Задачи олимпиады памяти В.Р.Фридлендера

Казань, 9.04.2023

6-7 класс

Задача 1. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что $p^2 - q^2 = r$.

Задача 2. Вовочка за год написал 30 контрольных, причем имел оценки всех типов, от 2 до 5. Двоек и пятерок было поровну, а троек больше, чем четверок. Может ли оказаться, что сумма оценок равна: а) 100? б) 105?

Задача 3. Через $\max(,)$ обозначается наибольшее из списка чисел, через $\min(,)$ – наименьшее. Какое из чисел больше:

$$A = \max(a, b) - \max(a, b, c) + \max(b, c) - \max(a, b, c) + \max(c, a)$$
$$B = \min(a, b) - \min(a, b, c) + \min(b, c) - \min(a, b, c) + \min(c, a)$$

Задача 4. Учитель нарисовал четыре луча с началом в одной точке. Шестеро учеников измерили углы между этими лучами (каждый для своей пары), у них получились числа $30°, 40°, 50°, 70°, 90°, 150°$. Могло ли быть так, что все произвели измерения верно?

Задача 5. Периметр треугольника равен 23, а длины сторон являются натуральными (целыми положительными) числами. Сколько существует таких треугольников?

Задача 6. Кубик $1 \times 1 \times 1$ раскрашен в 3 цвета (каждая пара противоположных граней – в один цвет). Из восьми таких одинаковых кубиков составляют куб $2 \times 2 \times 2$, причем прикладывают друг к другу гранями одного цвета. Можно ли сделать это так, что на каждой грани большого куба присутствуют по крайней мере 2 цвета?

8-11 класс

Задача 1. Вовочка написал 15 контрольных, причем имел оценки всех типов, от 2 до 5. Двоек и пятерок было поровну, а троек больше, чем четверок. Чему может оказаться равна сумма его оценок?

Задача 2. Квадратный многочлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ — составное.

Задача 3. Учитель нарисовал четыре луча с началом в одной точке. Шестеро учеников измерили углы между этими лучами (каждый для своей пары). У пятерых из них получились числа $30°, 40°, 50°, 70°, 90°$. Шестой ученик измерял самый большой угол. Какой результат у него получился?

Задача 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Постройте прямую, проходящую через точку A, которая делит площадь четырехугольника пополам.

Задача 5. В день, когда не работает столовая, 26 одноклассников приносят из дома свои домашние обеды. Некоторые школьники угощают кого-то из одноклассников. Каждый школьник может получить угощение от любого количества одноклассников, однако сам угощает не более чем двоих. Доказать, что можно найти 6 человек, ни один из которых не угощает другого из этих шести.

Задача 6. В школе учится 2023 школьника, причем некоторые являются фанатами спортивных команд. Оказалось, что у каждых двух команд ровно один общий фанат, и ни у каких трех команд общих фанатов нет. Каким может быть наибольшее число команд, у которых есть фанаты в этой школе?