Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021–22 учебный год
7 класс
Решения задач и критерии оценивания

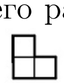
Задание 1. На острове рыцарей и лжецов живет 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем (который всегда говорит правду), либо лжецом (который всегда лжет). Однажды каждый из них сказал: «Среди остальных 2021 жителя острова есть по меньшей мере один лжец». Сколько рыцарей живет на острове? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Ответ. 2021 рыцарь.

Решение. Заметим, что все 2022 островитяна не могут быть рыцарями, так как тогда каждый из них лжет. Значит, на острове есть лжец. Поскольку этот лжец говорит неправду, среди остальных 2021 аборигенов лжецов нет, поэтому все они — рыцари.

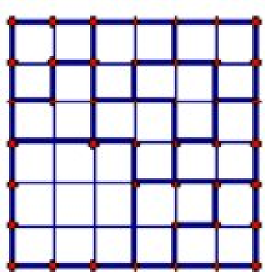
Критерии. Только ответ — 3 балла.

В решении используется, но не доказано, что есть хотя бы один лжец, в остальном решение верно — 10 баллов.

Задание 2. Из клетчатого квадрата 6×6 нужно вырезать по линиям сетки квадратик меньшего размера так, чтобы оставшуюся часть можно было разбить на уголки из трех клеток  без пропусков и наложений. Уголки можно поворачивать и переворачивать. Чему могут равняться размеры вырезанного квадратика? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет. (20 баллов)

Ответ. 3×3.

Решение. Площадь исходного квадрата равна 36, она делится на 3. Площадь каждого уголка равна 3. Поэтому, если какую-то клеточную фигуру можно разрезать на уголки, ее площадь обязана делиться на 3. Отсюда следует, что площадь вырезанного квадрата тоже должна делиться на 3, но тогда его сторона может равняться только 3 (числа 1, 4, 16 и 25 не делятся на 3). Пример на рисунке.



Критерии. Только оценка — 8 баллов.

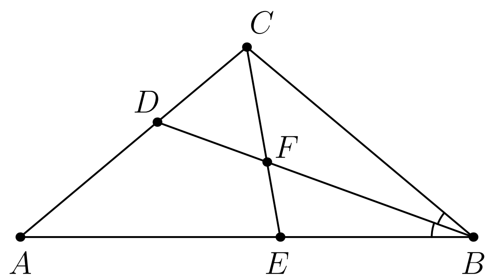
Только пример — 8 баллов.

Только ответ без примера — 0 баллов.

Задание 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса BD. Точка E, лежащая внутри отрезка AB, такова, что $CE = BE$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Оказалось, что $DF = CF$. Найдите углы треугольника ABC. Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Ответ. $\angle A = \angle B = 40°$, $\angle C = 100°$.

Решение. Пусть $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$. Тогда $\angle BCE = 2\alpha$, так как $BE = CE$, а $\angle BAC = 2\alpha$, так как $AC = BC$. Угол $BFE = 3\alpha$, как внешний для треугольника BCF. Следовательно, $\angle CFD = 3\alpha$. Аналогично, $\angle AEC = 4\alpha$, как внешний для треугольника BCE. Пусть в равнобедренном треугольнике CDF углы $\angle FDC = \angle FCD = \beta$. Тогда из треугольника ACE имеем $6\alpha + \beta = 180°$, а из треугольника CDF имеем $3\alpha + 2\beta = 180°$. Из этих равенств следует, что $\beta = 3\alpha$. Тогда $9\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 20°$. Отсюда сразу получаем ответ.



Критерии. Введены обозначения и вычислены все необходимые для решения углы, но решение не доведено до конца — 8 баллов.

Задание 4. Даны действительные числа a, b, c. Известно, что числа $a + b$, $b + c$, $c + a$ — это три последовательные целые числа, записанные в каком-то порядке (необязательно по возрастанию), причем наибольшее из них нечетно. Докажите, что числа a, b, c также являются тремя последовательными целыми числами, записанными в каком-то порядке. (20 баллов)

Решение. Ясно, что среди чисел a, b, c нет равных, иначе какие-то две суммы были бы равны. Без ограничения общности, можно считать, что $a < b < c$, тогда $a+b < a+c < b+c$. Тогда числа $a + b$ и $b + c$ нечетны, поэтому $a + b = 2k - 1$, $a + c = 2k$ и $b + c = 2k + 1$ для некоторого целого k. Следовательно,

$$2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) = (2k - 1) + 2k + (2k + 1) = 6k,$$

поэтому $a + b + c = 3k$. Отсюда находим $a = (a + b + c) - (b + c) = 3k - (2k + 1) = k - 1$, $b = (a + b + c) - (c + a) = 3k - 2k = k$, $c = (a + b + c) - (a + b) = 3k - (2k - 1) = k + 1$. Что и требовалось доказать.

Критерии. Введено упорядочение на попарные суммы, а не на сами числа — 7 баллов.

Рассмотрены только целые числа или частные случаи — 0 баллов.

Задание 5. Восемь шахматистов играют однокруговой турнир (всего играется семь туров, в каждом туре шахматисты разбиваются на четыре пары и в каждой паре играют друг с другом. В итоге каждый играет с каждым ровно по одному разу). За победу дается

1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель турнира уже выявился досрочно? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Ответ. Через 5 туров.

Решение. *Оценка.* В каждом туре разыгрывается ровно 4 очка. Тогда после четвертого тура разыграно 16 очков, а лидер не может набрать больше, чем 4 очка. Следовательно, остальные семь участников в сумме набрали не менее, чем 12 очков. Следовательно, найдется хотя бы один из них, у которого не менее, чем 12/7 очков, то есть, он набрал минимум 2 очка. Так как впереди ещё 3 тура, то победитель пока неизвестен: этот участник теоретически может набрать еще 3 очка, а текущий лидер — ни одного.

Пример. После 5 туров вполне могла сложиться ситуация, когда у лидера — 5 очков, а у каждого из остальных участников — не более, чем 2,5 очка. Например, это возможно, если лидер все свои партии выиграл, а все остальные партии закончились вничью. Тогда все остальные шахматисты набрали не более 2,5 очков. Так как до конца турнира осталось всего два тура, то в этом случае победитель уже определен: максимум очков, доступный всем остальным — это 4,5 очка.

Критерии. Оценка и пример — по 10 баллов.

Общие критерии оценивания.

Эти критерии применяются в том случае, когда невозможно применить критерии по задачам, указанные выше (например, если решение или продвижение в решении отличаются от тех, которые предполагало жюри).

Полное верное решение — 20 баллов.

Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влиящие на решение — 18–20 баллов.

Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влиящие на логику рассуждений — 15–17 баллов.

Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи — 5–9 баллов.

Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения — 0–3 баллов.

Решение неверно, продвижения отсутствуют, либо задача не решалась — 0 баллов.