Решения задач олимпиады памяти В.Р.Фридлендера

Казань, 10.04.2022

Задача 1. Замените звездочки в выражении ** + *** = **** цифрами так, чтобы получилось числовое равенство и каждое из двух слагаемых, а также их сумма не менялись бы при чтении справа налево и слева направо.

Ответ. 22 + 979 = 1001.

Решение. Заметим, что левая часть не превосходит 99 + 999 = 1098. Значит, правая часть в силу требования симметричности записи равна 1001.

Первая (а, значит, и третья цифра) второго слагаемого равны 9, иначе сумма чисел в левой части меньше 1000. Осталось определить одну цифру x в первом слагаемом и одну цифру *y* во втором так, чтобы выполнялось равенство

$$10x + x + 909 + 10y = 1001 \Leftrightarrow 10(x + y) + x = 92 \Leftrightarrow x = 2 \ \text{ и } \ y = 7$$

Можно также использовать при решении признак делимости на 11.

Задача 2. На склад завезли сок в картонных упаковках (сечение упаковок квадратное). Начальник велел кладовщику расставить их квадратом. Тот заметил, что число упаковок совпадает с номером года. Однако до квадрата не хватило четырёх упаковок, и кладовщик решил переставить их прямоугольником (но, конечно, не в линию). Это удалось сделать единственным образом. В каком году это было?

Ответ. 2021.

Решение. На склад завезли $\mathrm{n}^2 - 4$ упаковок. Это число раскладывается как $(\mathrm{n} - 2)(\mathrm{n} + 2)$. В силу того, что это разложение единственное, числа $\mathrm{n} - 2$ и $\mathrm{n} + 2$ – простые. Это выполняется для $\mathrm{n} = 45$, то есть для $\mathrm{n}^2 - 4 = 2021$. Предыдущее такое число получается при $\mathrm{n} = 39$, но в $37 \cdot 41 = 1517$ году вряд ли существовали картонные упаковки для сока.

Задача 3. В цехе заменили все старые одинаковые прессы на новые одинаковые более высокой производительности. До реконструкции в цехе штамповалось 3969 деталей в день, а после – 5600. Сколько прессов стало в цехе, если их количество увеличилось на 5.

Ответ. Стало 32 пресса.

Решение. Обозначим число новых прессов через n. По условию производительность новых станков больше, чем старых, поэтому $\frac{5600}{n} > \frac{3969}{n-5}$, откуда $n \geq 18$.

Число $n - 5$ не делится на 2 и 5, так что и n не делится на 5. Значит, n является чётным делителем числа 5600/5 = 224, $n = 2k$, k – делитель 112, $k \geq 9$. Остаются такие варианты:

k	16	14	28	56	112
n	32	28	56	112	224
$\mathrm{n} - 5$	27	23	51	107	219

Делителем 3969 в последней строке является только 27.

Задача 4. В одном ряду стоит n кресел. Маша, Саша и Паша хотят сесть на эти места с соблюдением социальной дистанции: никакие двое людей не должны сидеть рядом. Сколькими способами можно это сделать?

(6-7) n = 8. (8-11) n = 10.

Ответ. а) 120 б) 336.

Решение. Заметим, что разные рассадки отличаются числом пустых кресел между людьми (и порядком людей слева направо). Рассадим ребят с учетом социальной дистанции. Теперь уберем по одному креслу между «соседними» людьми. Получим $n-2$ кресла, на которых люди сидят произвольно. Вариантов рассадки будет $(n-2)(n-3)(n-4) = A_{n-2}^3$.

Задача 5. У Пети есть фишки черного и белого цветов. Он расположил 9 фишек в ряд. Докажите, что обязательно найдётся пара фишек одного цвета, между которыми точно посередине будет расположена фишка такого же цвета.

Решение. Попробуем разместить фишки так, чтобы условие задачи не было выполнено. Ясно, что никакие три подряд идущие фишки не могут быть одного цвета. Например, среди фишек с номерами 4, 5 и 6 должны быть две белые и одна черная (или наоборот).

В таблицах указано, цвет каких фишек однозначно определяется, если две заданные фишки одного цвета. Рассмотрим вначале позицию «БЧБ»:

Позиции	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				Б	Ч	Б			
4, 6 -> 2 и 8		*Ч*		**Б**	Ч	**Б**		*Ч*	

Итак, на позициях 2, 5, 8 стоят черные фишки, противоречие.

Следующая позиция «ББЧ» (позиция «ЧББ» зеркально симметрична). Будем достраивать ее по одной фишке так, чтобы условие не выполнялось.

Позиции	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				Б	Б	Ч			
4, 5 -> 3			*Ч*	**Б**	**Б**	Ч			
3, 6 -> 9			**Ч**	Б	Б	**Ч**			*Б*
5, 9 -> 7 и 1	*Ч*		Ч	Б	**Б**	Ч	*Ч*		**Б**
6, 7 -> 8	Ч		Ч	Б	Б	**Ч**	**Ч**	*Б*	Б
5, 8 -> 2	Ч	*Ч*	Ч	Б	**Б**	Ч	Ч	**Б**	Б

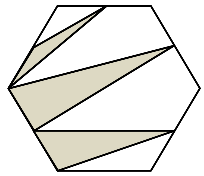
На позиции 2 не может стоять черная фишка из-за тройки 1, 2, 3. Противоречие.

Задача 6. Три подруги участвуют в телешоу. Имеется 7 шляп различных цветов, которые они видели заранее. Каждой надевают шляпу и усаживают так, что Аня видит шляпы на Варе и Гале, Варя – только на Гале, а Галя не видит ни одной. Их просят вслух назвать цвет своей шляпы. Если по крайней мере двое угадают, то команда выиграет. Как им договориться (до начала конкурса), чтобы гарантировать выигрыш?

Решение: Перенумеруем цвета числами от 1 до 7. Первым свой цвет должна назвать Аня. Она называет такой цвет, чтобы сумма цветов всех трёх шляп делилась на 7. Например, если она видит на подругах цвета 5 и 7, то она должна назвать 2.

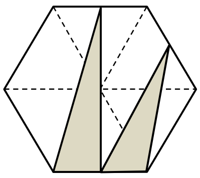
Теперь Варя точно должна знать свой цвет, так как он услышала цвет Ани, видит цвет Гали и знает, что сумма чисел делится на 7. Галя также точно определяет свой цвет по данной информации. То есть по крайней мере Варя и Галя называют свои цвета правильно.

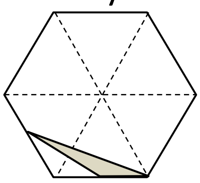
Задача 7. На рисунке представлен правильный шестиугольник, на сторонах которого отмечены середины. Какая доля площади шестиугольника закрашена?



Ответ. 1/3.

Решение. Шестиугольник можно разбить на 6 одинаковых





правильных треугольников со стороной a, высотой h и площадью S каждый. Заметим, что каждый из закрашенных треугольников имеет сторону длиной $a/2$. Значит, осталось только найти их высоты. Как можно понять из рисунка, они равны $2h$, $3h/2$ и $h/2$. Значит, площадь закрашенной фигуры составляет $\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)S = 2S$, то есть треть от площади шестиугольника.

Задача 8. Найти максимальное значение функции

$$f(x) = \sin x + \cos x + \sin 3x - \cos 3x$$

Ответ. $\mathbf{2\sqrt{2}}$.

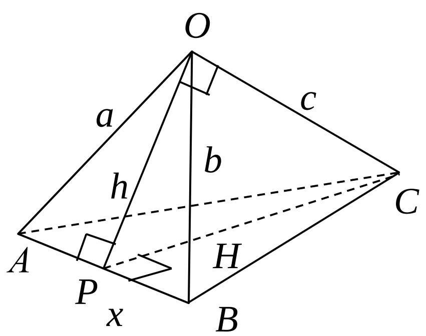
Решение. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Каждое из этих двух выражений имеет максимум, равный $\sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

Задача 9. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O – прямые. Площади боковых граней равны S_1, S_2 и S_3. Найти площадь основания.

Ответ. $\boldsymbol{S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}$



Решение. *1 способ*. Пусть боковые ребра пирамиды равны a, b и c, $AB = x$, h – высота боковой грани, H – основания (как на рисунке). Имеем $ab = 2S_1$, $bc = 2S_2$, $ca = 2S_3$.

Ребро OC перпендикулярно грани OAB, а, значит, и любой прямой на ней. Из треугольника POC получаем, что $H^2 = h^2 + c^2$, приравнивая два выражения для площади POC, получаем, что $hx = ab$. Искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}xH = \frac{1}{2}x\sqrt{h^2 + c^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{(ab/x)^2 + c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + c^2x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(2S_1)^2 + (2S_2)^2 + (2S_3)^2}$$

2 способ. Пусть x, y, z -- длины ребер основания. По теореме Пифагора:

$$x^2 = a^2 + b^2; \quad y^2 = b^2 + c^2; \quad z^2 = c^2 + a^2$$

По теореме косинусов $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma$, откуда $2xy\cos\gamma = x^2 + y^2 - z^2 = 2b^2$. Но $S = \frac{1}{2}xy\sin\gamma$, тогда

$$4S^2 = x^2y^2\sin^2\gamma = x^2y^2(1-\cos^2\gamma) = (a^2+b^2)(b^2+c^2) - b^4 =$$
$$= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

То же можно получить через формулу Герона.

Задача 10. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 10 \\ y^3 + xy^2 = 2 \end{cases}$

Ответ: $(\mathbf{1};\mathbf{1})$, $\left(\frac{\mathbf{5+3\sqrt{5}}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right)$, $\left(\frac{\mathbf{5-3\sqrt{5}}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right)$.

Решение. Прибавим к первому уравнению второе, умноженное на 27, получим $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 64$. Левая часть представляет собой куб суммы, то есть $(x+3y)^3 = 64$, $x + 3y = 4$. Подставим $x = 4 - 3y$ во второе уравнение системы, получаем $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$. Разложим левую часть на множители: $y^2(y-1) - (y^2-1) = (y-1)(y^2-y-1) = 0$. Значит, один из корней – $y = 1$, два других получим, решив квадратное уравнение.
