зимнее~~ $r_л = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_л}\right)^2 \sqrt{\cos\varphi\,(1-A)} = 6{,}96 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{5800}{298}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos 56° \cdot (1-0{,}3)} = 1{,}25 \cdot 10^{11}\,м = 0{,}83\,а.е.$

зимнее $r_з = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_з}\right)^2 \sqrt{\cos\varphi\,(1-A)} = 6{,}96 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{5800}{253}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos 56° (1-0{,}3)} \approx 1{,}73 \cdot 10^{11}\,м \approx 1{,}15\,а.е.$

Пусть e – эксцентриситет. ~~То~~ Тогда $\begin{cases} r_л = 1\,а.е.(1-e) \\ r_з = 1\,а.е.(1+e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 0{,}17 \\ e = 0{,}15 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow e \approx 0{,}16$

Ответ: 0,16

Задание 11.5

Цвет звезды определяется её температурой. Самые горячие – голубые, самые холодные – коричневые. Белые карлики распространены в диапазоне температур от ~8000 K до ~20000 K – это бело-жёлтые, и бело-голубые, и белые звёзды.

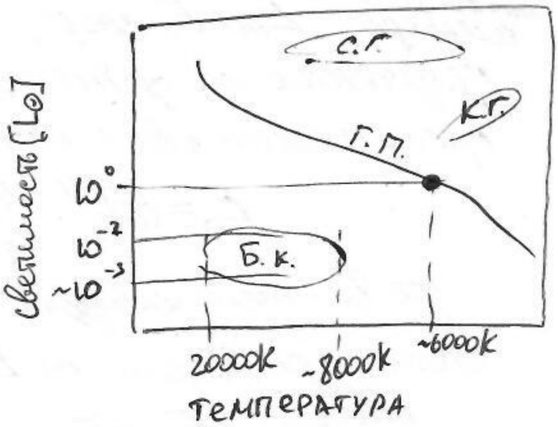
Светимость звезды зависит от её температуры и размера (радиуса R): $L \propto T^4 \cdot R^2$. Тогда для двух звезд $\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^4 R_1^2}{T_2^4 \cdot R_2^2}$. Для белых карликов характерна светимость в примерных границах от $10^{-3} L_\odot$ до $10^{-2} L_\odot$. Тогда их радиус

$$R_{бк} = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_{бк}}\right)^2 \sqrt{\frac{L_{бк}}{L_\odot}}$$ ~~равен~~

находится в пределах

от $R_1 \cong R_\odot \left(\frac{6000}{20000}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{10^{-3} L_\odot}{L_\odot}} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3} R_\odot$

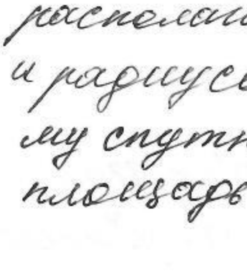
до $R_2 \approx R_\odot \left(\frac{6000}{8000}\right)^2 \sqrt{\frac{10^{-2} L_\odot}{L_\odot}} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-2} R_\odot$.



Это меньше радиуса Солнца, которое уже считается карликом.

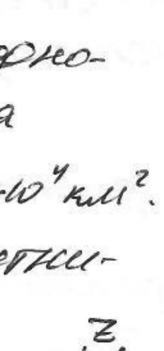
Задание 11.1

Из условия следует, что спутники будут располагаться на сфере с центром в центре Земли и радиусом $R = h + R_\oplus \cong 550 + 6370 = 6920$ км. Тогда одному спутнику (из усл. равномерности) отведена площадь на этой сфере $S_0 = \frac{S}{N} = \frac{4\pi R^2}{N} = \frac{4\pi \cdot 6920^2}{30000} \approx 2 \cdot 10^4$ км^2.

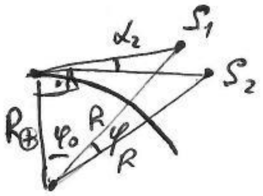


Расстояние между соседними спутниками $l \approx \sqrt{S_0} = \sqrt{2 \cdot 10^4} \approx 140$ км.
Наибольшее угловое расстояние будет м/ду спутниками в зените (около него)

$$2\, tg \frac{\alpha_1}{2} = \frac{l}{h} \Rightarrow \alpha_1 \cong 14{,}5^\circ.$$



Наименьшее угловое расстояние будет между спутниками у горизонта. Для нахождения угла α_2 воспользуемся теоремой синусов:



$$\frac{R}{\sin(90^\circ+\alpha_2)} = \frac{R_\oplus}{\sin(180^\circ-90^\circ-\alpha_2-\varphi_0)} \Rightarrow \cos\alpha_2 = \frac{R}{R_\oplus}\cdot\cos(\alpha_2+\varphi_0)$$

Для угла $\varphi_0+\varphi$ справедливо: $\cos(\varphi_0+\varphi) = \frac{R_\oplus}{R}$.

Также φ (централ. угол) равен: $\varphi = \frac{\ell}{R} = \frac{140}{6920} \approx 0{,}02$ рад $\approx 1{,}16^\circ$

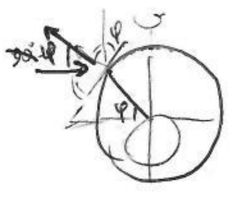
Тогда $\varphi_0 \approx 21{,}8^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_2 \approx 1{,}23^\circ$ (посчитано с пом. калък.

<u>Ответ</u>: от $1{,}23^\circ$ до $14{,}5^\circ$.

$\cos\alpha$ O B A F G K M

$T^2 =$



$E = E_0 \cdot \cos\varphi$

$v^2 = \frac{2GM_\odot}{r}$; $v^2 = GM_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_n}\right)$

$v = v$

$\frac{2M_\odot}{r} = M_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_n}\right)$

$E_0 = \sigma T^4 \frac{4\pi R_\odot^2}{4\pi r^2} = \sigma T^4 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2$

$E_{out} = \sigma T^4$; $E_{in} = E \cdot (1-A) = \sigma$

1,25

1,73

$T^4 = T_\odot^4 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2$;

$\cancel{\sigma} T^4 4\cancel{\pi} R_\oplus^2 = \cancel{\sigma} T_\odot^4 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2 \cdot \cancel{\pi R_\oplus^2} (1-A)$

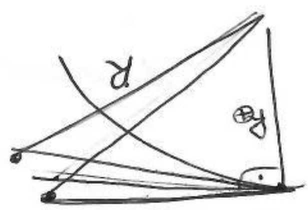
$4T^4 = T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{r^2} \cdot (1-A)$

$\cancel{\sigma} T_\odot^4 \cdot \frac{R_\odot^2}{r^2} \cdot \cancel{\pi R_\oplus^2} (1-A) = \cancel{\sigma} T^4 4\cancel{\pi R_\oplus^2}$

$\frac{L_k}{L_\odot} = \frac{T_{Bk}^4 R_k^2}{T_\odot^4 R_\odot^2} \Rightarrow R_k = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_k}\right)^2 \sqrt{\frac{L_k}{L_\odot}}$

$T = T_\odot \sqrt{\frac{R_\odot}{2r}} \cdot \sqrt[4]{1-A}$

$\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 = \left(\frac{R_\odot}{2r}\right)^2 \cdot (1-A)$



Черновик

-6-/-6-