Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2023/24 учебный год

9 класс

Задание 1 (20 баллов).

В корзине лежат яблоки и мандарины, причем яблоки составляют менее 80% всех фруктов. Любочка добавляет в корзину фрукты по одному, так что в какой-то момент доля яблок становится больше 80%. Обязательно ли был момент, когда доля яблок была в точности равна 80%?

Ответ: Да.

Решение. Запишем проценты в виде обыкновенной дроби, $80\% = \frac{4}{5}$. Пусть в некоторый момент в корзине лежит n фруктов, причем доля яблок меньше, чем $\frac{4}{5}$, а после добавления одного фрукта их стало больше, чем $\frac{4}{5}$. Ясно, что в этот момент добавили яблоко (пусть их было k, тогда стало – k+1). Имеем

$$\frac{k}{n} < \frac{4}{5}, \qquad \frac{k+1}{n+1} > \frac{4}{5}; \qquad \begin{cases} 5k < 4n \\ 5k+5 > 4n+4 \end{cases}; \quad 4n-1 < 5k < 4n$$

Этого не может быть при целых n и k. Значит, такого момента не будет, доля яблок не может «перескочить» через 80%.

Критерии оценивания: Ответ без всякого обоснования – 0 баллов.

Задание 2 (20 баллов).

Решите ребус СТО · СТО = СЕКРЕТ

Ответ. $897 \cdot 897 = 804609$.

Решение. В силу того, что правая часть шестизначная, число СТО достаточно большое. Оценим его первую цифру. Имеем

$10000\text{С} < \text{СЕКРЕТ} < \left(100(\text{С}+1)\right)^2$, т.е. $10\text{С} < (\text{С}+1)^2$; $\text{С}^2 - 8\text{С} + 1 > 0$, в силу целочисленности $\text{С}^2 - 8\text{С} + 1 \geq 1$, то есть $\text{С}^2 - 8\text{С} \geq 0$. С учетом того, что $C > 0$ получаем, что $\text{С} \geq 8$, откуда $\text{СТО} \geq \sqrt{800000}$; $\text{СТО} \geq 895$.

(Можно оценить значение С и с помощью перебора. Квадрат числа СТО шестизначный, значит $320 \leq \text{СТО} \leq 987$. Но тогда $\text{С} \geq 3$; $\text{СЕКРЕТ} > 300000$; $\text{СТО} \geq 548$. Тогда $\text{С} \geq 5$; $\text{СЕКРЕТ} > 500000$; $\text{СТО} \geq 708$.

Аналогично $\text{С} \geq 7$; $\text{СЕКРЕТ} > 700000$; $\text{СТО} \geq 837$ и $\text{С} \geq 8$; $\text{СЕКРЕТ} > 800000$; $\text{СТО} \geq 895$.)

Итак, цифра С равна 8 или 9. Пусть СТО=89О, тогда его квадрат заканчивается на Т=9, то есть О равно 3 (слишком мало) или 7. Проверяем: $897 \cdot 897 = 804609$. Подходит.

Если С=9, то наименьшим значением для числа СЕКРЕТ будет 901203, то есть $\text{СТО} \geq \sqrt{901203} \geq 950$. Значит, цифра Т лежит в пределах от 5 до 8 и является последней цифрой квадрата, то есть подходят 5 и 6.

СТО=95О, квадрат заканчивается на 5, значит, и О=5, чего быть не может

СТО=96О, квадрат заканчивается на 6, значит, и О=4. Проверяем: $964 \cdot 964 = 929\,296$, не подходит.

Критерии оценивания: Только ответ – 5 баллов. Если показано, что С = 8 или 9, но не проверено значение С=9, то результат – не более 10 баллов.

Задание 3 (20 баллов).

Вовочке задали на дом квадратное уравнение. «Учитель сказал, что оно имеет два целых корня, а у меня получается, что корней нет» – пожаловался он. Его папа-математик, посмотрев на уравнение, сказал: «Ты, наверное, неправильно списал с доски один из коэффициентов. Если это так, то я знаю правильный вариант задания, причем он единственный».

Докажите, что, если папа прав, то коэффициент при x Вовочка записал верно.

Решение. Пусть Вовочка записал уравнение в виде $ax^2+bx+c=0$ и оно не имеет корней. Предположим, что коэффициент b записан неверно.

Пусть верное задание имеет вид $ax^2+b_1x+c=0$. По теореме Виета $b_1=-a(x_1+x_2)$; $c=ax_1x_2$. Заметим, что уравнение $ax^2-b_1x+c=0$ в этом случае имеет корни $-x_1; -x_2$. Итак, если $b_1\neq 0$, то существуют как минимум два исправления исходного уравнения, что противоречит словам папы.

Пусть теперь $b_1=0$, то есть уравнение $ax^2+c=0$ имеет корни. Это значит, что $D_1=-4ac\geq 0$. Но тогда дискриминант исходного уравнения $D=b^2-4ac>0$, то есть оно также имеет корни.

Мы показали следующий факт: если можно исправить уравнение за счёт второго коэффициента, то это исправление не единственное. Вообще говоря, надо ещё показать, что ситуация, описанная папой, возможна. Например, рассмотрим уравнение $3x^2+x+2=0$. Если не менять первый коэффициент, то новое уравнение имеет вид $3x^2+b_1x+c_1=0$, где либо $b_1=1$, либо $c_1=2$. Но тогда числа $\frac{b_1}{3}=-(x_1+x_2)$ и $\frac{c_1}{3}=x_1x_2$ не могут быть оба целыми. Значит, уравнение нельзя исправить за счет второго или третьего коэффициента, так как ни один из них не делится на 3. Попробуем найти «правильный» коэффициент a. Ясно, что он должен быть делителем как 1, так и 2, то есть подходят только $a=1$ и $a=-1$.

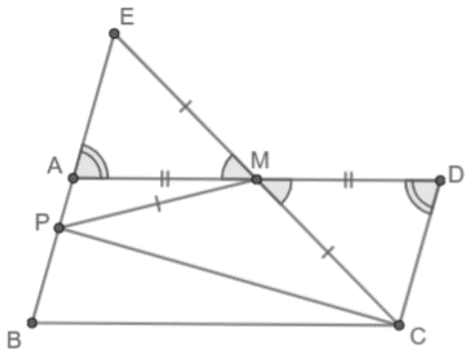
Уравнение $x^2+x+2=0$ не имеет решений, а уравнение $-x^2+x+2=0$ имеет целые корни $x=-1$ и $x=2$. Именно оно и будет единственным возможным исправлением исходного уравнения.

Замечание. В первой части решения не используется целочисленность корней. Однако без этого ограничения высказывание папы будет неверным. Без условия целочисленности можно также привести другие варианты «исправленного» уравнения.

Критерии оценивания: Если не исследовано, может ли утверждение папы быть верным, баллы не снижаются.

Задание 4 (20 баллов).

В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AD. На отрезке AB нашлась точка P такая, что $MP=MC$. Чему равен угол между прямыми PC и AB?



Ответ. 90°.

Решение. Продолжим прямые AB и CM до пересечения в точке E. Треугольники AEM и DMC равны по стороне и двум прилегающим углам. Значит, $ME=MC=MP$, то есть точка P лежит на окружности с диаметром CE. Значит, угол EPC – прямой. Он и является искомым.

Задание 5 (20 баллов).

Сколько решений в целых числах x имеет уравнение $\left[\frac{x}{20}\right]-\left[\frac{x}{24}\right]=k$, где k – некоторое фиксированное натуральное число? Здесь $[t]$ – целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t.

Ответ: 120.

Решение. Пусть $\left[\frac{x}{24}\right]=n$, тогда $\left[\frac{x}{20}\right]=n+k$, то есть $n\leq\frac{x}{24}<n+1$; $n+k\leq\frac{x}{20}<n+k+1$, Имеем

$$24n\leq x<24n+24;\ 20(n+k)\leq x<20(n+k)+20$$

Первое двойное неравенство можно переписать в виде $x=24n+r$, $0\leq r\leq 23$; тогда второе двойное неравенство принимает вид

$$20(n+k)\leq 24n+r<20(n+k)+20$$

Решим это неравенство относительно n. Для этого вычтем $20n+r$ из всех частей неравенства:

$$20k-r\leq 4n<20k+20-r, \text{то есть } 5k-\frac{r}{4}\leq n<5k+\frac{20-r}{4}$$

Длина полуинтервала $\left[5k - \frac{r}{4}; 5k + \frac{20-r}{4}\right)$ равна 5, поэтому он содержит 5 целых значений n при любом r. Значит, всего существует $24 \cdot 5 = 120$ решений. Заметим, что 120 = НОК(20, 24).