Математическая олимпиада памяти В.Р.Фридлендера, Казань, 4.04.2021

За каждую задачу можно получить максимум 7 баллов. Если ученик 8-11 класса решает задачу за 6-7 класс, решение оценивается максимум на 5 баллов.

1. (6-7) Антон, Борис и Виктор – тройняшки. Антон и Борис всегда врут, а Виктор всегда говорит правду. На улице вы повстречались с одним из братьев. Как, с помощью простого вопроса (не более трёх слов), ответом на который могут быть только слова «да»/«нет», выяснить, зовут ли его Антоном?

2. (6-7) Башня состоит из 4 ярусов, каждый из них имеет форму параллелепипеда с квадратным основанием. Нижний ярус по всем направлениям в 4 раза больше верхнего, второй снизу – в 3 раза, третий – в 2. Объем башни 22500 м^3, площадь боковых стен 5400 м^2. Найдите высоту башни.

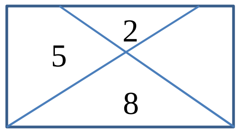
3. (6-7) Учитель написал на доске пример на умножение. Ученый с мировым именем Иннокентий стёр с доски две цифры и написал на месте каждой из них другую. Получилась запись $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 2021$. Что было написано на доске изначально? Приведите все возможные варианты.

4. Усердный Петя взял несколько чисел, возвел каждое в квадрат и сложил полученные значения. Усердная Маша прибавила к каждому Петиному числу по 1 и проделала те же действия. Не менее усердный Иннокентий вычел из каждого Петиного числа 1 и проделал то же самое.

(6-7) Как ни странно, Машина сумма оказалась такой же, как у Пети, а сумма Иннокентия – даже на 120 больше! Сколько чисел написал Петя?

(8-11) Как ни странно, Машина сумма оказалась на 1000 меньше, чем у Пети, а сумма Иннокентия – на 1000 больше! Все ли трое сделали вычисления правильно?

(Примечание. Каждому участнику засчитывается только один вариант задачи)



5. (8-11) Из двух соседних углов прямоугольника проведены две прямые, разделившие фигуру на 4 части. Площади трех частей отмечены на рисунке. Найдите площадь оставшейся части.

6. (8-11) Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=0$?

7. (6-11) Алиса долго шла по Зазеркалью. Она выяснила, что половину пути она двигалась со скоростью 4 км/час, а половину времени – со скоростью 5 км/час. Верно ли она посчитала?

8. (8-11) Пусть ABC – остроугольный треугольник. Будем называть прямоугольник вписанным в ABC, если две его вершины лежат на основании AB треугольника, а две других – на остальных сторонах. Может ли оказаться, что периметр каждого такого прямоугольника равен 20? Если да, то чему равна площадь треугольника ABC?

9. (8-11) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ \ldots \\ x_{2018}+x_{2019}+x_{2020}+x_{2021}=2018 \\ x_{2019}+x_{2020}+x_{2021}+x_1=2019 \\ x_{2020}+x_{2021}+x_1+x_2=2020 \\ x_{2021}+x_1+x_2+x_3=2021 \end{cases}$$

Найдите x_{2021}.

10. (10-11) $ABCO$ и $A_1B_1C_1O_1$ – два правильных тетраэдра с ребром a, расположенных так, что O – центр треугольника $A_1B_1C_1$, а O_1 – центр треугольника ABC. Кроме того, плоскости ABO и $A_1B_1O_1$ параллельны (то есть основание одного тетраэдра повернуто относительно основания другого на 180°). Найти площадь поверхности тела, содержащего общую часть этих тетраэдров.

11. Дана таблица $n \times n$ клеток, заполненная целыми числами от 1 до n. В каждом столбце все числа различны, кроме того, таблица симметрична относительно диагонали. Доказать, что на этой диагонали тоже все числа различны.

(6-7) $n = 5$;

(8-11) $n = 111$.

(Примечание. Каждому участнику засчитывается только один вариант задачи)

12. (6-11) Имеется белый квадрат 21×21, разбитый на клетки 1×1. Петя покрасил какие-то n клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 есть ровно две покрашенных клетки. Найдите все значения, которые может принимать n.