**Межрегиональные предметные олимпиады КФУ**
**профиль «Математика»**
**Заключительный этап**
**2024–25 учебный год**
**7 класс**
**Решения задач и критерии оценивания**

**Задание 1.** Суммарный возраст дочки и двух сыновей Полины такой же, как и возраст самой Полины. Пройдет несколько лет и суммарный возраст уже только двух сыновей Полины будет равен её возрасту. Во сколько раз тогда повзрослеет дочка? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

**Ответ.** В два раза.

**Решение.** Предположим, что должно пройти $x$ лет, чтобы суммарный возраст уже только двух сыновей Полины был равен её возрасту. Братья за это время повзрослеют на $2x$ лет в сумме, а дочка на $x$ лет, и Полина — тоже на $x$ лет.

Разница между возрастом Полины и суммой возрастов двух сыновей через $x$ лет должна стать равной 0. Таким образом, сейчас эта разница должна быть ровно $2x - x = x$ лет. Но сейчас разница между возрастами Полины и двух сыновей — это в точности возраст дочки. Поэтому сейчас дочке $x$ лет. Значит, через $x$ лет она станет старше в два раза.

**Критерии.** Решение, основанное на конкретном примере возрастов всех участвующих людей — *5 баллов.*

**Задание 2.** Программист Вася написал программу, которая считает среднее арифметическое всех введенных в компьютер чисел. Он по очереди вводит в компьютер натуральные числа и замечает, что среднее арифметическое всех введенных чисел возрастает на 3 после каждого следующего введенного числа. На сколько сотое введенное Васей число будет больше первого? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

**Ответ.** На 594.

**Решение.** Пусть Вася вводил числа $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$ в таком порядке. Обозначим $a_1 = x$. Оно же равно своему среднему арифметическому. Тогда среднее арифметическое чисел $a_1$ и $a_2$ должно быть равно $x + 3$, поэтому $a_2 = x + 6$.

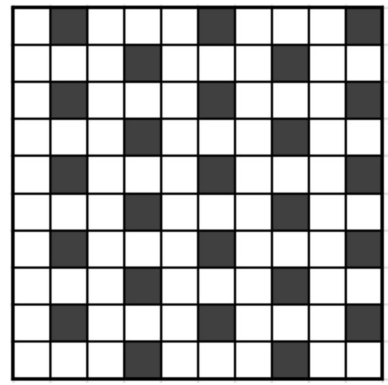
Среднее арифметическое первых трех чисел должно быть равно $x+6$. Но уже $a_2 = x+6$, поэтому $a_3 = x + 12$.

Вообще, после ввода числа $a_{k+1}$ среднее арифметическое должно равняться $x + 3k$. Покажем по индукции, что $a_{k+1} = x + 6k$. Для первых чисел это верно. Пусть это верно для чисел от $a_1$ до $a_{n+1}$. Тогда Вася вводил числа $x, x + 6, \ldots, x + 6n$. После ввода числа $a_{n+2}$ среднее арифметическое должно равняться $x + 3n + 3$. Но пары чисел $a_2$ и $a_{n+1}$, $a_3$ и $a_n$, …уже имеют такое среднее. Поэтому должно быть $a_1 + a_{n+2} = 2x + 6n + 6$, откуда $a_{n+2} = x + 6(n + 1)$.

Отсюда следует, что $a_{100} = x + 6 \cdot 99 = a_1 + 594$.

**Задание 3.** Барон Мюнхгаузен хочет вырезать несколько клеток из квадрата $10 \times 10$ так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата $2 \times 2$ и ни одну *горизонтальную* полоску $1 \times 4$ (вертикальные полоски могут остаться). Какое наименьшее количество клеток потребуется вырезать барону для этого? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

**Ответ.** 25.



**Решение.** *Оценка.* Квадрат $10 \times 10$ можно разбить на 25 непересекающихся квадратов $2 \times 2$. В каждом таком квадрате необходимо вырезать хотя бы одну клетку. Поэтому вырезать нужно не менее 25 клеток.

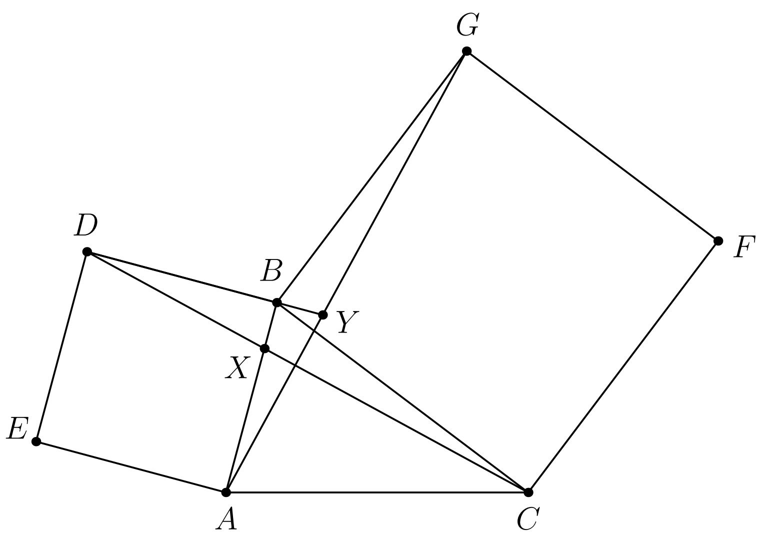
*Пример.* С другой стороны, можно обойтись ровно 25 клетками, как показывает пример на рисунке.

**Критерии.** Только оценка — *8 баллов.*

Только пример — *8 баллов.*

**Задание 4.** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Отрезки $CD$ и $AB$ пересекаются в точке $X$, а прямая $BD$ пересекает отрезок $AG$ в точке $Y$. Докажите, что $BX = BY$. (20 баллов)

**Первое решение.** Треугольники $ABG$ и $DBC$ равны по двум сторонам и углу между ними: $AB = KB$, $BL = BC$, $\angle KBC = 90^\circ + \angle B = \angle ABL$. Тогда $\angle BDX = \angle BAY$, то есть треугольники $DBX$ и $ABY$ равны по стороне и двум углам: $\angle BDX = \angle BAY$, $\angle DBX = 90^\circ = \angle ABY$, $BD = AB$. Следовательно, $BX = BY$, что и требовалось.




**Второе решение.** Легко видеть, что при повороте вокруг точки $B$ на $90^\circ$ прямые $AB$ и $CD$ переходят в прямые $BD$ и $GA$ соответственно, поэтому точка $X = AB \cap CD$ переходит в точку $BD \cap AG = Y$. Отсюда сразу следует, что $BX = BY$.

**Критерии.** Доказано только, что треугольники $ABG$ и $DBC$ равны — *6 баллов.*

**Задание 5.** У волшебника Мерлина есть шесть гирь: две золотые, две серебряные и две бронзовые. Гири каждого вида не отличимы друг от друга внешне, но одна из них легкая, а другая — тяжелая. Все тяжелые гири весят одинаково, и все легкие гири тоже весят одинаково, причем меньше, чем тяжелые. Как Мерлин сможет определить за два взвешивания на чашечных весах все три тяжелые гири? (20 баллов)

**Решение.** Для краткости обозначим гири буквами $G_1$, $G_2$ (золотые), $A_1$, $A_2$ (серебряные), $B_1$, $B_2$ (бронзовые). Первым взвешиванием Мерлин сравнит между собой

$$G_1, A_1 \vee \ G_2, B_1.$$

Разберем возможные исходы.

1) *Одна из чаш перевесила.* Без ограничения общности будем считать, что тяжелее оказалась левая чаша (случай правой разбирается симметрично). Тогда обязательно $G_1$ — тяжелая, а $G_2$ — легкая (иначе правая чаша будет не легче). Кроме того, $A_1$ не легче, чем $B_1$ (по сути, это означает невозможность случая, когда $A_1$ — легкая, а $B_1$ — тяжелая).

Теперь вторым взвешиванием он сравнит между собой $A_1 \vee B_2$. Если левая чаша перевесит, то $A_1$ — тяжелая, а $B_2$ — легкая. Если правая чаша перевесит, то наоборот. Если же весы покажут равенство, то обе эти гири не могут быть легкими, значит, они обе — тяжелые. Во всех случаях Мерлин определит все шесть гирь.

2) *Весы показали равенство.* Возможно всего два случая: первый — когда $G_1$ и $B_1$ — тяжелые, а $A_1$ и $G_2$ — легкие, второй — наоборот. В обоих случаях Мерлину достаточно вторым взвешиванием сравнить между собой $G_1 \ \vee \ G_2$, чтобы всё узнать.

**Критерии.** Верный алгоритм, полное обоснование которого отсутствует — *до 10 баллов.*

В решение приведено только первое взвешивание с полным разбором его итогов, сводящее задачу ко второму взвешиванию, в котором достаточно сравнить какие-то две гири — *до 6 баллов.*