Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по астрономии,

заключительный этап, 2022/23 учебный год

10-11 класс

Краткие решения

11.1. Самый эффективный способ выработки энергии во Вселенной – трансформация гравитационной энергии падающего на компактный релятивистский объект (например, чёрную дыру (ЧД)) тела в другие виды энергии (тепловую, кинетическую, энергию излучения и т. п.). При этом высвобождение энергии приводит к уменьшению массы покоя падающего на ЧД тела, в соответствии с формулой эквивалентности массы и энергии. А падающее по спирали вещество образует аккреционный диск, внутренний радиус которого равен радиусу последней устойчивой орбиты. Расчёты показывают, что он равен 3R_s, где R_s - радиус Шварцщильда (горизонт событий ЧД).

Какую максимальную энергию (в долях исходной массы покоя падающего тела) можно получить в этом процессе? Релятивистскими эффектами при падении вещества на ЧД пренебречь. Падение вещества считать начинающимся с бесконечно большого расстояния. *(25 баллов)*

Решение. Проанализируем, какой энергией обладало вещество в начале своего движения. Так как по условию оно находилось на бесконечно большом расстоянии, то потенциальная энергия

$$E_P = -\frac{GMm}{R} \quad (1) \quad \textbf{(2 балла)}$$

*стремится к нулю **(2 балла)**, а так как скорость вещества относительно ЧД крайне мала, то и кинетическая энергия также стремится к нулю **(2 балла)**, и, следовательно, полная энергия вещества в начале движения равна нулю **(2 балла).** Теперь рассмотрим полную энергию вещества, когда она окажется на расстоянии 3R_s от центра ЧД. Рассмотрим её движение по окружности радиуса 3R_s, так как это самая низкая устойчивая орбита.*

В таком случае, приобретя скорость, равную первой космической для данной системы, вещество обрело кинетическую энергию

$$E_K = \frac{mv^2}{2} \quad (2) \quad \textbf{(2 балла)}$$

так же вещество обрело потенциальную энергию

$$E_P = -\frac{GMm}{3R_S} \quad (3) \quad \textbf{(2 балла)}$$

Разница их суммы и начальной полной энергии и есть та энергию ΔE, которую вещество рассеивает, чтобы перейти на самую низкую устойчивую орбиту (круговую). Формально это запишется как

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{3R_S} + \Delta E = 0 \quad (4) \quad \textbf{(4 балла)}$$

*Теперь обратимся к определению радиуса Шварцщильда: вторая космическая скорость на расстоянии R_s равна скорости света **(4 балла).***

В итоге для R_s у нас получается значение

$$R_s=2GM/c^2 \quad (5)$$

Далее выражаем скорость света, для неё получается:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}} \quad (6)$$

Запишем уравнение для первой космической скорости на орбите 3R_S (используем формулу круговой скорости, так как орбита с полуосью 3R_S является самой низкой устойчивой круговой)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{3R_S}} \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) получаем:

$$v^2 = \frac{c^2}{6} \quad (8)$$

Преобразовав (6), получаем:

$$\frac{GM}{R_S} = \frac{c^2}{2} \quad (9)$$

(8) и (9) подставляем в (4):

$$\frac{mc^2}{12} - \frac{mc^2}{6} + \Delta E = 0 \quad (10)$$

$$\Delta E = \frac{mc^2}{12} \quad \textbf{\textit{(5 баллов)}}$$

или в долях исходной массы покоя

$$\frac{\Delta E}{c\hat{}2} = \frac{1}{12} m$$

Ответ: $\Delta E = \frac{mc^2}{12}$ *или* $\frac{\Delta E}{c\hat{}2} = \frac{1}{12} m.$

11.2. В каком диапазоне может изменяться угловое удаление от Солнца для Меркурия в момент наибольшей элонгации при наблюдении с Земли? Орбиту Земли считать круговой. *(15 баллов)*

Дано:

$e_з=0$ *(орбита круговая)*

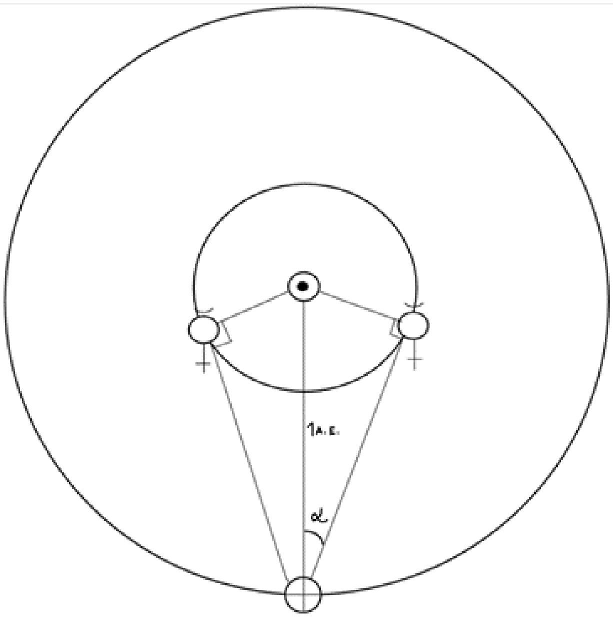
$a_з=1$ *а.е.*

$e_м=0{,}21$

$a_м=0{,}38$ *а.е.*

Решение:

Для начала нужно разобраться с расположением Меркурия на орбите, соответствующим наибольшей элонгации.



Элонгация планеты - угол Солнце-Земля-планета. Максимальная элонгация внутренней планеты наблюдается в момент, когда прямая Земля-планета является касательной к орбите планеты, то есть угол Солнце-планета-Земля – прямой. ***(3 балла)***

Мы ищем диапазон углов, потому что Меркурий может находиться в максимальной элонгации, будучи в перигелии или афелии своей орбиты. Для этих двух случаев угол Солнце-Земля-Меркурий будет разным (назовём его α). ***(4 балла)***

Так как орбиту Земли считаем круговой, расстояние между Солнцем и Землёй (как радиус орбиты) однозначно – 1 а.е. ***(1 балл)***

Для нахождения данного угла необходимо также знать расстояние от Солнца до Меркурия (перигелийное и афелийное).

Формула для нахождения афелийного расстояния:

$$Q = a(1+e) \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

$$Q = 0{,}38 \text{ а.е.}(1+0{,}21) = 0{,}46 \text{ (а.е.)} \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

Формула для нахождения перигелийного расстояния:

$$q = a(1-e) \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

$$q = 0{,}38 \text{ а.е.}(1-0{,}21) = 0{,}30 \text{ (а.е.)} \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

Для Меркурия в афелии: посчитаем синус угла разделив афелийное расстояние (катет прямоугольного треугольника) на расстояние от Земли до Солнца (гипотенуза)

$$sin\,\alpha = \frac{0{,}46}{1}\ \text{а. е.}$$

$$sin\,\alpha = 0{,}46$$

$$arcsin(0{,}46) = 27{,}39^o = 27^o23' \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

Для Меркурия в перигелии: посчитаем синус угла разделив перигелийное расстояние (катет прямоугольного треугольника) на расстояние от Земли до Солнца (гипотенуза)

$$sin\,\alpha = \frac{0{,}30}{1}\ \text{а. е.}$$

$$sin\,\alpha = 0{,}30$$

$$arcsin(0{,}30) = 17{,}46^o = 17^o27' \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

Итак, диапазон изменения углового удаления от Солнца для Меркурия в момент наибольшей элонгации при наблюдении с Земли:

$$17^o27' \le \alpha \le 27^o23' \quad \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

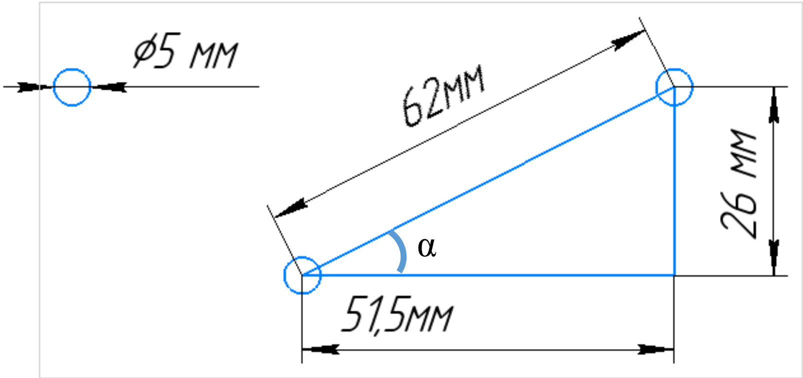
Ответ: $17^o27' \le \alpha \le 27^o23'$.

11.3. На один кадр снято два изображения Луны вблизи горизонта. Снимок сделан 22 сентября. Вычислите широту места наблюдения и интервал времени между моментами съёмки Луны.
(15 баллов)

Решение. 22 сентября (осеннее равноденствие) склонение Солнца равно 0^o, ***(1 балл за склонение Солнца и 1 балл за пояснение о равноденствии)*** *т.е. оно двигается вблизи плоскости небесного экватора. Орбита Луны наклонена к плоскости эклиптики примерно на 5^o, следовательно, её движение по небу в установленную дату также происходит вблизи небесного экватора* ***(2 балла).*** *Это позволяет нам установить широту места наблюдения, вычислив угол между горизонтом и траекторией Луны, параллельной небесному экватору.*

$$\varphi = 90^o - \alpha \ \textbf{\textit{(2 балла)}}$$

где α – угол между плоскостями небесного экватора и горизонта.
Для нахождения угла α сделаем чертёж с сохранением линейных размеров с фото:



Найдём $tg\,\alpha$*:*

$$tg\,\alpha = \frac{26}{51,5} => \alpha = 26.79^o \textit{ (1 балл)}$$

Тогда широта местности:

$$\varphi = 90^o - \alpha = 90^o - 26.79^o = 63.21^o \textit{ (1 балл)}$$

В условии задачи не указано полушарие, в котором был сделан снимок, значит возможен также вариант $\varphi = -63.21^o$ *для южного полушария.* ***(2 балла)***

Найдём временной промежуток между двумя фотографиями. Знаем, что угловой диаметр лунного диска на небе – 0.5° ***(2 балла)****, линейный диаметр диска на фото – 0.5 см.*

Расстояние между центрами дисков вычисляем:

1. *прямыми измерениями: 6.2 см*

Находим отношение расстояния к диаметру диска: $\frac{6,2}{0,5} = 12.4$

и путь, который прошла Луна: $\Delta S = 12.4 * 0.5^o = 6.2^o$.

Луна движется в плоскости небесного экватора, значит её угловая скорость составляет ω=14,5°/час.

Искомое время: $\Delta t = 6,2^o * \frac{60}{14,5^o} = 25.7$ мин.

2. *косвенно:* $\sqrt{51,5^2 + 26^2} = 5.8$ см

Найдём отношение расстояния к диаметру диска:$\frac{5,8}{0,5} = 11.6$

и путь, который прошла Луна: $\Delta S = 11.6 * 0.5^o = 5.8^o$.

Луна движется в плоскости небесного экватора, значит её угловая скорость составляет ω=14.5°/час.

Искомое время: $\Delta t = 5.8^o * \frac{60}{14.5^o} = 24$ мин. ***(3 балла за верное решение любым из способов)***

Ответ даётся с точностью 24 ± 2 мин.

11.4. Некая звезда имеет параллакс 0.01'', а линия водорода в её спектре, имеющая лабораторную длину волны 4861.3 Å, наблюдается с длиной волны 4861.8 Å. При этом видимое перемещение звезды в картинной плоскости (т. е. перпендикулярно лучу зрения) отсутствует. Через сколько лет блеск звезды для наблюдателя на Земле возрастёт на 5^m? 1 Ангстрем (1Å) = 10^{-10} м. ***(20 баллов)***

Решение. ***Если участник определил, что звезда удаляется, и указал, что ее блеск никогда не возрастет, то задача оценивается в 20 баллов. В противном случае, задача оценивается критериями ниже и итоговый балл делится пополам.***

r – расстояние от звезды до Солнца.

$$r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0{,}01''} = 100 \text{ пк}$$

(3 балла (2 балла формула и 1 балл численный ответ))

Первый способ нахождения r':

M – абсолютная звездная величина, она является постоянной для конкретной звезды.

$$M = m + 5 - 5\,lg(r) = m' + 5 - 5\,lg(r')$$ ***(3 балла)***

$$m' - m = 5lg(\frac{r'}{r})$$ ***(3 балла)***

По условию звезда приближается, значит звездная величина должна уменьшиться на 5^m

$$m' - m = -5^m$$ ***(3 балла)***

$$-5 = 5lg(\frac{r'}{r})$$

$$lg\left(\frac{r'}{r}\right) = -1$$

$$r' = \frac{r}{10} = 10 \text{ пк}$$ *(конечное расстояние от Солнца до звезды)*

(3 балла (2 балла за формулу и ее обоснование и 1 балл за численный ответ))

Второй способ нахождения r':

Δm=5 => яркость звезды изменилась в 100 раз. ***(3 балла)***

Т.к. звезда приближается, то ее яркость увеличилась. ***(2 балла)***

По закону обратных квадратов:

$$\frac{E}{E'} = \frac{r\prime^2}{r^2} = \frac{1}{100}$$ ***(4 балла)***

$$r' = 0{,}1r = 10 \text{ пк}$$ ***(3 балла)***

Оба способа нахождения расстояния оцениваются в одинаковое количество баллов

$$\Delta\mathrm{r} = \mathrm{r} - \mathrm{r}' = 100 - 10 = 90 \text{ пк}$$ (**1 балл**)

Т.к. перемещение звезды в картинной плоскости отсутствует, лучевая скорость звезды равна ее полной скорости.

По эффекту Доплера:

$$v=\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0}c = \frac{4861.3-4861.8}{4861.3} * 299792 = -30.8 \text{ км/с}$$ ***(2 балла)***

Отрицательная скорость показывает, что звезда движется по направлению к Солнцу, поэтому в расчетах берем модуль полученной скорости

$$T=\frac{\Delta r}{v}=\frac{90*206265*1{,}496*10^8}{30{,}8} = 9 * 10^{13} c = 2{,}87 * 10^6 \text{ земных лет}$$

(2 балла (1 балл за формулу + 1 балл за численный ответ))

*Ответ: 2,87*10⁶ земных лет.*

11.5. На фото, сделанном в декабре 2022 года в Турецкой национальной обсерватории ТЮБИТАК (широта φ = 37°), где расположен телескоп КФУ РТТ-150 с диаметром зеркала 1.5 метра, снято зимнее небо и его отражение в стеклянной поверхности, расположенной под углом α к горизонту. Съёмка ведётся на сверхширокоугольный объектив с полем зрения 170° («фишай»). Оптическая ось камеры параллельна плоскости отражающей поверхности. Перпендикуляр к плоскости зеркала лежит в плоскости небесного меридиана. Определите α - угол наклона зеркальной отражающей поверхности к горизонту. ***(25 баллов)***

Решение.

Из условия следует, что перпендикуляр к плоскости зеркала лежит в плоскости небесного меридиана, следовательно, искомый угол будет отсчитываться от направления на север или на юг. Рассмотрим четыре случая взаимного расположения наблюдателя и отражающей поверхности (см рисунок). Направление на небесный экватор будем отождествлять с верхней звездой пояса Ориона (Минтака, или δ Ori), которая имеет почти нулевое склонение и одновременно недалеко *отстоит от небесного меридиана (сам он проходит между Ригелем и Сириусом). При этом кадре проекция небесного меридиана есть вертикальный диаметр.*

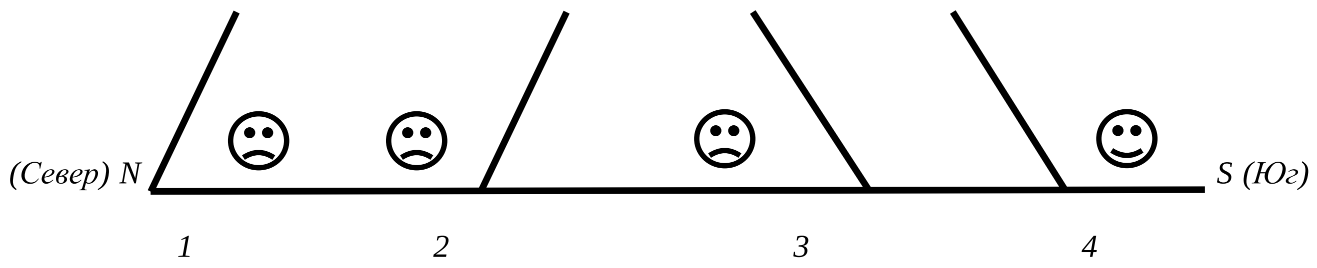


Рис. 1. Четыре случая взаимного расположения наблюдателя (на схеме - смайлик) и отражающей поверхности.

1. *Угол отсчитывается от направления на юг, наблюдатель находится к югу от зеркала. В таком случае небесный экватор либо не будет виден вовсе, либо будет отстоять от плоскости зеркала на угол, не превышающий* φ *(предельный случай, когда искомый угол равен* 90^o*), что не соотносится с оценками, которые можно сделать, опираясь на карту отождествления.*
2. *Угол отсчитывается от направления на юг, наблюдатель находится к северу от зеркала. Тогда мы не будем наблюдать южную часть неба, что противоречит изображению на фото. Иными словами, Орион на указанной широте не бывает к северу от зенита.*
3. *Угол отсчитывается от направления на север, наблюдатель находится к северу от зеркала. Аналогично предыдущему пункту, наблюдатель не сможет запечатлеть южную часть неба.*
4. *Угол отсчитывается от направления на север, наблюдатель находится к югу от зеркала. Наблюдатель свободно обозревает южную часть неба, притом созвездия, ей принадлежащие, наблюдаются «вверх ногами», что можно дополнительно проверить по расположению характерных конфигураций Ориона и Большого Пса.*

Ситуация, описанная в пункте 4, единственная удовлетворяет требованиям изображения, потому будем рассматривать именно её.

Построим схему установки (т.е. более подробно изобразим рис 1.4), вид с запада, плоскость рисунка – небесный меридиан.

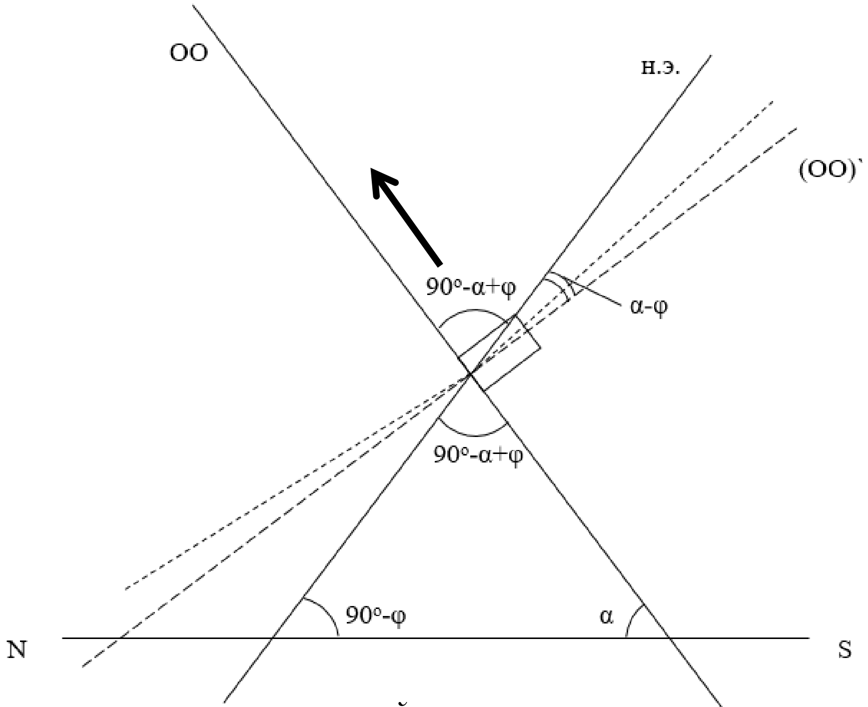


Рис. 2. Схема расположения отражающей поверхности, основных углов и линий .Стрелкой показано направление на центр кадра. На рисунке обозначены:

ОО – оптическая ось,
(ОО)` – перпендикуляр к оптической оси,
н.э. – плоскость небесного экватора,
NS – плоскость математического горизонта,
Короткий унктир ограничивает область зрения камеры.

Отметим углы 90^o-φ (между н.э. и NS) и α (между ОО и NS). Из треугольника, стороны которого лежат на прямых ОО, NS и н.э., найдём угол между ОО и н.э., равный 90^o-α+φ, и вертикальный к нему. Углы между ОО и н.э. и между н.э. и (ОО)` в сумме дают $90^o$, т.к. ОО перпендикулярна к (ОО)`, тогда угол между н.э. и (ОО)` составляет α-φ. ***(максимум 10 баллов за словесное и/или схематичное описание установки)***

С этого момента возможно два равноценных пути решения.

Способ первый:

С другой стороны, угол между н.э. и неким направлением, отсчитываемый в плоскости небесного меридиана (по усл.), есть склонение объекта, находящегося в этом направлении. В нашем случае в направлении (ОО)` находились бы граничные объекты на кадре, но т.к. поле зрения составляет 170^o, т.е. по 85^o ниже и выше ОО, получаем следующее выражение

$$\alpha - \varphi - 5^{o} = \delta \textbf{\textit{ (10 баллов)}}$$

где $\delta=20^o$ (значение устанавливаем с помощью карты отождествления, ориентируясь на узнаваемую фигуру Ориона и положение Сириуса (α СМа) на краю кадра; значение склонения для рассматриваемых объектов отрицательно, однако берём его по модулю, т.к. в решении рассматриваем положительные углы, образуемые определёнными нами условными прямыми) ***(3 балла)****. Тогда*

$$\alpha = \delta + \varphi + 5^{o} = 20^{o} + 37^{o} + 5^{o} = 62^{o} \textbf{\textit{(2 балла)}}$$

Способ второй:
Склонение находящейся в центре кадра звездыотличается от φ на столько же, на сколько накленена к вертикали отражающая поверхность, т.е. на угол α. Поясним это подробнее.

Заметим, что склонением объекта на небесной сфере также является угол между ОО и н.э. По той же карте отождествления можно установить склонение направления ОО (при этом важно использовать объекты вблизи небесного меридиана). ***(6 баллов)*** *Для этого возьмём в рассмотрение β Tau и α Aur, сравнивая угловое расстояние между ними. Сделать это можно двумя путями: непосредственно устанавливая склонение по ближайшим ярким звёздам (сложость состоит в том, что ближайшая α Aur находится на небе довольно далеко от стеклянной поверхности) и сравнивая угловые размеры через линейные расстояния между объектами на кадре (данный способ даёт бóльшую ошибку из-за непостоянства радиального масштаба в данном типе объектива)).* ***(6 баллов)***
Оба пути дают нам значение склонения около 64^o, тогда

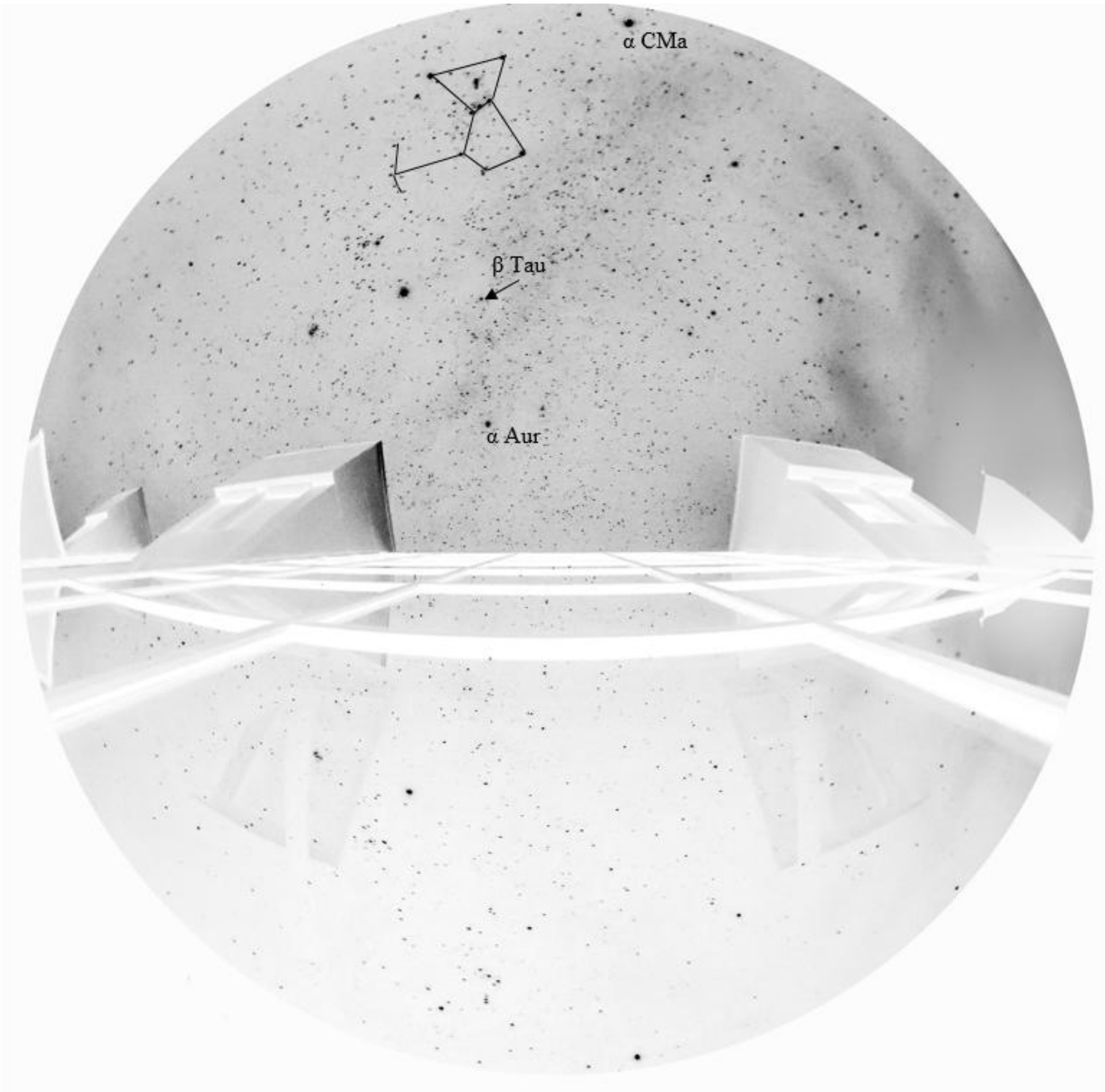
$$90^{\circ} - \alpha + \varphi = \delta \ \textbf{\textit{(2 балла)}}$$

$$\alpha = 90^{\circ} - \delta + \varphi = 90^{\circ} - 64^{\circ} + 37^{\circ} = 63^{\circ} \ \textbf{\textit{(1 балл)}}$$

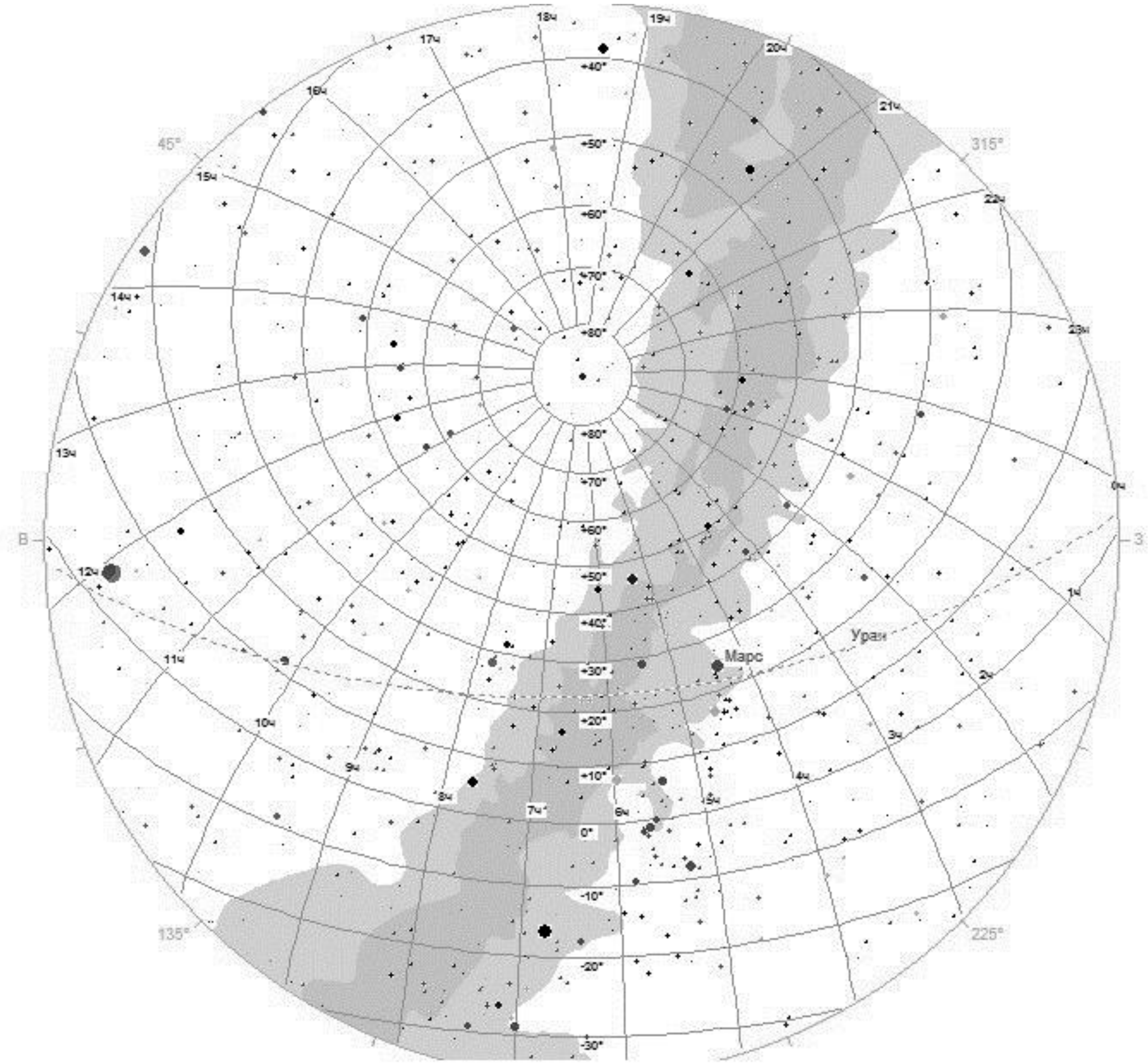
Значение близко к полученному в первом случае.

Ответ: 62^o ± 1^o.

Фото для задачи 11.5 (негатив)



Карта отождествления для задачи 11.5 (негатив)



Справочные данные:

1 а.е. = $1.496 \cdot 10^8$ км; 1пк = 206265 а. е.

скорость света в вакууме c = 299792 км/с; гравитационная постоянная G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг·с^2

продолжительность тропического года T = 365.2422 суток

длительность синодического периода обращения Луны 29.5 дня, сидерического – 27.3 дня

наклонение экватора Земли к плоскости эклиптики ε = 23^{o}26'

масса Солнца – $2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца – $6.96 \cdot 10^5$ км

масса Земли – $6 \cdot 10^{27}$ г, радиус Земли – 6371 км

радиус Луны – 1737 км, большая полуось орбиты Луны 385 000 км

большая полуось орбиты Меркурия 0.38 а.е., эксцентриситет орбиты Меркурия 0.21

большая полуось орбиты Весты 2.36 а.е., эксцентриситет орбиты Весты 0.09