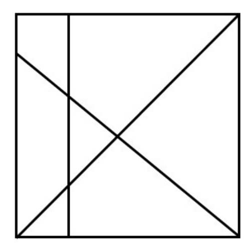
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021–22 учебный год
8 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Три кота — Том, Тим и Там-Там — украли по сосиске и взвесили их. После взвешивания Том сказал: «Если бы моя сосиска была втрое тяжелее, то суммарный вес всех сосисок увеличился бы вдвое». Тим сказал: «То же самое можно сказать и про мою сосиску». А Там-Там подумал и сказал, что так быть не могло. Прав ли он? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Решение. Там-Там прав. Если после утроения веса сосиски общий вес всех сосисок увеличивается вдвое, то вес этой сосиски составляет половину общего веса всех сосисок. Но если сосиски Тома и Тима составляют по половине общего веса всех сосисок, то на долю сосиски Там-Тама не остается ничего.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Задание 2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может разрезать квадрат тремя прямыми так, чтобы получилось ровно семь частей — три треугольника и четыре четырёхугольника. Прав ли барон? Обоснуйте свой ответ. Разрезы должны идти от края до края. (20 баллов)



Решение. Барон прав. Один из возможных примеров разрезания — на рисунке. Существуют и другие.

Критерии. Любой верный пример — 20 баллов.

Задание 3. В ряд стоят 30 детей, одетых в синие и красные шапки. Известно, что мальчики в синих шапках и девочки в красных шапках говорят правду, а остальные дети лгут. Каждый мальчик сказал: «*Все мои соседи — в красных шапках*». Каждая девочка сказала: «*Все мои соседи — в синих шапках*». Докажите, что детей в синих шапках не меньше десяти. Соседями друг другу считаются два ребенка, стоящие рядом. (20 баллов)

Решение. Допустим, что три ребенка в красных шапках стоят подряд. Рядом с девочкой в красном не могут стоять другие дети в красных шапках, поэтому три упомянутых ребенка — мальчики. Для среднего из них получаем противоречие с условием. Следовательно, среди любых трех подряд идущих ребят хотя бы один в синей шапке. Разобьем 30 детей на 10 непересекающихся троек. Тогда в каждой тройке ессть хотя бы один ребенок в синей шапке, следовательно, их не менее 10.

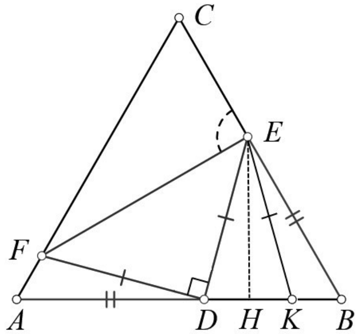
Критерии. Доказано только, что среди любых троих подряд идущих детей есть ребенок в синей шапке — 15 баллов.

Задание 4. На сторонах AB, BC, CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки D, E и F так, что $BD > AF$. Оказалось, что $DE = DF$, $BE = AD$ и $\angle EDF = 90°$. Докажите, что $\angle CEF = 90°$. (20 баллов)

Первое решение. Заметим, что треугольники ADF и BED не равны. Действительно, если бы они оказались равны, то было бы $BD = AF$.

Заметим, что $\angle EDB$ — острый (так как $\angle ADE = 90° + \angle ADF$, и $\angle DBE$ — тоже острый по условию, поэтому основание высоты EH, проведенной из точки E на сторону BD попадает на отрезок BD. Отложим отрезок $BK = AF$ от точки B внутрь отрезка BA. Тогда треугольники BEK и ADF равны по первому признаку равенства. Поэтому $EK = DF = DE$. Следовательно, треугольник DEK — равнобедренный, и его высота совпадает с его медианой, поэтому точка K лежит на отрезке BH.

Пусть $\angle ADF = \angle BEK = x$. Тогда $\angle DKE = 60° + x$ как внешний угол треугольника BEK. Поэтому $\angle KDE = 60° + x$, и сумма углов при вершине D равна $x + 60° + x + 90° = 180°$, откуда $x = 15°$. Тогда $\angle KED = 180 - 2 \cdot 75° = 30°$, а $\angle BEF = 15° + 30° + 45° = 90°$, откуда и следует, что $FE \perp BC$.



Второе решение. Воспользуемся тем же рисунком. Четвертый (полу)признак равенства треугольников, примененный к треугольникам ADF и BED, в которых $DE = DF$, $BE = AD$ и $\angle DBE = \angle DAF = 60°$ утверждает, что либо эти треугольники равны, либо сумма углов $\angle BDE + \angle AFD = 180°$. Так же, как и в первом решении, первый вариант невозможен. Пусть $\angle BDE = \alpha$, тогда $\angle DFC = \alpha$, как смежный с $\angle AFD$. Из треугольника BDE имеем $\angle BED = 120° - \alpha$, тогда смежный с ним $\angle CED = 60° + \alpha$. Сумма углов четырехугольника $CEDF$ равна $60° + 60° + \alpha + 90° + \alpha = 360°$. Отсюда находим $\alpha = 75°$. Следовательно, $\angle BED = 45°$. Кроме того, треугольник DEF — прямоугольный равнобедренный, поэтому $\angle DEF = 45°$. Отсюда $\angle CEF = 180° - 45° - 45° = 90°$.

Четвёртый признак равенства треугольников. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180°$.

Критерии. Верно сформулированный четвертый признак можно использовать без доказательства. Баллы за это не снижаются.

В верном решении, вне зависимости от использования четвертого признака, не доказано, что треугольники ADF и BED не равны (например, этот случай вообще не рассмотрен) — 15 баллов.

В верном решении, не использующем четвертый признак, не доказано, что основание высоты EH, проведенной из точки E на сторону BD попадает на отрезок BD (либо используется, но не доказано равносильное утверждение, что какая-либо точка попадает внутрь конкретного отрезка, а не снаружи его, или какой-либо угол — острый, а не тупой, или наоборот) — 10 баллов.

Задание 5. Положительные действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенствам

$$a^2 < b + c, \quad b^2 < c + a, \quad c^2 < a + b.$$

Докажите, что все они меньше 2. (20 баллов)

Решение. Предположим, что хотя бы одно из чисел не меньше 2. Без ограничения общности в силу круговой симметрии можно считать, что это a. Тогда $b+c > a^2 \geqslant 4$, поэтому хотя бы одно из чисел b и c так же не меньше 2. Если $b \geqslant 2$, то сложим первые два неравенства:

$$a^2 + b^2 < a + b + 2c \iff a^2 - a + b^2 - b < 2c \iff \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 < 2c + \frac{1}{2}.$$

Но так как $a, b \geqslant 2$, то $a - \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2}$, $b - \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2}$, поэтому левая часть последнего неравенства больше, чем $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Отсюда получаем, что

$$2c + \frac{1}{2} > \frac{9}{2} \iff c > 2.$$

Если же $c \geqslant 2$, то сложим первое и третье неравенства, и, рассуждая аналогично, получим, что $b > 2$. Итак, в любом случае все три переменных не меньше, чем 2.

Теперь сложим все три неравенства:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2a + 2b + 2c \iff (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 < 3.$$

Но каждое слагаемое в левой части не меньше, чем $(2-1)^2 = 1$, следовательно, левая часть не меньше, чем 3. Противоречие. Отсюда следует, что чисел, не меньших 2, среди трех переменных нет.

Замечание. В задаче не требуется приводить пример чисел, удовлетворяющих условию. Тем не менее, легко видеть, что числа $a = b = c = 1$ подходят.

Критерии. Рассмотрены только целые числа или частные случаи — 0 баллов.

Общие критерии оценивания.

Эти критерии применяются в том случае, когда невозможно применить критерии по задачам, указанные выше (например, если решение или продвижение в решении отличаются от тех, которые предполагало жюри).

Полное верное решение — 20 баллов.

Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение — 18–20 баллов.

Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений — 15–17 баллов.

Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи — 5–9 баллов.

Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения — 0–3 баллов.

Решение неверно, продвижения отсутствуют, либо задача не решалась — 0 баллов.