

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2023–24 учебный год
7 класс

Задание 1. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 по кругу в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел делилась нацело либо на 3, либо на 4 (возможно, и на 3, и на 4). (20 баллов)

Задание 2. Положительные числа a , b , c и d таковы, что

$$\frac{a}{b} < 1 < \frac{c}{d}.$$

Докажите, что

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c+1}{b+d+1} < \frac{c}{d}.$$

(20 баллов)

Задание 3. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Точка M — середина отрезка PQ . Оказалось, что $AP = PM = MC = MQ = QB$. Найдите угол AMB . (20 баллов)

Задание 4. Антон выписал на карточках все трехзначные числа, которые не содержат нулей в своей записи, каждое число — ровно по одному разу. Затем он разрезал каждую карточку на две так, что каждое трехзначное число распалось на однозначное и двузначное (например, из карточки 327 можно получить либо карточки 32 и 7, либо 3 и 27, а из карточки 996 — либо карточки 99 и 6, либо 9 и 96). Все числа на новых карточках Антон перемножил и получил число N . Найдите девяностую справа цифру числа N . *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Задание 5. Аня, Таня и Ваня играют в игру, поочередно передвигая шахматного коня на доске 101×101 . Первым ходит Ваня, второй — Аня, а третьей — Таня. Изначально конь стоит в левом нижнем углу. Если кому-то удастся поставить коня в центральную клетку доски, то он объявляется победителем. Девочки хотят договориться между собой играть так, чтобы кто-то из них сумел выиграть вне зависимости от действий Вани. Получится ли это у них, или Ваня сумеет не дать выиграть ни одной из них? Если в игре сделано 3000000 ходов, и до этого момента никто не выиграл, то объявляется ничья. (20 баллов)