**Межрегиональные предметные олимпиады КФУ профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы) 2024/25 учебный год**

11 класс

Задание 1 (20 баллов).

Решите уравнение $\arcsin(9x-6)=\arccos(7x-5)$.

Ответ: $x=\frac{10}{13}$.

Решение. Левая и правая часть – некий угол, пусть φ. Имеем $9x-6=\sin\varphi$; $7x-5=\cos\varphi$. По основному тригонометрическому тождеству $(9x-6)^2+(7x-5)^2=1$. И наоборот, если выполняется это равенства, то числа $(9x-6)$ и $(7x-5)$ являются синусом и косинусом некоторого угла. Осталось проверить, что это именно угол φ.

Вообще говоря, тому же уравнению удовлетворяют синус и косинус углов $-\varphi, \varphi+\pi, \pi-\varphi$, у которых синусы и косинусы отличаются только знаком. Однако надо учесть, что арксинус и арккосинус принимают не произвольные значения. Как арккосинус, искомый угол лежит в пределах от 0 до π, как арксинус – в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Значит, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, что возможно, если $9x-6\ge0$ и $7x-5\ge0$. Итак, исходное уравнение равносильно системе соотношений

$$(9x-6)^2+(7x-5)^2=1 \text{ и } 9x-6\ge0; 7x-5\ge0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$130x^2-178x+60=0; 65x^2-89x+30=0;\ x=\frac{89\pm\sqrt{89^2-4\cdot65\cdot30}}{130}=\frac{89\pm11}{130}$$

Корни уравнения: $\frac{10}{13}$ и 0,6. Второй из них – лишний, так как не удовлетворяет неравенствам.

Замечание. В этом задании проверять ОДЗ не нужно, так как условие $a^2+b^2=1$ автоматически приводит к тому, что $|a|\le1, |b|\le1$. Если преобразования были неравносильными, необходимо проверить корни. Например, неравносильным является переход к уравнению

$$\sin(\arcsin(9x-6))=\sin(\arccos(7x-5))$$

так как ему может соответствовать также соотношение

$$\arcsin(9x-6)=\pi-\arccos(7x-5)$$

Критерии оценивания: Полное решение – 20 баллов. Для решений через квадратное уравнение: правильно составленное и решенное квадратное уравнение – 10 баллов. Полная и правильная проверка корней – 10 баллов. В том числе, проверка корней подстановкой в исходное уравнение – 10 баллов. В противном случае за составление и проверку каждого из двух неравенств $9x-6\ge0$; $7x-5\ge0$ по 5 баллов. За неправильно решенное квадратное уравнение (и любую другую алгебраическую ошибку) снимается 5 баллов. За арифметическую ошибку – снимается 2 балла.

Задание 2 (20 баллов).

Пусть $a=\sqrt{0{,}99\ldots99}$ (2024 девятки). Какова в этом числе: а) 2024-ая; б) 2025-ая цифра после запятой?

Ответ: а) 9; б) 4.

Решение. Если число меньше 1, то корень из него больше него самого, $a>0{,}99\ldots99$ то есть первые 2024 цифры числа a – девятки.

Обозначим для краткости единицу 2025-го разряда через t, $t=10^{-2025}$. Пусть на 2025 месте стоит цифра d, она образует число $d\cdot10^{-2025}=d\cdot t$. Сравним a с числами вида $b_d=0{,}99\ldots99+d\cdot t=(1-10t)+dt=1-(10-d)t$

Например, при d=5 имеем

$$b_5^2=(1-5t)^2=1-10t+25t^2>1-10t=a^2$$

Значит, $a<1-5t$. Если же d=4, то

$$b_4^2=(1-6t)^2=1-12t+36t^2=1-10t-2t+36t^2<a^2$$

так как $-2t+36t^2=-2t(1-18t)<0$.

Итак, $b_4<a<b_5$, то есть $0{,}99\ldots994<a<0{,}99\ldots995$, Значит, цифра на 2025 месте равна 4.

2 способ. Можно простым рассуждением найти гораздо больше цифр после запятой в числе a. Введем обозначения $0{,}99\ldots99=1-x$, $a=1-y$. тогда $x=10^{-n}$, n=2024.

Как сказано ранее, $1-y>1-x$, то есть $y<x$. Кроме того, $1-x=(1-y)^2=1-2y+y^2$, то есть $x=2y-y^2<2y$. В силу малости числа y^2 можно ожидать, что y практически равно $x/2$. Действительно,

$$0<y-\frac{x}{2}=\frac{y^2}{2}<\frac{x^2}{2}, \qquad \text{то есть } \frac{x}{2}<y<\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}, \qquad 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}<1-y<1-\frac{x}{2}$$

или

$$1-5\cdot 10^{-(n+1)}-5\cdot 10^{-(2n+1)}<a<1-5\cdot 10^{-(n+1)}$$

То есть a отличается от 1 на 5 единиц 2025 разряда после запятой и ещё на не более, чем 5 единиц 4049-го разряда.

$$0,\underbrace{99\dots99}_{2024}4\underbrace{99\dots9}_{2023}5<a<0,\underbrace{99\dots99}_{2024}5$$

Замечание. Неверными являются рассуждения, использующее «последнюю цифру» числа a. Это число иррациональное, то есть представляется бесконечной непериодической десятичной дробью.

Критерии оценивания: За предъявление значений корня при малом числе девяток – 0 баллов. За верно решенный пункт (а) – 5 баллов. За доказанную оценку 2025-ой цифры сверху (или снизу) – плюс 5 баллов. Использование приближенного равенства без доказательных оценок – 0 баллов. Полное решение – 20 баллов.

Задание 3 (20 баллов).

Любочка: «Вы сказали, что квадратное уравнение, заданное на дом, имеет не только целые ненулевые коэффициенты, но и два целых корня, а у меня получается, что корней вообще нет». Учитель: «Перед x^2 был написан коэффициент, а ты его пропустила, записывая задание в тетрадь». Можно ли утверждать, что Любочка может однозначно исправить свою описку на основе этой информации?

Ответ: Вообще говоря, нет.

Решение. Пусть Любочка записала уравнение $x^2-6x+360=0$, которое не имеет корней. Но уравнения $-2x^2-6x+360=0$ и $-3x^2-6x+360=0$ имеют целочисленные корни. Действительно, первое приводится к виду $x^2+3x-180=0$ с корнями 12 и –15, а второе – к виду $x^2+2x-120=0$ или $(x+1)^2=121$, корни 10 и –12. Любочка не может знать, какой из двух вариантов действительно был задан на дом.

Покажем, как можно составлять такие примеры. Пусть верное задание имело вид $ax^2+bx+c=0$. Попробуем подобрать b и c так, чтобы полученное уравнение имело целые корни более, чем при одном значении a.

По теореме Виета $b=-a(x_1+x_2); c=ax_1x_2$. Исключим неизвестное a из этой системы, поделив первое уравнение на второе. Это можно сделать, так как c не равно 0. Получаем равенство $-\frac{b}{c}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$. Значит, надо подобрать две пары целых чисел $(x_1;x_2)$, для которых суммы обратных величин совпадают.

При этом надо учесть, что уравнение $x^2+bx+c=0$ не имеет корней. Это значит, что все значения левой части положительны и, в частности, значение при x=0: c>0.

Имеем $ax^2+bx+c=(x^2+bx+c)+(a-1)x^2$. При $x=x_1$ или $x=x_2$ эта сумма равна 0, в то время как первое слагаемое положительно. Значит, $a<1$. В силу того, что a целое, а уравнение – квадратное, $a<0$. Итак, c должно быть положительным, а a – отрицательным. Из соотношения $c=ax_1x_2$ следует, что корни имеют разный знак.

Например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$. Подставляя пары корней (2; –3) и (3; –6) в теорему Виета, получим, что $b=-a_1\cdot(-1)=-a_2\cdot(-3); c=a_1\cdot(-6)=a_2\cdot(-18)$. Следовательно,

$$b=a_1=3a_2, c=-6b$$

Можно выбрать, например, $a_2=-1$, тогда $a_1=-3$. Уравнение $x^2-3x+18=0$ не имеет корней, а уравнения $-x^2-3x+18=0$ и $-3x^2-3x+18=0$ имеют по два целых корня.

Можно подобрать и другие примеры.

Критерии оценивания: Верный пример с двумя «исправленными» уравнениями считается полным решением. Указание на то, что a – общий делитель чисел b и c – плюс 3 балла. Доказанное неравенство $a < 0$ – плюс 2 балла. Замечание: это неравенство нельзя доказать только с помощью свойств дискриминанта, без учета целочисленности a.

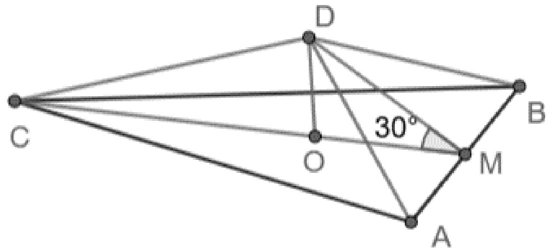
Задание 4 (20 баллов).

Через каждую из сторон равностороннего треугольника ABC со стороной 12 проведена плоскость, образующая угол 30° с плоскостью этого треугольника. Эти три плоскости пересекаются в точке D. Чему может быть равно расстояние от D до плоскости треугольника?

Ответ: 2 или 6.

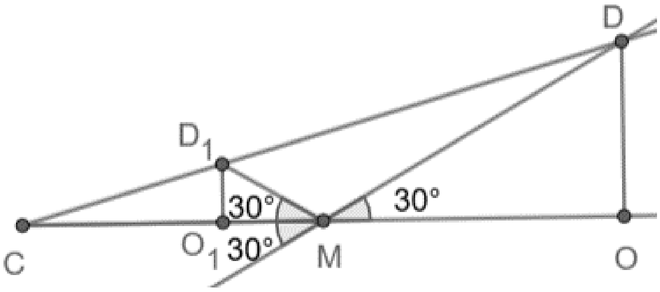
Решение. Через каждую сторону треугольника можно провести две плоскости, образующие угол 30° с его плоскостью. Из трех плоскостей, указанных в условии, как минимум две будут отложены в одном «направлении», а третья – либо в том же, либо в противоположном. Значит, надо разобрать два случая.

Пусть O – проекция точки D на плоскость ABC, а α, β, γ – плоскости, проведенные в соответствии с условием через прямые BC, CA и AB соответственно. Будем считать, что α и β образуют с ABC угол 30° в одном и том же полупространстве. Легко видеть, что CO – биссектриса угла ACB. В силу правильности треугольника ABC она является и медианой, и высотой, то есть пересекает отрезок AB в его середине M.



1 случай. Плоскость γ отложена «в том же направлении». Тогда O является пересечением биссектрис, а, следовательно, и медиан треугольника ABC. Угол между плоскостями γ и ABC – это угол DMC. Значит,

$$OD = OM \cdot \mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{OM}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{3\sqrt{3}} = \frac{AC\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{12}{6} = 2.$$



2 случай. Плоскость γ отложена «в противоположном направлении». Рассмотрим сечение всей конструкции плоскостью COD. Обозначим точку пересечения, полученную в предыдущем случае, через D_1. Ясно, что точки D и D_1 лежат на одной прямой с точкой C (это прямая, по которой пересекаются плоскости α и β).

Пусть $O_1M = x$, $MO = kx$, тогда $CO_1 = 2x$.

В силу подобия прямоугольных треугольников MO_1D_1 и MDO имеем $\frac{DO}{D_1O_1} = \frac{MO}{MO_1} = k$. В силу подобия треугольников CO_1D_1 и CDO имеем $k = \frac{DO}{D_1O_1} = \frac{CO}{CO_1} = \frac{3x+kx}{2x} = \frac{k+3}{2}$. Из равенства $\frac{k+3}{2} = k$ следует, что $k = 3$. Итак, отрезок DO в 3 раза больше, чем отрезок D_1O_1.

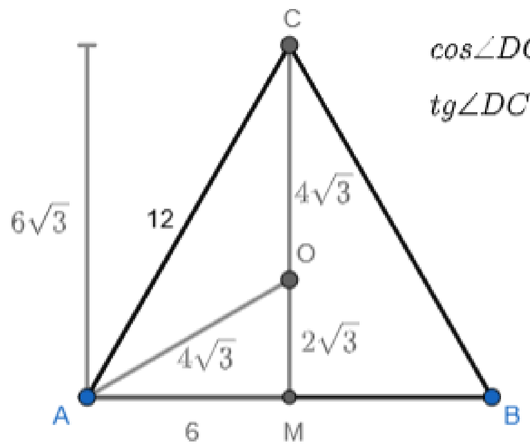
Критерии оценивания: Разбор первого случая – 5 баллов, второго – 15 баллов. Алгебраические, геометрические, тригонометрические ошибки – минус 5 баллов за каждую. Арифметические ошибки – минус 2 балла. Во втором случае использование без обоснования факта, что $ACBO$ – ромб– 0 баллов за второй случай.

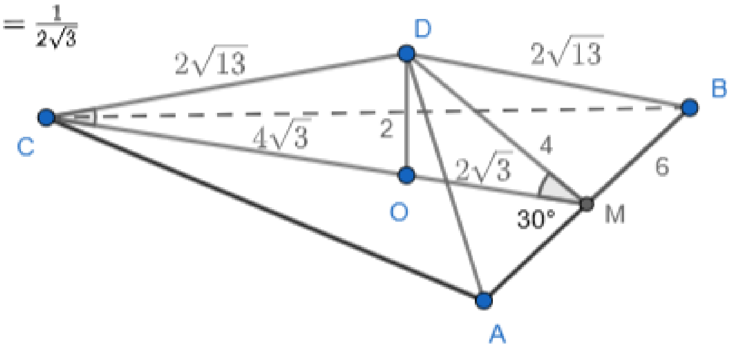
Для проверяющего: Правильные размеры промежуточных отрезков:

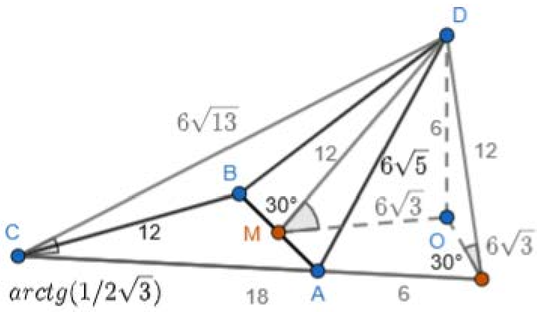
$$sin\angle DCO = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

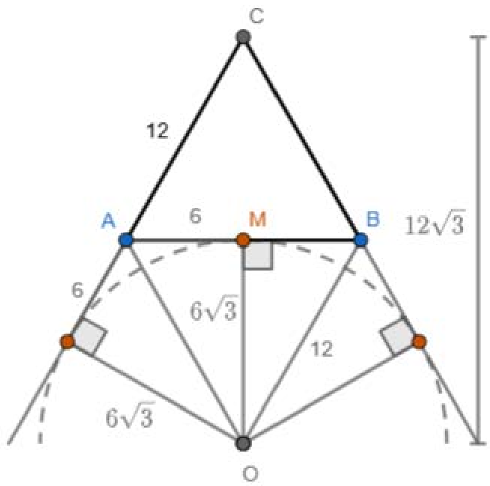
$$cos\angle DCO = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$tg\angle DCO = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$









Задание 5 (20 баллов).

При каких значениях параметра a три различных параболы с уравнениями $y = ax^2 + x + 1$; $y = x^2 + ax + 1$; $y = x^2 + x + a$ имеют общую касательную? (Точки касания не обязаны совпадать)

Ответ. $a = 9$.

Решение. В силу того, что параболы различные, $a \neq 1$.

1 способ. Пусть касательная имеет уравнение $y = kx + m$. Прямая является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, если она пересекает график этой функции в одной точке, то есть уравнение $ax^2 + bx + c = kx + m$ имеет единственный корень. Это равносильно условию, что дискриминант этого уравнения равен 0: $(b-k)^2 - 4a(c-m) = 0$. Запишем это равенство для трех заданных парабол:

$$\begin{cases} (1-k)^2 - 4a(1-m) = 0 \\ (a-k)^2 - 4(1-m) = 0 \\ (1-k)^2 - 4(a-m) = 0 \end{cases}$$

Вычтем последнее уравнение из первого, получим $4(a-1)m = 0$. Итак, $m = 0$ (так как $a \neq 1$) и система сводится к виду

$$\begin{cases} (a-k)^2 - 4 = 0 \\ (1-k)^2 - 4a = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим $(a-1)(a+1-2k) + 4(a-1) = 0$. В силу того, что $a \neq 1$, получаем, что $k = \frac{a+5}{2}$. так что первое уравнение приобретает вид $\left(\frac{a-5}{2}\right)^2 = 4$, то есть $a - 5 = \pm 4$, откуда $a = 1$ или $a = 9$.

2 способ. Касательная к произвольной параболе $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_0 имеет вид

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

Пусть общая касательная касается трёх заданных парабол в точках x_1, x_2, x_3 соответственно. Тогда ее угловой коэффициент равен

$$k = 2ax_1 + 1 = 2x_2 + a = 2x_3 + 1$$

А свободный член

$$m = -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1 = -x_3^2 + a$$

Получили систему 4 уравнений с 4 переменными. Первые два уравнения можно переписать в виде $x_3 = ax_1 = x_2 + \frac{a-1}{2}$. Используя первое из этих равенств исключим x_3 из системы, получим

$$\begin{cases} ax_1 = x_2 + \dfrac{a-1}{2} \\ -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1 \\ -ax_1^2 + 1 = -(ax_1)^2 + a \end{cases}$$

Из последнего уравнения $(a^2 - a)x_1^2 = a - 1$. Сократим на $a - 1 \neq 0$, получим $ax_1^2 = 1$, откуда m=0 и $x_2^2 = 1$. Проверим оба решения этого уравнения.

Пусть $x_2 = 1$, тогда $ax_1 = \frac{a+1}{2}$; $ax_1^2 = 1$. Следовательно,

$$a\left(\frac{a+1}{2a}\right)^2 = 1; (a+1)^2 = 4a; a^2 - 2a + 1 = 0; a = 1$$

Пусть $x_2 = -1$, тогда $ax_1 = \frac{a-3}{2}$; $ax_1^2 = 1$. Следовательно,

$$a\left(\frac{a-3}{2a}\right)^2 = 1; (a-3)^2 = 4a; a^2 - 10a + 9 = 0; a = 1 \text{ или } a = 9$$

Другой вариант решения: вторая группа равенств сводится к

$$\begin{cases} x_2^2 = ax_1^2 \\ x_3^2 = x_2^2 + a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_2^2 = (ax_1)^2 \\ a^2x_1^2 = x_2^2 + a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_2^2 = \left(x_2 + \frac{a-1}{2}\right)^2 \\ ax_2^2 = x_2^2 + a - 1 \end{cases}$$

Последнее равенство можно переписать в виде $(a-1)x_2^2 = a - 1$, откуда в силу $a \neq 1$ имеем $x_2^2 = 1$. Тогда $x_2 = \pm 1$, и первое равенство принимает вид $a = \left(\pm 1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 1 \pm (a-1) + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$

Для $x_2 = 1$ получаем $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$, откуда a=1, лишний корень. Для $x_2 = -1$ получаем $2(a-1) = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$, откуда с учетом $a \neq 1$ получаем $a - 1 = 8, a = 9$.

Критерии оценивания: Описано в каком-то виде условие касания – 5 баллов. Составлена система уравнений – плюс 5 баллов. За правильное решение системы – 10 баллов. Ошибки в алгебраических преобразованиях – минус 5 баллов. Арифметические ошибки – минус 2 балла. Если в ответ включено значение $a = 1$, баллы не снижаются.