Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021–22 учебный год
6 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Расставьте по кругу цифры от 1 до 9, каждую по одному разу, так, чтобы каждое двузначное число, составленное из двух идущих подряд по часовой стрелке цифр, делилось на 3 или 4. (20 баллов)

Решение. Пример расстановки чисел: 1, 6, 3, 9, 2, 7, 8, 4, 5.

Критерии. Любой верный пример — 20 баллов.

Задание 2. Водитель поехал по шоссе из Казани в Нижний Новгород с постоянной скоростью. К сожалению, на некоторых частях пути дорога ремонтировалась, и на таких участках ему приходилось снижать скорость на четверть. Поэтому в тот момент, когда он должен был бы приехать в Нижний Новгород, он проехал лишь 6/7 пути. Какую часть времени водитель ехал по ремонтируемым участкам, если на оставшемся пути ремонтируемых участков не было? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Ответ. $\frac{4}{7}$.

Решение. Обозначим часть времени, которую водитель проехал по ремонтируемой дороге через x. Тогда $\frac{6}{7} = \frac{3}{4}x + (1 - x)$. Решая это уравнение, получим $x = \frac{4}{7}$.

Критерии. Только ответ — 2 балла.

Верно составлено, но неверно решено уравнение или система уравнений — 10 баллов.

Задание 3. В клетках таблицы 4×4 расставлены натуральные числа от 1 до 16 (в каждой клетке — по одному числу). В каждом квадратике 2×2, состоящем из четырёх клеток этой таблицы, отметили наибольшее из чисел, стоящих в них. Какое наибольшее и какое наименьшее количество чисел могло быть отмечено? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Ответ. 9 и 4.

Решение. Заметим, что в квадратике 4×4 есть ровно девять различных квадратиков 2×2. Поэтому больше девяти клеток отметить не могли. Кроме того, в квадратике 4×4 можно разместить 4 непересекающихся квадратика 2×2, в каждом из которых должна быть отмеченная клетка. Значит, хотя бы четыре клетки точно отмечены. Примеры — на картинке.

1	2	3	4
11	**13**	**14**	5
12	**15**	**16**	6
10	9	8	7

1	2	3	4
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Критерии. Примеры на 4 и на 9 клеток — по 5 баллов.

Оценки на 4 и на 9 клеток — по 4 балла.

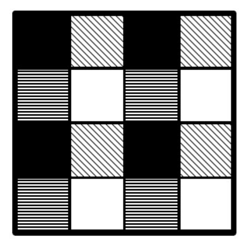
Задание 4. Андрей спрятал монету под одну из восьми положенных в ряд шапок и предложил Тане узнать, под какой шапкой она лежит. Таня может делать следующее действие: она показывает на одну из шапок, а Андрей поднимает ее, и, если монеты под ней нет, то говорит, слева или справа от указанной Таней шапки находится монета. При этом Андрей говорит правду и ложь по очереди, но не известно с чего именно начинает. Сможет ли Таня найти монету за три действия? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Решение. Приведем стратегию за Таню. Укажем на крайнюю слева шапку. Если там монета, то мы её обнаружили за одну попытку. Если её там нет, то она лежит правее, и по ответу Андрея мы будем знать, солгал он или нет, а потому будем знать, правду или ложь он скажет после второй (а также и после третьей) попытки. Итак, после первой попытки у нас осталось семь шапок, и мы точно знаем, как понимать слова Андрея. Второй попыткой выберем среднюю из семи оставшихся шапок. Если монеты под ней нет, то по ответу Андрея определяется группа из трёх шапок, содержащая монету. Укажем на среднюю из этих трёх шапок. Если монеты там нет, то по ответу Андрея мы будем точно знать, под какой из двух оставшихся шапок лежит монета.

Критерии. Любая верная стратегия — 20 баллов.

Верная стратегия, но разобранная в решении не до конца — не выше 10 баллов.

Задание 5. Клетки квадрата 4×4 раскрашены в три цвета. Назовем пару клеток *удачной*, если они не имеют общих точек границы (ни по сторонам, ни по углам) и покрашены в одинаковый цвет. Докажите, что можно выбрать восемь клеток, которые разбиваются на четыре удачные пары. (20 баллов)



Решение. Разобьем клетки на четыре четверки, являющиеся углами квадрата 3×3. В каждой четверке по принципу Дирихле присутствует хотя бы одна пара одноцветных клеток. Поскольку клетки в четверке попарно не имеют общих точек, найденная пара клеток является удачной.

Критерии. В решении присутствует идея разбить доску на группы из клеток, не имеющих общих точек — 3 балла.

Общие критерии оценивания.

Эти критерии применяются в том случае, когда невозможно применить критерии по задачам, указанные выше (например, если решение или продвижение в решении отличаются от тех, которые предполагало жюри).

Полное верное решение — 20 баллов.

Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влиящие на решение — 18–20 баллов.

Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влиящие на логику рассуждений — 15–17 баллов.

Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи — 5–9 баллов.

Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения — 0–3 баллов.

Решение неверно, продвижения отсутствуют, либо задача не решалась — 0 баллов.