

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
INTERNATIONAL OLYMPIADS OF KFU
Профиль «Математика»
Заключительный этап
2024-2025 учебный год
10-11 класс

Задача 1 (10 баллов).

Питер купил несколько ручек по 1,5 доллара. Если бы он купил ручки по 1,2 доллара, он мог бы купить еще 3 ручки за те же деньги. Если бы он купил ручки по 2,1 доллара, он мог бы купить на 5 ручек меньше за те же деньги. Сколько ручек купил Питер?

Задача 2 (15 баллов).

Учитель готовит задания вида «Найдите НОД (a, b)». В качестве a и b он берет два различных делителя числа 2025 (порядок чисел в паре не имеет значения).

а) Сколько различных вариантов такого задания он может подготовить?

б) Сколько из них имеют ответ НОД (a, b) = 1?

Задача 3 (15 баллов).

Будем говорить, что треугольник описан около пятиугольника, если каждая сторона треугольника содержит сторону пятиугольника. Начертите выпуклый пятиугольник, около которого можно описать: а) ровно один треугольник; б) ровно два треугольника.

Задача 4 (20 баллов).

Миссис Смит покупает коробки с лакомствами, в каждой из которых находится одна из игрушек: либо кукла, либо робот. Прежде чем открыть коробку, она не знает, какая игрушка внутри, но сразу после покупки заглядывает внутрь.

У миссис Смит двое сыновей, и она хочет подарить каждому из них по роботу. Куклы встречаются в три раза чаще, чем роботы. Какова вероятность того, что ей придется купить: а) ровно 3 коробки; б) не менее 4 коробок?

Задача 5 (20 баллов).

Для некоторых $a \neq 1$ параболы с уравнениями $y = ax^2 + x + 1$; $y = x^2 + x + a$ имеют общую касательную (точки касания не обязательно должны совпадать). Докажите, что эта касательная проходит через начало координат.

Задача 6 (20 баллов).

В выпуклом четырехугольнике ABCD проведены биссектрисы внутренних углов. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P, биссектрисы углов B и C пересекаются в точке Q, биссектрисы углов C и D пересекаются в точке R, а биссектрисы углов D и A пересекаются в точке S. Точки пересечения образуют четырехугольник PQRS.

а) Докажите, что четырехугольник PQRS вписанный.

б) Пусть PQRS — квадрат. Докажите, что ABCD — прямоугольник.