Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2023/24 учебный год

10 класс

Задание 1.

Рациональное число $0 < p < 1$ таково, что его десятичное представление является бесконечной десятичной дробью. В этой бесконечной десятичной дроби зачеркнули бесконечное число цифр. Может ли оказаться, что полученное таким образом новое число иррационально?

Ответ: да.

Решение. Бесконечная десятичная дробь задает рациональное число, только если ее цифры повторяются с некоторого момента периодически. Рассмотрим число, период которого содержит две цифры, например, 4/33=0,(12). Можно вычеркнуть цифры так, чтобы осталась дробь 0,121121112…, то есть n единиц и 1 двойка для n=1, 2, 3, … Ясно, что у такой дроби периода не будет, это число иррациональное.

Критерии оценивания: Полное решение – 20 баллов. Ответ «может» без примера или другого обоснования – 0 баллов. Пример, в котором не сказано про отсутствие периодичности – минус 2 балла.

Утверждение «в числе не останется цифр» -- 0 баллов.

Исследован случай конечного числа вычеркнутых цифр и результат формально перенесен на бесконечное их число – 0 баллов.

Задание 2.

Людочка должна была решить неравенство $ax + by \leq c$ в натуральных числах x, y (коэффициенты a, b, c – конкретные заданные натуральные числа). Но при списывании условия с доски она потеряла коэффициент a, поэтому у нее получилось ровно в 2 раза больше решений, чем в исходном неравенстве. Чему мог быть равен коэффициент a?

Ответ: $a = 2$.

Решение. Заметим, что $a > 1$, так как при $a = 1$ Людочкино неравенство совпадает с правильным. Запишем Людочкино неравенство в виде $z + by \leq c$. В исходном неравенстве для каждого y надо было найти все x такие, что $ax \leq c - by$, то есть найти все $z = ax$ – числа, кратные a, из промежутка $[1; c - by]$. Но вместе с каждым таким числом в этот промежуток входят и $z = ax - 1$; $z = ax - 2\ldots$ до $z = ax - (a - 1)$. Таким образом, в Людочкином неравенстве как минимум в a раз больше решений. Значит, в условиях задачи $a = 2$.

Пусть теперь $a = 2$. Гарантирует ли это выполнение условия задачи? Например, у неравенства $2x + y \leq 4$ два решения, $\{(1;1);(1;2)\}$, а у «недописанного» неравенства $x + y \leq 4$ – целых шесть: $\{(1;1),(2;1),(3;1),(1;2),(2;2),(1;3)\}$. Тем не менее, неравенства, удовлетворяющие условию, существуют. Это, скажем, $2x + 2y \leq 4$ или $2x + 3y \leq 5$. Есть и другие примеры.

Замечание. Попытки оценить количество решений неравенства $ax + by \leq c$ через площадь или арифметическую прогрессию - ошибочны. На самом деле, это намного более сложная задача.

Критерии оценивания:

Решение состоит из двух частей, оцениваемых независимо: доказательство ограничения $a \leq 2$ (15 баллов), и корректный пример того, что могло быть $a = 2$ (5 баллов). Итого полное решение – 20 баллов.

Только ответ без объяснений – 0 баллов.

Задание 3.

В магазине продаются новогодние подарки трех типов: в подарках первого типа лежат по 4 шоколадные конфеты, второго – 10, а третьего – 40. Вовочка купил Людочке несколько подарков, а она купила ему на один больше. Может ли оказаться, что Вовочка получил шоколадных конфет

а) на 4 больше, чем Любочка

б) на 18 меньше, чем Любочка?

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Пример: Вовочка подарил подарки с 40, 4, 4, 4, 4 конфетами, всего 56 конфет. А получил 6 подарков по 10 конфет.

б) Рассмотрим остаток при делении числа конфет на 6. Для всех подарков он равен 4. Значит, у Вовочки число конфет было сравнимо с $4n$, а стало сравнимо с $4(n+1)$, так как подарков стало на один больше. Но число конфет должно было измениться на 18, то есть остаток от деления на 6 не изменился. Пришли к противоречию.

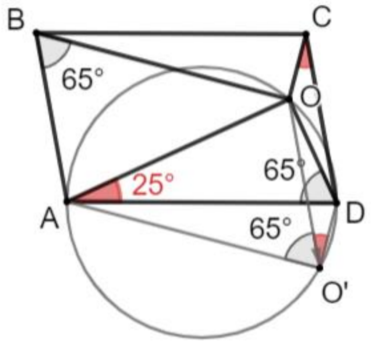
Критерии оценивания: За полностью решенный п. а) 5 баллов, за п. б) 15 баллов.

Есть идея изменения состава покупок, но нет четкого описания – минус 2 балла. Упоминается исследование остатков, но недостаточно четкое рассуждение – вычитается от 2 до 5 баллов.

Задание 4.

Внутри параллелограмма *ABCD* выбрана точка *O* такая, что $\angle OAD = 25^\circ$ и $\angle OBA = \angle ODA = 65^\circ$. Найти угол $\angle OCD$.

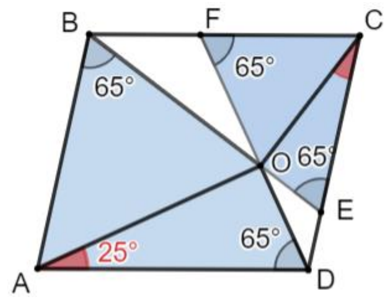
Ответ: 25°.



Решение. 1 способ. Сделаем сдвиг точки *O* на вектор *BA*. В параллелограмме $ABOO'$ угол $AO'O$ равен $\angle ABO$ и равен 65°. Значит, точки *A*, *O*, *D* и O' лежат на одной окружности. Но тогда и угол $OO'D$ равен $\angle OAD = 25^\circ$. Но в параллелограмме $OCDO'$ он равен углу OCD, то есть искомому.

2 способ (из работы участника):

Продлим отрезки *BO* и *DO* до точек *E* и *F* на сторонах параллелограмма *CD* и *BC*. Тогда $\triangle BOF \sim \triangle DOE$ по двум углам: $\angle BOF = \angle DOE$ как вертикальные, и $\angle OBF = \angle ODE$ как разность угла параллелограмма и заданного угла. Тогда из равенств трёх пар углов $\angle ABO = \angle CFO$, $\angle BOD = \angle FOE$, $\angle ODA = \angle OEC$ и пропорциональности двух пар соответствующих сторон $\frac{BO}{FO} = \frac{OD}{OE}$ вытекает подобие четырёхугольников $ABOD \sim CFOE$! (Это подобие следует доказывать отдельно, но это довольно просто.) И тогда $\angle OCD = \angle OAD = 25^\circ$. В том случае, если отрезки *BO* и *DO* при продлении попадают на стороны *AD* и *AB*, рассуждение будет аналогичным.



Также возможно счётное решение с использованием несколько раз теорем синусов и косинусов.

Критерии оценивания:

Полное решение – 20 баллов. Пропущен один геометрический шаг – минус 5 баллов. Совершена алгебраическая ошибка – минус 2 балла.

Решения нет, но есть существенное продвижение (замеченные факты и дополнительные построения, ведущие к решению, но не достаточные для достижения ответа) – 7 баллов.

Решение только для частного случая (такого как ромб, прямоугольник, и т.п.) – 0 баллов.

Продвижение незначительное, либо решение неверное, либо решение отсутствует – 0 баллов.

Задание 5.

Решить уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

Ответ: $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение. Заметим, что углы $\arcsin x$ и $\arccos x$ являются дополнительными. Действительно, арксинус – это угол $\varphi = \arcsin x$, такой что $\sin\varphi = x$ и $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Но тогда $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = x$ и угол $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ принадлежит $[0; \pi]$. Значит, он и является $\arccos x$.

После замены $\varphi = \arcsin x$ уравнение принимает вид $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\frac{5\pi^2}{18}$ или $18\varphi^2 - 9\pi \cdot \varphi - 5\pi^2 = 0$.

$$\varphi = \frac{9\pi \pm \pi\sqrt{81 + 360}}{36} = \frac{9\pi \pm 21\pi}{36};\ \ \varphi_1 = \frac{5\pi}{6};\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$$

Первый из корней лишний (не лежит в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$). Итак, $\arcsin x = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Заметим, что отбор корней существенно основан на свойствах функций $\arcsin \mathrm{x}$, $\arccos \mathrm{x}$.

Также возможно найти решение подбором, поскольку оно является табличным углом. Но в этом случае необходимо доказать единственность решения, например, на основе монотонности функции $\arcsin \mathrm{x} \cdot \arccos x$ на промежутке $x \in [\,-1; 0)$.

Критерии оценивания:

Полное решение – 20 баллов. В случае ошибок, не нарушивших логику решения, баллы вычитались:

- не учтены свойства функций $\arcsin x$, $\arccos x$ там, где это следовало сделать – минус 5 баллов.

- совершена иная тригонометрическая ошибка – минус 5 баллов.

- совершена алгебраическая ошибка – минус 2 балла.

- совершена незначительная ошибка, описка – баллы не снимаются.

Решение подбором без обоснования единственности – 0 баллов.