Решения задач олимпиады им. Фридлендера, апрель 2024

6-7 класс

Задача 1. В магазине стоит в ряд 13 коробок с кошачьим кормом, причем в каждых четырех коробках, стоящих подряд, суммарно по 34 пакетика, а всего в 13 коробках их 125. После того, как часть корма раскупили, мерчандайзер переложил их так, что снова в каждых четырех коробках подряд стало по 34 пакета.

Какое максимальное число пакетиков могло быть раскуплено к этому времени?

Ответ: 23.

Решение. Обозначим количество корма в коробках через $a, b, c, d, e, \dots$ По условию $a + b + c + d = b + c + d + e = 34$, откуда $e = a$. Аналогично и далее, элементы последовательности повторяются через 4, то есть она имеет вид $a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d, a$. Сумма всех этих чисел равна $S = 3(a + b + c + d) + a = 3 \cdot 34 + a = 102 + a$.

Наименьшая общая сумма получится при $a = 0$, $b + c + d = 34$, при этом $S = 102$. Значит, раскуплено 125 – 102 = 23 пакетика.

Замечание. В условии задачи есть лишняя информация: не важно, как были разложены пакетики в начальный момент, важно только их общее количество.

Задача 2. Учителям выдали маркеры синего цвета. После этого закупили маркеры наборами (в каждом один черный и один синий) и стали выдавать по мере надобности, не вскрывая упаковок.

К концу одного из понедельников синих маркеров было выдано в четыре раза больше, чем черных. А к концу одного из четвергов синих оказалось выдано в пять раз больше, чем черных. а) Какой из этих дней был раньше? б) Верно ли, что в какой-то момент синих маркеров было выдано в 13 раз больше, чем черных?

Ответ: а) Раньше был четверг. б) Да, верно.

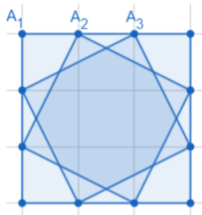
Решение. Пусть вначале было выдано s синих маркеров. Далее их выдавали поровну. Пусть к концу понедельника было выдано x наборов, а к концу четверга – y. Тогда в понедельник было выдано $s + x$ синих и x черных маркеров. По условию синих в этот момент было в 4 раза больше, значит, $s + x = 4x$. Аналогично, $s + y = 5y$. Решая эти уравнения, получаем, что $x = \frac{s}{3}, y = \frac{s}{4} < x$. То есть четверг был раньше.

Кроме того, s делится и на 3, и на 4, то есть $s = 12k$, где k – некоторое натуральное число. Тогда $y = 3k$. Существовал более ранний момент, когда было выдано k упаковок. В этот момент общее количество синих маркеров равно $12k + k = 13k$, а черных – k. Кстати, после выдачи $2k$ упаковок, синих маркеров было выдано в 7 раз больше, чем черных.

Задача 3. Четверка точек называется правильной, если они расположены в вершинах квадрата. 35 точек размещены в вершинах квадратной сетки 7×5. Сколько правильных четверок из них можно составить? Замечание: стороны квадрата не обязательно должны быть параллельны сторонам сетки.

Ответ: 90.

Решение: Для каждой правильной четверки точек есть квадрат, стороны которого параллельны сетке и наши точки расположены на его границе. Будем называть его базовым. Наша задача – посчитать число базовых квадратов каждого размера, вписывающихся в сетку 7×5, и число правильных четверок на границе базового квадрата.



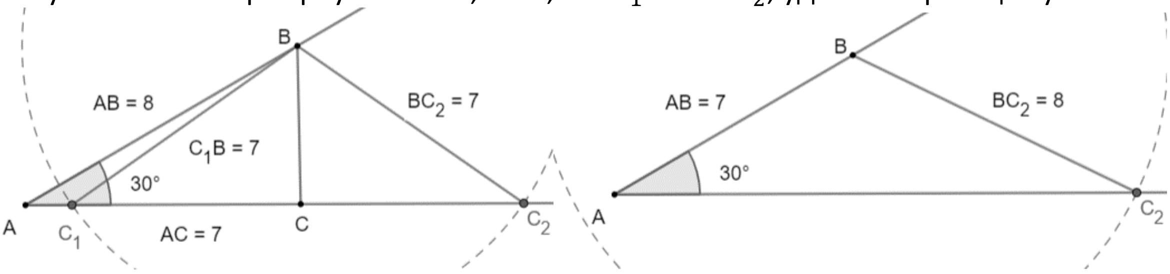
Например, базовых квадратов со стороной 1 будет $6 \cdot 4 = 24$, в каждом 1 правильная четверка. Аналогично, для квадрата со стороной a имеется $(7-a)(5-a)$ базовых квадратов, в каждом a правильных четверок. Запишем данные в таблицу:

Сторона базового квадрата	1	2	3	4	Итого
Базовых со стороной a	24	15	8	3	
Всего	24	30	24	12	90

Задача 4. Сколько существует различных треугольников, один угол которых составляет $30°$, а две стороны по длине равны 7 и 8?

Ответ: Четыре.

Решение. Рассмотрим сначала треугольники, у которых сторона AB = 8 примыкает к заданному углу. Тогда размер 7 может иметь или сторона AC или сторона BC. Последний случай реализуется двумя способами: на левом рисунке они помечены как BC_1 и BC_2. Итак, в этом случае имеется три треугольника, ABC, ABC_1 и ABC_2, удовлетворяющих условию.



Если же сторона 8 лежит напротив угла $30°$, такой треугольник только один, так как точка C_1 в этом случае не попадает на сторону треугольника (см. правый рисунок).

Задача 5. Найти наименьшее составное число, из которого нельзя получить простое, произведя замену одной цифры.

Ответ: 200.

Решение: Однозначное число можно превратить в 2 (или 3, или 5, или 7). Пусть искомое число двузначное, например, вида $\overline{1a}$, то есть начинается с 1. Можно заменить a на 1 или 3, и число станет простым. Аналогично, число $\overline{2a}$ можно превратить в 23, число $\overline{3a}$ – в 31 и так далее. Легко проверить, что в первом, втором, ..., девятнадцатом десятке есть хотя бы одно простое число. Рассмотрим теперь число 200. Если мы изменим первую или вторую цифры, получим число, заканчивающиеся на 0, то есть делящееся на 2 и 5. Попробуем менять последнюю цифру. Если она четная, то число тоже четное. Числа 201, 203, 205, 207 и 209 также составные (делятся на 3, 7, 5, 3 и 11 соответственно). Итак, число 200 никакой заменой цифры нельзя превратить в простое.

Решения задач олимпиады им. Фридлендера, апрель 2024

8-11 класс

Задача 1. В классе 25 учеников. Учитель написал на доске натуральное число и попросил класс назвать его делители. Первый ученик сказал: «1 – это делитель», второй – «2 – это делитель», …, последний – «25 – это делитель», то есть ученик с номером k сказал, что k – делитель данного числа. Учитель заметил, что было два неверных ответа и они шли подряд. Какие ученики дали неверные ответы?

Ответ: Ученики 16 и 17.

Решение. Посмотрим, какой номер n может быть у ученика, давшего неверный ответ. Если число не делится на n, то оно не делится и на $2n$. Ясно, что $n > 1$, так что $2n > n+1$, поэтому ученик с номером $2n$ не может ошибиться. Значит, $2n > 25$, откуда $n > 12$.

Возможен вариант, когда n – простое число, подходят числа 13, 17, 19, 23.

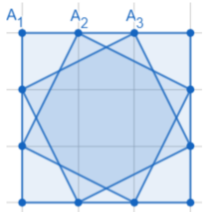
Пусть теперь $n = p^k q$, где p – простое, $q > 1$ не делится на p. По условию и p^k, и q – делители заданного числа (так как каждое не больше $\frac{n}{2} < n - 1$), тогда n делится на $\text{НОД}(p^k, \text{q})$. Заметим, что $\text{НОД}(p^k, q) \leq n$, но не может быть равно n. Значит, p^k и q имеют общий делитель, что противоречит выбору q. Итак, $q = 1$ и $n = p^k$, причем $p^{k+1} > 25$. Подходят числа $2^4 = 16$, $3^2 = 9$ и $5^2 = 25$.

В этих наборах есть только два числа, стоящие рядом – это 16 и 17.

Замечание. Можно показать, что искомое число существует – например, это НОК чисел от 1 до 25, кроме 16 и 17.

Задача 2. Четверка точек называется правильной, если они расположены в вершинах квадрата. Двести точек размещены в вершинах квадратной сетки 20×10. Сколько правильных четверок из них можно составить? Замечание: стороны квадрата не обязательно должны быть параллельны сторонам сетки.

Ответ: 2475.



Решение: Для каждой правильной четверки точек есть квадрат, стороны которого параллельны сетке и наши точки расположены на его границе. Назовем его «базовым». Наша задача – подсчитать число базовых квадратов каждого размера и число правильных четверок на границе базового квадрата.

Число базовых квадратов со стороной a равно $(10 - a)(20 - a)$. Посчитаем число правильных четверок, расположенных на границе. Оно равно a.

Чтобы найти общее число правильных четверок, надо просуммировать произведения $a(20 - a)(10 - a)$, где a пробегает значения от 1 до 9.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сумма
$a(20 - a)(10 - a)$	171	288	357	384	375	336	273	192	99	2475

Можно вычислить сумму ещё таким способом:

$$1 \cdot 9 \cdot 19 + 2 \cdot 8 \cdot 18 + 3 \cdot 7 \cdot 17 + 4 \cdot 6 \cdot 16 + 5 \cdot 5 \cdot 15 + 6 \cdot 4 \cdot 14 + 7 \cdot 3 \cdot 13 + 8 \cdot 2 \cdot 12 + 9 \cdot 1 \cdot 11$$

Сложим первое слагаемое с последним, второе с предпоследним и т.д. Получим сумму

$$1 \cdot 9 \cdot 30 + 2 \cdot 8 \cdot 30 + 3 \cdot 7 \cdot 30 + 4 \cdot 6 \cdot 30 + 5 \cdot 5 \cdot 15 =$$
$$= 30(1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6) + 5 \cdot 5 \cdot 15 = 30 \cdot 70 + 25 \cdot 15 = 2100 + 375 = 2475$$

Этот способ суммирования позволяет обобщить ответ на любые размеры исходной сетки точек.

Задача 3. В стране N городов, причем каждый город соединен прямым авиасообщением не менее, чем со 100 другими. Какое наименьшее значение может быть у N, если существует пара городов, кратчайший маршрут между которыми состоит из 8 перелетов.

Ответ. 305.

Решение. Представим схему городов в виде вершин графа и используем метод подвешивания за вершину. Город, в котором начинается самый длинный маршрут, поместим в первый ярус. Города, с которыми он соединен авиасообщением – во второй ярус. Этот процесс продолжаем, помещая в следующий ярус новые города, в которые можно попасть из текущего. Так как в маршруте 8 перелетов, то в графе будет не менее 9 ярусов. Пусть n_1, n_2, n_3 …,– количество городов в соответствующем ярусе ($n_1 = 1$). По построению, любой город может быть соединен только с городами своего яруса, а также предыдущего и последующего. Поэтому условие, что каждый город соединен не менее чем со 100 другими, приведет к системе неравенств:

$$n_1 + n_2 \geq 101,\quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 101, n_2 + n_3 + n_4 \geq 101, \dots, n_8 + n_9 + n_{10} \geq 101$$

Требуется минимизировать сумму

$$N = (n_1 + n_2) + n_3 + (n_4 + n_5 + n_6) + n_7 + (n_8 + n_9 + n_{10}) + \dots \geq 303 + n_3 + n_7 \geq 305$$

Значит, в стране не может быть меньше 305 городов. Этот вариант реализуется, например, если будет 9 ярусов со следующим числом городов: 1; 100; 1; 1; 99; 1; 1; 100; 1. При этом каждый город должен быть соединен со всеми городами своего яруса, а также городами предыдущего и последующих ярусов.

Задача 4. Кузнечик в начальный момент времени находился в точке с координатой m, каждую последующую секунду он прыгает на n единиц вправо (m и n – натуральные числа). Петя каждую секунду, начиная с первой, выбирает какую-то точку и проверяет, есть ли в ней кузнечик. Сможет ли Петя обнаружить кузнечика за конечное время, если числа m и n ему заранее неизвестны?

Ответ: да.

Решение. Назовем пару (m, n) характеристикой кузнечика. Запишем всевозможные характеристики (m, n) в виде последовательности:

(1; 1); (1; 2), (2; 1); (1; 3), (2; 2), (3; 1); (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1); (1; 5), …

(выписываем все пары с суммой 2, с суммой 3, суммой 4 и т.д.). Каждая конкретная характеристика кузнечика встречается в этом списке на месте с конечным номером k. Пару, стоящую на месте номер k, обозначим через (m_k, n_k).

В момент времени t кузнечик будет в точке $m + nt$. Петя может выяснить, в какой точке будет кузнечик с характеристикой номер k в момент времени $t = k$. Получим такие значения:

Номер k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Характеристика	(1;1)	(1;2)	(2;1)	(1;3)	(2;2)	(3;1)	(1;4)	(2;3)	(3;2)	(4;1)	…
Где кузнечик в момент $t = k$	2	5	5	13	12	9	29	26	21	14	…

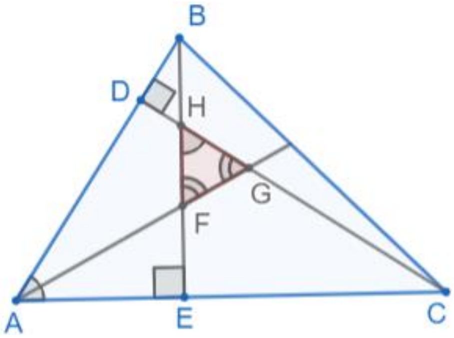
Пете в момент времени t надо искать кузнечика в позиции $m_t + n_t \cdot t$. То есть на первой секунде в точке с координатой 2, на второй – с координатой 5, на третьей – также с координатой 5 и т.д. В тот момент t, когда реальная характеристика кузнечика совпадет с (m_t, n_t), Петя обнаружит кузнечика.

Приведенный алгоритм – не единственный, у него могут быть варианты.

Замечание. При таком образе действий Петя может поймать кузнечика и раньше намеченного времени. Например, кузнечик с характеристикой (3; 1) на второй секунде будет в точке 5, которую мы в этот момент проверяем. В то время как по приведенному алгоритму его найдут через 6 секунд в точке 9. Но в задаче не требуется указать точное время и место поимки. Главное, что каждый кузнечик будет заведомо пойман когда-то.

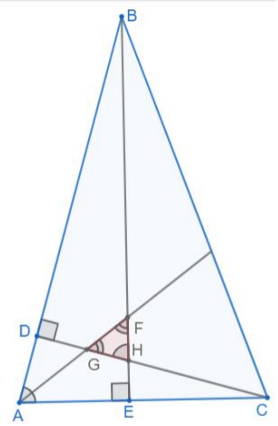
Задача 5. В остроугольном треугольнике из двух вершин проведены высоты, а из третьей – биссектриса угла. Они ограничивают некоторый треугольник. Может ли этот треугольник быть подобен исходному?

Ответ: Нет, не может.



Решение. Пусть из точки A проведена биссектриса, а из точек B и C – высоты. Высоты пересекаются в точке H, а биссектриса пересекает высоты в точках F и G.

Угол $\angle H$ треугольника FGH равен $\alpha = \angle BAC$, (см., например, треугольник BDH). Угол $\angle F$ равен $\angle AFE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, значит, и третий угол равен $\angle G = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle F$. Итак, треугольник FHG – равнобедренный.



У треугольников ABC и HFG углы $\angle A$ и $\angle H$ совпадают. Если эти треугольники подобны, то треугольник ABC также равнобедренный, то есть угол $\angle B$ равен углу $\angle C$. Но тогда биссектриса является высотой и проходит через точку H. Треугольник вырождается в точку.

Замечание. Вообще говоря, вершины треугольника FGH могут быть расположены и в другом порядке, то есть G ближе к A, чем F. В этом случае рассуждение остается таким же, надо просто поменять местами обозначения вершин B и C.