

Открытая математическая олимпиада школьников памяти В.Р.Фридендера, Казань, 10.04.2022

За задачу можно получить максимум 7 баллов. За задачи для 6-7 класса ученикам 8-9 класса дается максимум 5 баллов, 10-11 класса – максимум 3.

В решении следует приводить обоснование полученного ответа. За ответ без объяснений можно получить не более 1 балла.

1. (6-7) Замените звездочки в выражении $** + *** = ****$ цифрами так, чтобы получилось числовое равенство и каждое из двух слагаемых, а также их сумма не менялись бы при чтении справа налево и слева направо.

2. (6-7) На склад завезли сок в картонных упаковках (сечение упаковок квадратное). Начальник велел кладовщику расставить их квадратом. Тот заметил, что число упаковок совпадает с номером года. Однако до квадрата не хватило четырёх упаковок, и кладовщик решил переставить их прямоугольником (но, конечно, не в линию). Это удалось сделать единственным образом. В каком году это было?

3. (6-7) В цехе заменили все старые одинаковые прессы на новые одинаковые более высокой производительности. До реконструкции в цехе штамповалось 3969 деталей в день, а после – 5600. Сколько прессов стало в цехе, если их количество увеличилось на 5.

4. В одном ряду стоит n кресел. Одноклассники Маша, Саша и Паша хотят сесть на эти места с соблюдением социальной дистанции: никакие двое людей не должны сидеть рядом. Сколькими способами можно это сделать?

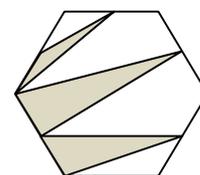
(6-7) $n = 8$. (8-11) $n = 10$.

(Примечание. Каждому участнику засчитывается только один вариант задачи)

5. У Пети есть фишки черного и белого цветов. Он расположил 9 фишек в ряд. Докажите, что обязательно найдётся пара фишек одного цвета, между которыми точно посередине будет расположена фишка такого же цвета.

6. Три подружки участвуют в телешоу. Имеется 7 шляп различных цветов, которые они видели заранее. Каждой надевают шляпу и усаживают так, что Аня видит шляпы на Варе и Гале, Варя – только на Гале, а Галя не видит ни одной. Их просят вслух назвать цвет своей шляпы. Если по крайней мере двое угадают, то команда выигрывает. Как им договориться (до начала конкурса), чтобы гарантировать выигрыш?

7. На рисунке представлен правильный шестиугольник, на сторонах которого отмечены середины. Какая доля площади шестиугольника закрашена?



8. Найти максимальное значение функции

$$f(x) = \sin x + \cos x + \sin 3x - \cos 3x.$$

9. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O – прямые. Площади боковых граней равны S_1 , S_2 и S_3 . Найти площадь основания.

10. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 10 \\ y^3 + xy^2 = 2 \end{cases}$$