Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2023–24 учебный год
7 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 по кругу в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел делилась нацело либо на 3, либо на 4 (возможно, и на 3, и на 4). (20 баллов)

Решение. Например, так: 1, 2, 3, 4, 11, 6, 7, 8, 9, 10, 5.

Замечание. Этот пример можно придумать следующим образом. Заметим, что если расставить числа просто по порядку, то сумма любых трех подряд идущих будет делиться на 3. Это перестает работать только при переходе через 11: $10 + 11 + 1 = 22$, $11 + 1 + 2 = 14$. Эти числа не делятся ни на 3, ни на 4, но они оба четные и дают остаток 2 при делении на 4. Если поменять местами 11 и 5, то делимость на 3 никуда не пропадет, а числа 22 и 14 поменяются на 16 и 8, которые кратны 4.

Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. Положительные числа a, b, c и d таковы, что

$$\frac{a}{b} < 1 < \frac{c}{d}.$$

Докажите, что

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c+1}{b+d+1} < \frac{c}{d}.$$

(20 баллов)

Решение. Из условия следует, что $a < b$ и $d < c$.

Докажем первое неравенство. Так как все числа положительны, можно перемножить. Имеем $a(b+d+1) \vee b(a+c+1)$ или $a(d+1) \vee b(c+1)$. Последнее равносильно тому, чтобы сравнить числа

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{c+1}{d+1}.$$

Но первое число меньше 1, а второе — больше 1 (так как $c + 1 > d + 1$). Таким образом, первое неравенство доказано.

Аналогично доказывается второе неравенство. Имеем $d(a + c + 1) \vee c(b + d + 1)$ или $d(a + 1) \vee c(b + 1)$. Последнее равносильно тому, чтобы сравнить числа

$$\frac{c}{d} \text{ и } \frac{a+1}{b+1}.$$

Но первое число больше 1, а второе — меньше 1 (так как $a + 1 < b + 1$). Таким образом, второе неравенство тоже доказано.

Критерии. Доказано только одно из неравенств — *10 баллов.*

При доказательстве используются равносильные переходы, и отмечено, что все числа положительные — *баллы не снижаются.*

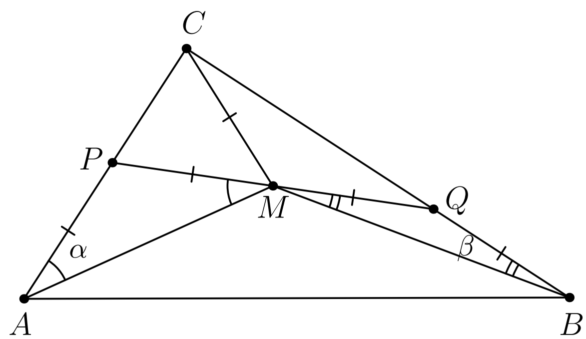
При доказательстве используются равносильные переходы, но не отмечено, что все числа положительные — *штраф 2 балла.*

Задание 3. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Точка M — середина отрезка PQ. Оказалось, что $AP = PM = MC = MQ = QB$. Найдите угол AMB. (20 баллов)

Ответ. $135°$.

Решение. Пусть $\angle MAC = \alpha$, $\angle MBC = \beta$. Из равнобедренности треугольников MAP и MBQ следует, что $\angle PMA = \alpha$, $\angle QMB = \beta$. Тогда $\angle MPC = 2\alpha$ и $\angle MQC = 2\beta$ как внешние углы треугольников MAP и MBQ соответственно.

Теперь из равнобедренности треугольников MPC и MQC следует, что $\angle PCM = 2\alpha$, $\angle QCM = 2\beta$. Тогда сумма углов в треугольнике PCQ равна $2\alpha + (2\alpha + 2\beta) + 2\beta = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 45°$. Наконец, $\angle AMB = 180° - \angle PMA - \angle QMB = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 45° = 135°$.



Критерии. Фактом, что если в треугольнике PCQ медиана CM равна половине стороны PQ, то $\angle PCQ = 90°$, можно пользоваться без доказательства.

Задание 4. Антон выписал на карточках все трехзначные числа, которые не содержат нулей в своей записи, каждое число — ровно по одному разу. Затем он разрезал каждую карточку на две так, что каждое трехзначное число распалось на однозначное и двузначное (например, из карточки 327 можно получить либо карточки 32 и 7, либо 3 и 27, а из карточки 996 — либо карточки 99 и 6, либо 9 и 96). Все числа на новых карточках Антон перемножил и получил число N. Найдите девяностую справа цифру числа N. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 0.

Решение. Сначала заметим, что среди трехзначных чисел без нулей в записи хотя бы $9 \cdot 9 \cdot 4 > 90$ четных (первая и вторая цифры — любые кроме нуля (9 вариантов), третья — одна из четырех четных ненулевых цифр). Следовательно, произведение чисел на карточках делится на 2^{90}. Покажем, что оно также делится на 5^{90}. Отсюда будет следовать, что оно делится на 10^{90}, и тогда 90-я справа цифра — нуль.

Во-первых, все числа, оканчивающиеся на 5, дадут в произведение хотя бы одну пятерку. Таких чисел ровно $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$. Кроме того, еще хотя бы по одной пятерке дадут числа 551, 552, …, 559. При этом число 555 мы посчитали в обоих случаях, но оно дает карточки 5 и 55, обе из которых делятся на 5. Поэтому его и необходимо учесть два раза. В итоге получается еще 9 пятерок, а всего $81 + 9 = 90$, что и требовалось.

Критерии. Доказано, что число оканчивается хотя бы на 81 нуль, дальнейших продвижений нет — *4 балла.*

Доказано, что число оканчивается хотя бы на 89 нулей, дальнейших продвижений нет — *10 баллов.*

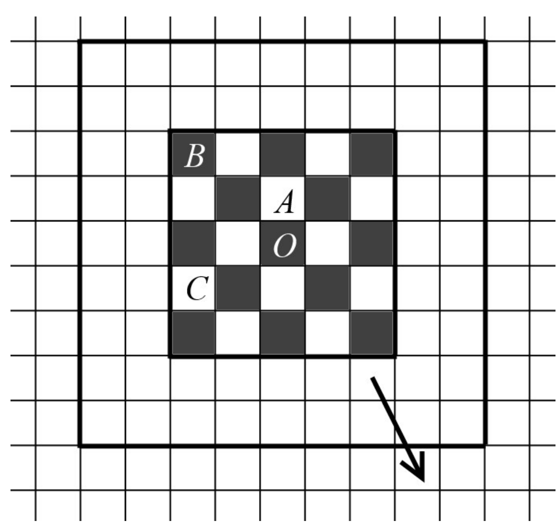
Задание 5. Аня, Таня и Ваня играют в игру, поочередно передвигая шахматного коня на доске 101×101. Первым ходит Ваня, второй — Аня, а третьей — Таня. Изначально конь стоит в левом нижнем углу. Если кому-то удается поставить коня в центральную клетку доски, то он объявляется победителем. Девочки хотят договориться между собой играть так, чтобы кто-то из них сумел выиграть вне зависимости от действий Вани. Получится ли это у них, или Ваня сумеет не дать выиграть ни одной из них? Если в игре сделано 3000000 ходов, и до этого момента никто не выиграл, то объявляется ничья. (20 баллов)

Ответ. Не получится.

Решение. Пусть O — центральная клетка. Покажем, что Ваня всегда сможет подвинуть коня таким образом, что ни Аня, ни Таня не смогут выиграть ближайшим ходом.

Если конь стоит за пределами квадрата 5×5 с центром в O, то Ваня сможет вывести фигуру за пределы квадрата 9×9 с центром в O (пример такого хода показан на рисунке стрелкой). Оттуда девочки своими двумя ходами не смогут достигнуть конечной клетки. Действительно, каждая из координат за одно передвижение коня меняется максимум на 2, а хотя бы одна из них должна измениться минимум на 5.

Раскрасим квадрат 5×5 в шахматную раскраску так, что клетка O будет черного цвета. В случае, когда конь стоит на черной клетке, Ваня не проиграет следующим образом: ему достаточно вывести коня за пределы квадрата 5×5. Потом Аня своим ходом не сможет достать конем до клетки O, а после хода Тани конь будет на белой клетке.



Если конь стоит на белой клетке, то есть два варианта. 1) Если вдруг клетка O достижима из текущей клетки одним ходом (например, из клетки C), то Ваня может выиграть сам. 2) Остаются лишь клетки, которые граничат с O по стороне (например, клетка A). Из них Ваня может сходить в одну из угловых клеток нашего квадрата 5×5 (на рисунке это клетка B). Легко видеть, что тогда за два следующих хода до центральной клетки O добраться невозможно.