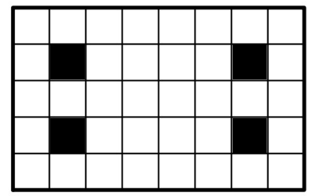
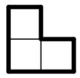
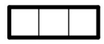
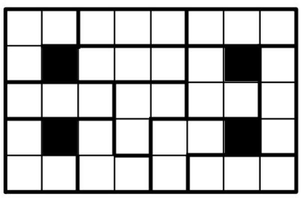
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2024–25 учебный год
5 класс
Решения задач и критерии оценивания



Задание 1. Разрежьте прямоугольник 5×8 с четырьмя дырками на фигурки вида  и  так, чтобы фигурок каждого вида было поровну. Фигурки можно поворачивать как угодно по клеточкам. *Достаточно привести один пример.* (20 баллов)

Решение. Можно разрезать, например, так, как показано на рисунке.



Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. По кругу написано 11 различных натуральных чисел. Какое наибольшее количество из них могут быть больше суммы обоих своих соседей? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 5.

Решение. *Оценка.* Если число больше суммы соседей, то оно больше каждого из них. Поэтому два таких числа не могут стоять рядом. Следовательно, шесть или больше таких чисел быть не может.

Пример, когда чисел ровно пять: 10, 1, 20, 2, 30, 3, 40, 4, 50, 5, 6.

Критерии. Только верный пример — *6 баллов.*
Только оценка — *10 баллов.*

Задание 3. На прогулке Саша и Маша нашли 35 подберезовиков. Они разделили их на несколько (более одной) кучек, в каждой из которых было не менее двух подберезовиков, а затем взяли по одному подберезовику из каждой кучки, кроме первой, и положили его в первую кучку. Теперь во всех кучках стало одинаковое количество подберезовиков. Сколько подберезовиков изначально было во второй кучке? *Не забудьте объяснить свой ответ или ответы и доказать, почему других нет.* (20 баллов)

Ответ. 8.

Решение. Делителями числа 35 являются числа 1, 5, 7 и 35. Поскольку все кучки в конце имеют одинаковый размер, одним из этих множителей должно быть количество кучек.

Так как кучек несколько, то 1 не подходит. Кучек не может быть так же 35, так как тогда в каждой куче изначально будет только один подберезовик, и после перекладывания образуется одна кучка в 35, а остальные кучки обнулятся.

Если будет семь кучек, то в конце в каждой кучке окажется по пять подберезовиков. Но в этом случае изначально должно было быть: -1, 6, 6, 6, 6, 6, 6 подберезовиков, что также невозможно. Остался единственный возможный случай — пять кучек со следующим начальным распределением: 3, 8, 8, 8, 8.

Критерии. Не рассмотрены возможности одной и/или 35 кучек — снимается *4 балла.*

Только пример кучек 3, 8, 8, 8, 8 с проверкой — *6 баллов.*

Только ответ — *2 балла.*

Задание 4. У фермера есть семь свиней и мешок с 10 килограммами корма. Докажите, что он может покормить свиней так, чтоб любые две свиньи вместе весили чётное число килограммов. Использовать весь корм не обязательно. Вес свиньи увеличивается ровно на вес съеденного ей корма. Изначально каждая из свиней может весить сколько угодно, необязательно целое число килограммов. (20 баллов)

Решение. Разделим свиней фермера на две группы — ту, в которой свиньи весят не меньше чётного числа кг, но меньше следующего нечётного числа, и ту, в которой свиньи весят не меньше нечётного числа и меньше следующего за ним чётного.

Если бо́льшая часть свиней $x \geqslant 4$ оказалась в первой группе, то фермеру нужно докормить всех свиней до нечётного веса. Это потребует не более x кг на первую группу и не более, чем $2(7-x)$ кг на вторую группу. Тогда всего фермеру потребуется не более, чем $x + 14 - 2x = 14 - x$ кг корма. Поскольку $x \geqslant 4$, это число не превосходит 10 кг.

Аналогично, если бо́льшая часть свиней оказалась во второй группе, то фермеру нужно докормить всех свиней до чётного веса.

Критерии. Верный алгоритм без обоснования — *8 баллов.*

Верный алгоритм обоснован только для четырех свиней в бо́льшей группе — *12 баллов.*

Задание 5. На острове живут два племени — рыцарей и лжецов. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. За круглый стол сели 10 островитян. Путешественник подошел к столу и каждому задал вопрос: «У тебя есть сосед-лжец?» Ровно один из сидящих ответил «Нет», а остальные ответили «Да». После этого путешественник спросил каждого: «У тебя есть сосед из твоего племени?» Все десять человек ответили: «Да». Сможет ли путешественник определить, сколько рыцарей сидит за столом? Соседями считаются любые два человека, сидящие рядом друг с другом. *Не забудьте обосновать свой ответ.*

Ответ. Сможет. За столом 7 рыцарей.

Решение. 1) Заметим, что все десять человек не могут быть рыцарями, так как в противном случае на первый вопрос все они обязаны были бы сказать «Нет».

2) Заметим, что никакие два лжеца не могут сидеть подряд, так как в противном

случае на второй вопрос оба они обязаны были бы сказать «Нет». Поэтому по обе стороны от каждого лжеца сидят рыцари.

3) Еще заметим, что рядом с каждым рыцарем обязательно сидит еще один рыцарь, так как каждый рыцарь на второй вопрос ответил «Да».

4) Это означает, что за столом сидят группы по несколько рыцарей подряд, а между каждыми двумя такими группами сидит по одному лжецу. При этом каждый такой лжец на первый вопрос ответил «Да».

5) Если в какой-то группе есть хотя бы четыре рыцаря, то как минимум двое из них сидят не на краю группы, и поэтому оба их соседа — рыцари. Тогда на первый вопрос они оба сказали бы «Нет». А такой ответ был только один. Если же в какой-то группе есть ровно два рыцаря, то на первый вопрос они оба ответили «Да».

6) Отсюда следует, что ровно одна группа содержит три рыцаря, а остальные — по два рыцаря. Легко понять, что это означает, что всего групп — три, и лжецов между ними тоже всего три: Р Р Р Л Р Р Л Р Р Л. Тогда рыцарей всего семь.

Критерии. Доказано, что есть лжец — *3 балла.*

Доказано, что нет двух лжецов подряд — *3 балла.*

Доказано, что рядом с рыцарем есть другой рыцарь — *3 балла.*

Доказано, что группа подряд идущих рыцарей не может содержать более трех рыцарей — *4 балла.*

Доказано, что есть ровно одна группа из трех рыцарей — *4 балла.*

После этого обоснован верный ответ — *3 балла.*

Все критерии суммируются друг с другом.