Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2023/24 учебный год
10 класс

Задание 1 (20 баллов).

В корзине лежат яблоки и мандарины, причем яблоки составляют менее 92% всех фруктов. Любочка добавляет в корзину фрукты по одному, так что в какой-то момент доля яблок становится больше 92%. Обязательно ли был момент, когда доля яблок была в точности равна 92%?

Ответ: Нет.

Решение. Запишем проценты в виде обыкновенной дроби, $92\% = \frac{23}{25}$. Пусть в некоторый момент в корзине лежит n фруктов, причем доля яблок меньше, чем $\frac{23}{25}$, а после добавления одного фрукта их стало больше, чем $\frac{23}{25}$. Ясно, что в этот момент добавили яблоко (пусть их было k, тогда стало – k+1). Имеем

$$\frac{k}{n} < \frac{23}{25}, \qquad \frac{k+1}{n+1} > \frac{23}{25}; \qquad \begin{cases} 25k < 23n \\ 25k + 25 > 23n + 23 \end{cases}$$

Соотношения принимают вид $23n - 2 < 25k < 23n$, откуда $25k = 23n - 1$. Осталось подобрать n так, чтобы $23n$-1 делилось на 25. Перебором получаем, что подходит n=12, k=11.

Проверка. Пусть в какой-то момент в корзине 11 яблок и 1 мандарин, доля яблок $\frac{11}{12} \approx 0{,}917 < 92\%$. Добавим 1 яблоко, получим 12 яблок из 13 фруктов, доля равна $\frac{12}{13} \approx 0{,}923 > 92\%$.

Замечание. Подходящее n не обязательно искать перебором. Имеем соотношение

$$23n - 25k = 1; 23(n-k) = 2k + 1$$

Значит, $2k+1$ – нечетное число, делящееся на 23. Например, возьмём $2k$+1=23, тогда k=11; n-k=1, т.е. n=12. Это минимальное решение.

Критерии оценивания: Приведён верный пример, показывающий необязательность ситуации, описанной в условии задачи: 20 баллов;

Необязательность доказана иным способом (например, ситуация, описанная в задаче, сведена к некоторому противоречию): 20 баллов;

Доказательство необязательности содержит неточности, арифметические ошибки, но ход доказательства верный: 10 баллов.

Задание 2 (20 баллов).

Дан ребус КАР + КАР + ... + КАР = РРРРР (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). При каком наименьшем числе слагаемых он имеет решение?

Ответ: 41.

Решение. Имеем $PPPPP = P \cdot 11111 = P \cdot 41 \cdot 271 = n \cdot$ КАР. Если КАР не делится на простое число 271, то на него делится n, так что в этом случае оно не меньше, чем 271.

Пусть теперь КАР$= 271k$. Ясно, что число k не превосходит 3, так что оно взаимно просто с 41. Значит, на 41 делится число n.

При 41 слагаемом ребус будет иметь три решения, для k от 1 до 3. А именно, $271 + 271 + \cdots + 271 = 271 \cdot 41 = 11111$, аналогично $542 + 542 + \cdots + 542 = 542 \cdot 41 = 22222$ и $813 + 813 + \cdots + 813 = 813 \cdot 41 = 33333$.

Критерии оценивания: Задача решена верно: 20 баллов;

Приведена только верная оценка количества слагаемых: 15 баллов;

Приведен пример с верным количеством слагаемых, но оценка содержит существенные пробелы (например, количество слагаемых выбирается лишь из 41 и 271 без дополнительных пояснений): 10 баллов;

Приведен только пример с верным количеством слагаемых: 5 баллов;

Задача решена перебором, который содержит неточности: 10 баллов.

Задание 3 (20 баллов).

Вовочке задали на дом квадратное уравнение. «Учитель сказал, что оно имеет два целых корня, а у меня получается, что корней нет» – пожаловался он. Его папа-математик, посмотрев на уравнение, сказал: «Ты, наверное, неправильно списал с доски один из коэффициентов. Если это так, то я знаю правильный вариант задания, причем он единственный».

Докажите, что, если папа прав, то свободный член уравнения Вовочка записал верно.

Решение. Пусть Вовочка записал уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$ и оно не имеет корней. Предположим, что можно заменить свободный член так, чтобы у уравнения появились два целых корня. Пусть верное задание имеет вид $ax^2 + bx + c_1 = 0$, корни его обозначим x_1, x_2. По теореме Виета $b = -a(x_1 + x_2)$; $c_1 = ax_1x_2$. То есть $n = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ – целое число. Сохраняя эту сумму, можно менять корни и, соответственно, их произведение. То есть в качестве c_1 можно рассмотреть числа $0; a \cdot 1 \cdot (n-1); a \cdot 2 \cdot (n-2)$ и т.д. Итак, в этом случае исправление не единственное.

Например, пусть Вовочка решал уравнение $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$. Здесь $n = -2$. Значит, «восстановленное» уравнение может иметь вид $\frac{1}{2}x^2 + x = 0$; $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$; $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0\ldots$ Папа не смог бы сказать, которое из них было задано на дом.

Мы показали следующий факт: если можно исправить уравнение за счёт свободного члена, то это исправление не единственное. Вообще говоря, надо ещё показать, что ситуация, описанная папой, возможна. Например, рассмотрим уравнение $3x^2 + x + 2 = 0$. Если не менять первый коэффициент, то новое уравнение имеет вид $3x^2 + b_1x + c_1 = 0$, где либо $b_1 = 1$, либо $c_1 = 2$. Но тогда числа $\frac{b_1}{3} = -(x_1 + x_2)$ и $\frac{c_1}{3} = x_1x_2$ не могут быть оба целыми. Значит, уравнение нельзя исправить за счет второго или третьего коэффициента, так как ни один из них не делится на 3. Попробуем найти «правильный» коэффициент a. Ясно, что он должен быть делителем как 1, так и 2, то есть подходят только $a = 1$ и $a = -1$.

Уравнение $x^2 + x + 2 = 0$ не имеет решений, а уравнение $-x^2 + x + 2 = 0$ имеет целые корни $x = -1$ и $x = 2$. Именно оно и будет единственным возможным исправлением исходного уравнения.

Замечание. Без условия целочисленности корней утверждение задачи также будет верным. Однако без этого ограничения неверным будет высказывание папы, так что из него может следовать что угодно.

Критерии оценивания: Задача решена верно: 20 баллов;

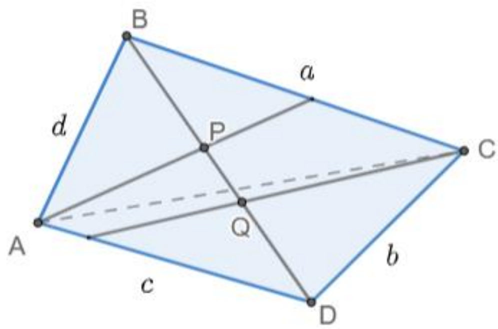
Решение содержит неточности, арифметические ошибки: 15 баллов;

Решение содержит рассуждение о том, что уравнение можно восстановить, используя различные коэффициенты c, что ведёт к противоречию о единственности правильного варианта уравнения (при этом, например, игнорируется условие о целости корней): 5 баллов.

Задание 4 (20 баллов).

Задан выпуклый четырехугольник, в нем проведены биссектрисы всех четырех углов. Может ли оказаться, что каждую из сторон (в ее внутренней точке) пересекает хотя бы одна из биссектрис?

Решение. Если каждую сторону во внутренней точке пересекает какая-то биссектриса, то каждую из них пересекает ровно одна.



Пусть для определенности биссектриса угла A пересекает сторону BC (длиной a). Биссектриса угла D, вообще говоря, может пересекать AB или BC, но в силу условия пересекает сторону AB (длиной d). Аналогично получаем, что биссектриса угла C пересекает сторону DA (длиной c) и биссектриса угла B – сторону CD (длиной b).

Заметим, что по свойству биссектрисы $\frac{BP}{PD} = \frac{d}{c}, \frac{BQ}{QD} = \frac{a}{b}$. Но биссектриса угла A пересекает диагональ BD ближе к вершине B, чем биссектриса угла C. Значит, $\frac{d}{c} < \frac{a}{b}$ т.е. $bd < ac$. Аналогичное исследование второй диагонали показывает, что $\frac{c}{b} < \frac{d}{a}$, т.е. $bd > ac$. Пришли к противоречию.

Критерии оценивания: Задача решена верно: 20 баллов;
Решение содержит существенное продвижение в доказательстве: 10 баллов.

Задание 5 (20 баллов).

На ферме по выращиванию жемчуга проводится акция: посетителю разрешают вскрыть несколько раковин, до тех пор, пока он не найдет 2 жемчужины. В каждой раковине может быть не более одной жемчужины, причем вероятность, что она там будет, равна 1/3. Аделаида Ивановна участвует в акции. Какова вероятность того, что она вскроет: а) ровно 4 раковины; б) не менее 4 раковин?

Ответ: а) $\frac{4}{27}$; б) $\frac{20}{27}$.

Решение. а) Ясно, что А.И. найдёт жемчужину в 4-ой раковине, а также ровно в одной из предыдущих. Имеем три варианта события, вероятность каждого равна $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$. Искомая вероятность в 3 раза больше.

б) Противоположное событие – что А.И. вскроет 2 или 3 раковины. Вероятность вскрыть две равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; три раковины – $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$. Значит, вероятность не менее 4 раковин равна $1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{27} = \frac{20}{27}$.

Критерии оценивания: Получен верный ответ в обоих пунктах а) и б): 20 баллов;
Получен верный ответ в одном из пунктов а) или б): 10 баллов.