Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2024–25 учебный год
6 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Расставьте по кругу семь различных натуральных чисел так, чтобы сумма любых двух подряд идущих по часовой стрелке чисел нацело делилась на следующее за ними по часовой стрелке число. *Достаточно привести один пример.* (20 баллов)

Решение. Можно расставить, например, так: 9, 7, 2, 3, 1, 4, 5 (нерегулярный пример) или 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 (регулярный).

Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. Из пункта A одновременно в одном направлении выехали «Лада» со скоростью 80 км/ч и «Форд» со скоростью 100 км/ч. Через некоторое время вслед за ними с некоторой постоянной скоростью выехал «Порше», который через час после своего выезда обогнал «Ладу», а еще через полчаса — «Форд». Найдите скорость «Порше». *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 200 км/ч.

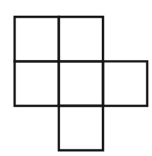
Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с «Ладой». В этой системе отсчета «Форд» едет вперед со скоростью 20 км/ч, а пункт A едет в противоположную сторону со скоростью 80 км/ч.

Пусть в момент старта «Порше» расстояние между «Ладой» и «Фордом» равно d. Тогда в этот момент пункт A (и вместе с ним «Порше») находится на расстоянии $4d$ от «Лады» и на расстоянии $5d$ от «Форда». За час «Порше» доберется до «Лады», следовательно, проедет расстояние $4d$. Значит, за полтора часа «Порше» проедет $6d$ и догонит «Форд». Отсюда следует, что «Форд» за эти полтора часа проехал расстояние d, поэтому скорость «Порше» в шесть раз больше. Следовательно, в этой системе отсчета скорость «Порше» равна 120 км/ч. Тогда его скорость в обычной системе отсчета равна 200 км/ч.

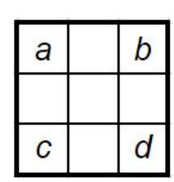
Критерии. Только ответ с проверкой — *4 балла.*

Найдено какое-либо соотношение между скоростями двух машин — *4 балла.*

Задание 3. Во всех клетках квадрата 3×3 записаны нули и единицы так, что сумма всех шести чисел, находящихся в любой фигуре, показанной на картинке (в том числе повернутой или перевернутой), всегда нечётна. Докажите, что все числа, стоящие в четырех угловых клетках квадрата, равны между собой. (20 баллов)



Решение. Условие, что в каждой фигуре сумма чисел имеет одну и ту же чётность, равносильно тому, что и в любом ее дополнении (оставшихся трех клетках) сумма чисел тоже всегда имеет одну и ту же чётность. Таким образом, в любых трех угловых клетках сумма чисел всегда имеет одну и ту же чётность. Это означает, что, например, числа $a + b + c$ и $a + b + d$



— одной чётности. Отсюда следует, что числа c и d — одной чётности (так как слагаемое $a+b$ у них общее). Поэтому в любых двух угловых клетках стоят числа одной четности. Значит, они равны между собой.

Критерии. Приведен только конкретный пример расстановки чисел в таблице и для него проверено утверждение — *0 баллов.*

Задание 4. В лагерь приехали шестиклассники. Среди них есть и мальчики, и девочки, причем и тех, и других больше, чем один человек. Каждому мальчику дали по a яблок, а каждой девочке — по b груш, где a и b — некоторые натуральные числа. Если один мальчик раздаст всем девочкам по яблоку, то у него ничего не останется. А если одна девочка раздаст всем мальчикам по две груши, то у неё тоже ничего не останется. Всего было роздано 99 фруктов. Сколько всего детей приехало в лагерь? *Не забудьте объяснить свой ответ или ответы и доказать, почему других нет.* (20 баллов)

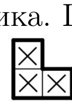
Ответ. 14.

Решение. Из первого условия следует, что всего имеется ровно a девочек, а из второго — что имеется ровно $b/2$ мальчиков (в частности, b делится на 2). Тогда всего было роздано $a \cdot b/2$ яблок и $b \cdot a$ груш. Следовательно, $a \cdot b/2 + b \cdot a = 99$, откуда $a \cdot (b/2) = 33$. По условию, оба множителя a и $b/2$ больше единицы. Число 33 единственным образом раскладывается на произведение двух множителей, больших 1. Поэтому одно из чисел a и $b/2$ равно 3, а другое — 11. Следовательно, их сумма $a + b/2 = 14$.

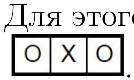
Критерии. Доказано только, что мальчиков $b/2$, девочек a — *4 балла.*

Если, кроме этого, доказано ещё и $ab = 66$, дальнейших продвижений нет — *8 баллов* (не суммируется с предыдущим критерием).

В ответ добавлен случай множителей 1 и 33, запрещенный условием, в остальном решение верно — *18 баллов.*

Задание 5. Петя и Вася играют в игру «крестики-нолики» на бесконечной клетчатой доске по своим правилам: начинает Петя и своим ходом он может поставить один крестик, а Вася в ответ может поставить два нолика. Цель Пети — добиться того, чтобы на доске оказалось три крестика в виде фигурки  (возможно, повернутой). Сможет ли Петя достичь своей цели независимо от действий Васи? *Не забудьте обосновать свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Не сможет.

Решение. Заметим, что в любой фигуре «уголок» есть пара соседних по горизонтали крестиков. Вася может играть так, чтобы на доске вообще не появилось двух таких крестиков. Для этого в ответ на первый ход Пети он поставит вокруг Петиного крестика два нолика: . Дальше он будет действовать таким же образом, если оба поля вокруг очередного Петиного крестика свободны. Если же одно или оба из них уже заняты, то заняты они могут быть только ноликами (ибо по обе стороны от каждого уже имеющегося на доске крестика уже стоят нолики), и в таком случае Вася поставит соответствующий нолик куда угодно. Поэтому Петя не сможет достичь своей цели.

Критерии. Верная идея стратегии, которая не обоснована в решении — *до 10 баллов.*