Задачи математической олимпиады школьников им. В.Р.Фридлендера

(Казань, 01.11.20)

Задача 1. Петя складывал два натуральных числа и нечаянно приписал в конце одного из них какую-то цифру. Поэтому вместо правильного ответа 13579 он получил число 24689. Какие числа должен был сложить Петя?

Задача 2. Существует ли такая функция $f(x)$, заданная на всей числовой прямой, что для всех $x \neq 0$ выполняется равенство $f(x) + f(1/x) = x^2$?

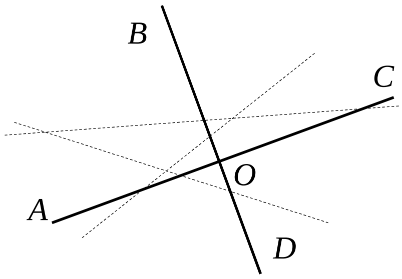
Задача 3. Внутри остроугольного треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до всех его вершин и всех сторон наименьшая.

Задача 4. Среднее арифметическое 101 различного натурального числа равно 70. Каким может быть наибольшее значение наибольшего из этих чисел? Наименьшее значение наибольшего из них?

Задача 5. В городе 2020 домов, в каждом по 2019 комнат, в каждой 2018 кошек, каждая из которых держит по 2017 мышек. Можно ли рассадить всех этих мышек по одной на все клетки квадратного игрового поля, если к ним добавить ещё одну?

Задача 6. При каких значениях p все корни уравнения $x^2 - 2(p - 1)x + 3p - 5 = 0$ положительны?

Задача 7. Дан многочлен $P(x) = x^{2020} - 12x^{1002} + 7x^{201} + 10x^{14} + 9x^3 - 12x + 4$. Найти остаток от деления его на $x^3 - x$.



Задача 8. На рисунке показаны оси декартовой системы координат (жирные линии) и графики прямых $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$. Укажите положительное направление оси Ox.

Задача 9. Отрезки AC и BC равны и перпендикулярны. Найдите множество всех точек M таких, что $\angle AMC = \angle BMC$.

Задача 10. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Точки P и Q являются серединами ребер AB и BC. а) Построить сечение куба плоскостью PQD_1. б) Какова его площадь?