Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2024/25 учебный год

8 класс

Задание 1 (20 баллов).

Одно двузначное число поделили на другое двузначное число и полученную дробь умножили на 1000. Какое наименьшее натуральное число могло получиться в результате?

Ответ: 125.

Решение. Пусть исходные числа равны m и n, надо найти наименьшее натуральное k такое, что $\frac{m}{n} \cdot 1000 = k$. Значит, $k \geq 1000 \cdot \frac{10}{99} > 100$.

На какие сомножители мы можем сократить дробь $\frac{1000m}{n}$? Число 1000 состоит из двоек и пятерок, $1000 = 8 \cdot 125$. Заметим, что все пятерки сократиться не могут, так как число n – двузначное. Значит, k делится на 5.

Рассмотрим на роль k числа большие 100 и делящиеся на 5.

Пусть k = 105, тогда $n = \frac{1000m}{105} = \frac{200m}{19}$. Ясно, что 19 может сократиться только с m, так что n не меньше 200, трехзначное.

Пусть k = 110, тогда $n = \frac{1000m}{110} = \frac{100m}{11}$. Аналогично получаем, что $n \geq 100$.

Пусть k = 115, тогда $n = \frac{1000m}{115} = \frac{200m}{23}$, тогда $n \geq 200$.

Пусть k = 120, тогда $n = \frac{1000m}{120} = \frac{25m}{3}$. Ясно, что m должно делиться на 3, поэтому $m \geq 12, n \geq \frac{25 \cdot 12}{3} = 100$. Не является двузначным.

Пусть k = 125, тогда $n = \frac{1000m}{125} = 8m$. В силу того, что $m \geq 10$, имеем $n \geq 80$. Можно выбрать в качестве n любое из чисел 80, 88, 96. Например, $\frac{11}{88} \cdot 1000 = 125$.

Критерии оценивания: Ответ без обоснования – 5 баллов. Оценка снизу для k – плюс 5 баллов. Доказательство того, что k делится на 5 – плюс 5 баллов. Полный обоснованный ответ – 20 балов.

Задание 2 (20 баллов).

Электронные часы показывают время (часы и минуты) от 00:00 до 23:59. Перечислите моменты суток, в которые число минут, прошедших с полуночи, в 24 раза больше, чем сумма всех цифр на часах.

Ответ: 00:00 и 05:36.

Решение. Обозначим число часов через h, число минут через m. Имеем 24k = 60h + m, где k – сумма цифр чисел h и m. Значит, m делится на 12, m = 12p. То есть m равно 0, 12, 24, 36, 48, так что сумма его цифр составляет 3p, $0 \leq p \leq 4$.

Пусть h записывается цифрами a и b, тогда сумма его цифр равна $a + b, h = 10a + b$. Условие, наложенное на момент времени, перепишется в виде $24(a + b + 3p) = 60(10a + b) + 12p$, то есть $48a + 3b - 5p = 0$.

Значит, p делится на 3, то есть может быть равно только 0 или 3. Проверим эти случаи.

Если $p = 0, m = 0$, тогда $48a + 3b = 0$. В силу неотрицательности $a = b = 0$, то есть искомый момент – полночь, 00:00.

Если $p = 3, m = 36$, тогда $48a + 3b = 15$, то есть $a = 0, b = 5$. Искомый момент – 05:36. Проверка: с начала суток прошло $5 \cdot 60 + 36 = 336$ минут, $336 : 24 = 14 = 0 + 5 + 3 + 6$.

Задание 3 (20 баллов).

Назовем натуральное число растущим, если цифры в его записи идут слева направо по возрастанию, например, 13467. Каких чисел больше среди растущих: четных или нечетных?

Ответ: Больше нечетных.

Решение. Рассмотрим любое четное растущее число, например, $n = 1256$. Ясно, что его последняя цифра меньше 9, так что $n + 1 = 1257$ – также растущее, но нечетное число. Разным четным растущим мы сопоставили столько же нечетных растущих. Но среди последних есть ещё числа, кончающиеся на 89 (или 67 и т.п.), которые не получаются таким способом ни из одного четного растущего числа.

Замечание. Выражение «по возрастанию» можно рассматривать как в строгом, так и не в строгом смысле. Ход решения от этого не изменится. Для «нестрогого» случая в качестве примера «лишних» нечетных чисел можно взять заканчивающиеся на 99, 77 и т.п.

Вариант: нечетное число 1 не соответствует никакому четному при таком алгоритме (если не считать 0 натуральным).

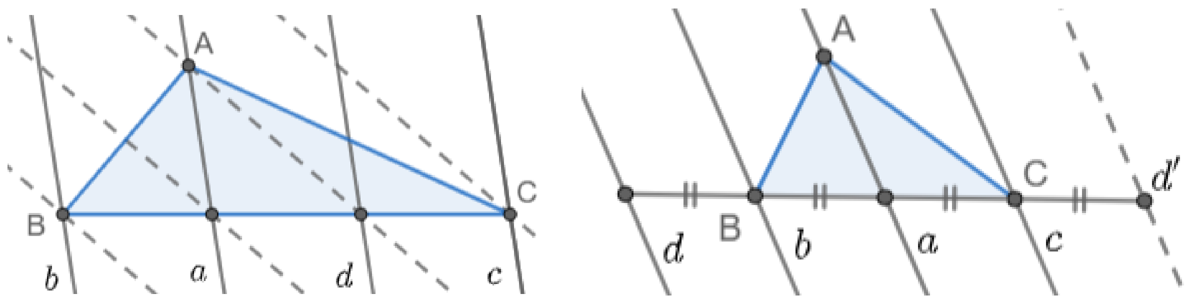
Задание 4 (20 баллов).

Листочек с заданием – это чистый лист, на котором отмечены три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Задание: провести четыре параллельные прямые так, чтобы все расстояния между соседними прямыми были одинаковыми. При этом три из этих прямых должны проходить через три заданные точки. Как выполнить это задание?

Ученикам выдали совершенно одинаковые листочки. Какое наибольшее число различных результатов может оказаться среди решений учеников?

Ответ: 12.

Решение. Обозначим заданные точки через A, B, C, а прямые, проходящие через них, соответственно, через a, b, c, четвертая прямая – d. Рассмотрим сначала случай, когда a лежит между b и c. Для четвертой прямой возможны 4 варианта расположения (_b_a_c_). Если d также лежит между b и c, то прямые a и d делят отрезок BC на три равные части (см. левый рисунок). При этом a может проходить через любую из точек деления.



Если d является крайней прямой, то a делит отрезок BC пополам. Тогда прямая d параллельна прямой a и пересекает прямую BC либо на луче BC, либо на луче CB (правый рисунок).

Итак, всего получаем 4 варианта. Кроме того, может оказаться, что из трех прямых a, b, c средней будет не a, а b или c, так что вариантов получится втрое больше.

Критерии оценивания: Если произведен только подсчёт числа комбинаций, без описания, как можно построить соответствующие прямые, – 5 баллов.

Задание 5 (20 баллов).

Учительница Аделаида Ивановна готовит задания по теме «наибольший общий делитель». Задание имеет вид «Найти НОД(a, b)», причем в качестве a и b она хочет взять два различных делителя числа 2024, которые не являются взаимно простыми. Какое наибольшее число различных вариантов такого задания она может подготовить? (Задания считаются разными, если отличается хотя бы одно число в парах; порядок чисел в паре не учитывается).

Ответ: 89.

Решение. Имеем $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$; нечетными делителями будут 1, 11, 23 и 253. Каждый из них можно ещё умножить на 2, 4 или 8, то есть всего у числа 2024 имеется 16 делителей. Ясно, что 1 не может использоваться в задании, так как оно взаимно просто со всеми числами. Из 15 остальных чисел можно составить $\frac{15\cdot 14}{2} = 105$ пар. Подсчитаем число пар, у которых НОД(a, b) = 1. Заметим, что в таких парах хотя бы один из элементов является нечетным числом. Переберем нечетные делители числа 2024.

Пусть a = 11, тогда в качестве b можно взять числа 1, 23 умноженные на степень двойки. Получим $2 \cdot 4 = 8$ делителей числа 2024, но 1 мы не учитываем.

Аналогично, пар вида (23, b) будет 7, но пару (23, 11) мы уже учли, то есть новых пар 6.

Пусть a = 253, тогда b должно быть степенью 2, то есть 2, 4, 8.

Итого имеем $7 + 6 + 3 = 16$ пар взаимно простых делителей. Значит, не взаимно простых будет $105 - 16 = 89$.

Замечание. Можно не исключать 1 из числа делителей на первом этапе. Тогда имеем $15 + 7 + 6 + 3 = 31$ пару взаимно простых делителей. Значит, не взаимно простых будет $120 - 31 = 89$.