Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2023–24 учебный год
6 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. В забеге приняли участие несколько школьников. Ваня занял место ровно посередине, Саня прибежал позже Вани и занял 10-е место, а Даня занял 16-е место. Сколько школьников могли участвовать в забеге? *Не забудьте объяснить свой ответ или ответы и доказать, почему других нет.* (20 баллов)

Ответ. 17.

Решение. Если Ваня занял место под номером n, то до него прибежало $n-1$ участников, поэтому и после него тоже прибежало ровно $n-1$ участников. Следовательно, всего участников было $2n-1$ — нечетное число. Участников не может быть больше 17, так как Ваня прибежал не позже, чем девятым. Даня прибежал 16-м, значит участников было хотя бы 16 и при этом нечетное число. Поэтому остается единственный вариант — участников было ровно 17.

Критерии. Только ответ без проверки, что он подходит — *2 балла.*

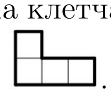
Только ответ с проверкой, что он подходит — *4 балла.*

Доказано, что участников нечетное количество — *4 балла.*

Показано только, что участников не меньше 16 — *2 балла.*

Доказано только, что участников не больше 17 — *8 баллов.*

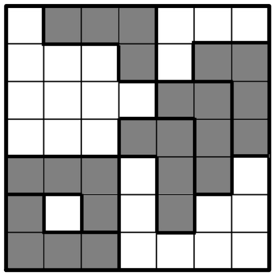
Третий критерий суммируется со всеми остальными. Каждый из четвертого/пятого критериев суммируется с первым/вторым.

Задание 2. На клетчатой доске 7×7 закрасили несколько непересекающихся по клеткам фигурок вида . Фигурка может быть повернута и перевернута как угодно. Оказалось, что в каждом столбце и в каждой строке есть хотя бы три закрашенные клетки. Какое наименьшее количество фигурок могло быть закрашено? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 6 фигурок.

Решение. *Пример* на 6 фигурок приведен на рисунке.

Оценка. Заметим, что в каждом столбце должно быть хотя бы три закрашенные клетки. Поэтому всего закрашено не менее 21 клетки. Отсюда сразу следует, что фигурок не меньше 6.



Критерии. Только оценка — *8 баллов.*

Только пример — *8 баллов.*

Только ответ без примера — *0 баллов.*

Задание 3. Расстояние между морскими портами A и B равно 268 км. Из порта A в 00:55 вышел пароход в порт B. В 03:15 из порта B вышел второй пароход, который проходил в час на 6 км больше, чем первый. Пароходы встретились в то же утро в 07:35. Оба парохода движутся с постоянными скоростями. Найдите скорость первого парохода. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 22 км/ч.

Решение. До встречи второй пароход шёл 4 ч 20 мин. Если бы он шёл со скоростью первого, то прошёл бы на (6 км/ч) $\cdot$ (4 ч 20 мин) $=$ 26 км меньше. Приблизим его на 26 км и пустим со скоростью первого, тогда точка встречи не изменится. До встречи первый шёл 6 ч 40 мин. Продолжая идти с той же скоростью ещё 4 ч 20 мин, первый теплоход дойдёт до новой точки старта второго. Итого за 4 ч 20 мин $+$ 6 ч 40 мин $=$ 11 ч первый теплоход пройдёт $268 - 26 = 242$ км. Следовательно, его скорость $242 : 11 = 22$ км/ч.

Критерии. Только ответ с проверкой, что он подходит — *4 балла.*

Задание 4. В турнире по волейболу шесть команд сыграли каждая с каждой по одному разу. Команды, разделившие первые два места, одержали поровну побед (но больше, чем все остальные); команды, разделившие два последних места, также одержали поровну побед (но меньше, чем все остальные), а остальные команды одержали разное число побед. Ничьих в волейболе не бывает. Можно ли определить, сколько побед одержала команда, занявшая третье место? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Можно, 3 победы.

Решение. Две первые команды не могли одержать по пять побед, так как одна из них проиграла другой в личной встрече. Поэтому у них не более, чем по 4 победы.

Две последние команды не могли одержать по нуль побед, так как одна из них выиграла у другой в личной встрече. Поэтому у них не менее, чем по 1 победе.

Осталось две команды на 3 и 4 местах, у которых разное число побед. Между числами 1 и 4 всего два различных числа — 2 и 3. Таким образом, если бы две первые команды набрали меньше, чем по 4 победы, а две последние — больше, чем по 1 победе, то описанная ситуация была бы вообще невозможна. Следовательно, две первые команды набрали ровно по 4 победы, а две последние — ровно по 1 победе. Команда, занявшая третье место, набрала 3 победы, а команда, занявшая четвертое место — 2 победы.

Замечание. Условие задачи предполагает, что ситуация уже случилась, так что приводить пример турнирной таблицы со всеми исходами игр не требуется. Тем не менее, его легко привести. Пусть каждая команда с номерами от 1 до 6 выиграет у каждой команды с бóльшим номером, за одним исключением — команда №1 проиграет команде №6.

Критерии. Только ответ без примера турнирной таблицы — *0 баллов.*

Только ответ с примером турнирной таблицы — *4 балла.*

Доказано, что первые две команды одержали по 4 победы — *8 баллов.*

Доказано, что последние две команды одержали по 1 победе — *8 баллов.* Последние два критерия суммируются со вторым и друг с другом.

Задание 5. Альберт загадал натуральное число, не превосходящее 10. Роберт хочет его угадать. Он может задавать вопросы: «Верно ли, что это число A?». Если Роберт не угадал, то Альберт обязан к загаданному числу либо прибавить число A, либо вычесть из него число A, но так, чтобы результат оставался натуральным числом. После этого Роберт должен будет угадывать уже новое число. Роберт не знает, какой из этих двух вариантов выберет Альберт. Может ли Роберт действовать так, чтобы через несколько вопросов гарантированно угадать загаданное число? (20 баллов)

Ответ. Может.

Решение. Роберт может действовать так. Он по очереди будет спрашивать у Альберта про числа $A = 10$, 19, 37, 73, 145, 289, 577, 1153, 2305, 4609, пока не получит ответ «Да».

Если в первый раз Роберт не угадал, то у Альберта было число от 1 до 9 и ему придётся прибавить к загаданному числу 10, а, значит, оно будет в интервале от 11 до 19.

Если Роберт и во второй раз не угадал, то Альберту придётся прибавить к своему числу 19, а значит, оно будет в интервале от 30 до 37.

Если Роберт и в третий раз не угадал, то Альберту придётся прибавить к своему числу 37, а значит, оно будет в интервале от 67 до 73.

Если Роберт и в четвёртый раз не угадали, то Альберту придётся прибавить к своему числу 73, а значит, оно будет в интервале от 140 до 145.

Заметим, что каждый раз количество вариантов, какое число мог загадать Альберт, уменьшается на один. Продолжая действовать аналогично, Роберт не позднее, чем за 10 ходов угадает число Альберта.

Критерии. Верная идея стратегии, в которой имеются арифметические ошибки — *до 10 баллов.*