ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 63

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1270057

№1.

$\sqrt[2020]{2025!} \quad \sqrt[2021]{2026!}$

M10-63

$\log(2026!) = 2025! \cdot 2026$

$\sqrt[2020]{1 \cdot 2 \ldots 2025} = \cancel{\sqrt{2025!}^{2020}}$

$\sqrt[2021]{1 \cdot 2 \ldots 2026} = \cancel{\sqrt{2026!}^{2021}} \cancel{= (\sqrt{2025!} + 2026)^{\frac{1}{2021}}}$

$A = 2025!^{\frac{1}{2020}} \qquad \log(A) = \frac{\log(2025!)}{2020}$

$B = 2026!^{\frac{1}{2021}} \qquad \log(B) = \frac{\log(2026!)}{2021} = \frac{\log(2025!) + \log 2026}{2021}$

$$\log(A) - \log(B) = \frac{2021\log(2025!) - 2020\log(2025!) - 2020\log(2026)}{2020 \cdot 2021}$$

$$= \frac{\log(2025!) - 2020\log(2026)}{2020 \cdot 2021}$$

т.к. $2025! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2024 \cdot 2025$, а каждое из $1, 2, 3, \ldots 2025$ строго меньше 2026, что

$2025! < 2026^{2025} \Rightarrow \log(2025!) < 2025\log(2026)$

$\Downarrow$

$\log(2025!) < 2020\log(2026)$

$\log A - \log B < 0 \Rightarrow A < B$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}}$

1	2	3	4	5	Σ
10	1	20	0	20	51

$\sin(\cos(x)) \geq \cos(\sin(x))$ №2.

M10-63

$\cos x \in [-1;1]$ $\sin x \in [-1;1]$.

$\sin(\cos x) \in [\sin(-1), \sin(1)] = [-\sin 1, \sin 1]$,

$\cos(\sin x) \in [\cos 1, 1]$,

потому что на $[-1;1]$ cos убыв., а его min там равен $\cos 1$.

$t \in [-1;1]$ $\sin t \leq \sin 1$, $\cos t \geq \cos 1$.

т.к. sin на $[-1;1]$ достиг. max в точке $t=1$. т.к. cos на $[-1;1]$ убыв, поэтому его min там в точке $t=1$.

$\sin(\cos x) \leq \sin 1$ $\cos(\sin x) \geq \cos 1$.

при x, где $\cos(x) < 0$, мы имеем $\sin(\cos x) < 0 < \cos(\sin x)$ и неравенств нарушается. => УСЛОВИЕ! $\underline{\cos x \geq 0}$

$$x \in \bigcup_{k \in Z} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right].$$

$\cos x \in [0;1]$.

$\sin(\cos x) \in [\sin 0, \sin 1] = [0, \sin 1]$. max: $\sim 0{,}84$.

$\cos(\sin x) \in [\cos 1, 1]$. min: $\sim 0{,}54$.

Проверка в крит. точке!

$x=0$

$\sin(\cos 0) = \sin 1 \sim 0{,}84 \Rightarrow \sin(\cos 0) < \cos(\sin 0)$

$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1$

Но в $x=0$ левая часть принимает max на всей области $\cos x \geq 0$. Раз max меньше правой части, то

$\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\sin(\cos x) \geq \cos(\sin x) \quad \varnothing}$

№3.

M10-63

$P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1))$

$2p(n) = p(n+1) + p(n-1)$

$p(n+1) - 2p(n) + p(n-1) = 0.$

$\Delta p(n) = p(n+1) - p(n)$

$\Delta p(n) - \Delta p(n-1) = 0.$

следствие

$\Delta p(n) = \Delta p(n-1) = \Delta p(n-2) \ldots = C.$

где C – константа. $\Rightarrow$ p должн. удовлетв.:

$p(n+1) - p(n) = C \Rightarrow p(n) = Cn + D$

где D – др. константа

ПРОВЕРКА

$p(n) = Cn + D$

$p(n+1) = C(n+1) + D = Cn + C + D$

$p(n-1) = C(n-1) + D = Cn - C + D$

правая часть условия:

$\frac{1}{2}(p(n+1) + p(n-1)) = \frac{1}{2}((Cn + C + D) + (Cn - C + D)) =$

$= \frac{1}{2}(2Cn + 2D) = Cn + D \Rightarrow$ условие выполнено

+

$\boxed{p(x) = ax + b, \ a, b \in R}$

1, 1, 4, 5. №4. М 10-63

Если 4-угольник вписан в окр., то каждая его сторона — хорда, и для хорды длины s и радиуса R центр. угол α удовлетв.:

$$s = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 2\arcsin\frac{s}{2R}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi,$$

где α_i — центр. углы, соотв. стор 1, 1, 4, 5.

$$2\arcsin\frac{1}{2R} + 2\arcsin\frac{1}{2R} + 2\arcsin\frac{4}{2R} + 2\arcsin\frac{5}{2R} = 2\pi$$

$$2\arcsin\frac{1}{2R} + \arcsin\frac{4}{2R} + \arcsin\frac{5}{2R} = \pi$$

$$2\arcsin\frac{1}{2R} + \arcsin\frac{2}{R} + \arcsin\frac{5}{2R} = \pi$$

Для R_{min} стороны должны лежать на 1 окр. и „вытянуться" в линию, то есть четырёхугольник почти развёрнут, чтобы сумма арксинусов была максимально близка к π

Интуитивно: для R_{min} меньше стороны „сжимаются" вместе, а большие — распределяются, поэтому можно попробовать максим. склеивание.

·) Е 4 и 5 „противоположение" на окр. — так R минимален.

$\cancel{R_{min} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S_{max}}}$

$R \geq$ макс. сторона.

~~ПРОВЕРКА~~ ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

$(AB = 1, BC = 1, CD = 4, DA = 5)$

№4.

№5.

М 10-63

Треть - рыцари (K), которые не лгут
остальные - лжецы (L) которые лгут в $\frac{2}{3}$ случ.
A - житель ответил правду на 1 вопрос
B - житель солжёт на 2 вопрос.

$$P(K|A)=\frac{P(A|K)P(K)}{P(A)}, \quad P(L,A)=\frac{P(A|L)P(L)}{P(A)}$$

$$P(A)=P(A|K)P(K)+P(A|L)P(L)$$

$P(A|K)=1$. – рыцарь не врёт

$P(A|L)=\frac{1}{3}$ – лжец не врёт в $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ случ.

$$P(A)=1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

$$P(K|A)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

$$P(L|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{2}{5}.$$

$P(\text{ложь}|K)=0$.

$P(\text{ложь}|L)=\frac{2}{3}$.

$$P(B|A)=P(B|K)P(K|A)+P(B|L)P(L|A)=$$
$$=0\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{4}{15}}$

наибольшая диагональ $= AB + CD = 1 + 4 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ диаметр $= 5 \Rightarrow$ радиус $= 2{,}5$

$\boxed{R_{min} = \frac{5}{2} = 2{,}5.}$

M10-63

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 73

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1274931

M 10-33

N1

$\sqrt[2020]{2025!} \vee \sqrt[2021]{2026!}$

Пусть:

$a = \sqrt[2020]{2025!}$

$b = \sqrt[2021]{2026!}$

Сравнение a и b, равносильно сравнению $a^{2020\cdot 2021} \vee b^{2020\cdot 2021}$, сделаем обратную замену.

$a^{2020\cdot 2021} = (2025!)^{2021}$

$b^{2020\cdot 2021} = (2026!)^{2020}$, теперь сравниваем.

$$\frac{(2025!)^{2021}}{(2025!)^{2020}} \vee \frac{(2025!)^{2020}\cdot 2026^{2020}}{(2025!)^{2020}} \qquad (2025!)^{2021} \vee (2026!)^{2020} \quad | : (2025!)^{2020}$$

$\Updownarrow$

$2025! \vee 2026^{2020}$

$2025! < 2026^{2020}$

В первом числе мы складываем от 1 до 2025, а во втором числе мы умножаем $\underbrace{2026\cdot 2026\cdot 2026 \cdot \ldots \cdot 2026}_{\text{2022 раза еще умножим на 2026}}$

Мы делали равносильные преобразования $\Rightarrow \sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

Ответ: $\sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

1	2	3	4	5	Σ
10	12	10	0	20	52

N3

$p(n) = \frac{1}{2}(p(n+1) + p(n-1)) \quad | \cdot 2$

$2p(n) = p(n+1) + p(n-1)$

$p(n+1) - 2p(n) + p(n-1) = 0.$

Разбор случаев:

? почему?

Если $p(x)$ – многочлен степени ноль, вторая разность равна нулю

Если $p(x)$ – многочлен в степени один, вторая разность ноль.

Если $p(x)$ – многочлен в степени два, вторая разность не ноль, ~~а~~ константа.

Если степень ≥ 2, вторая разность не ноль. ~~~~

Покажу явно:

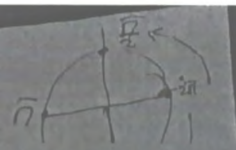
$$\begin{cases} p(x) = ax^2 + bx + c \\ p(n) = an^2 + bn + c. \\ p(n+1) = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + 2an + a + bn + b + c. \quad (3) \\ p(n-1) = a(n-1)^2 + b(n-1) + c = an^2 - an + a + bn - b + c \quad (4). \end{cases}$$

~~~~ $(3) + (4)$: $p(n+1) + p(n-1) = 2an^2 + 2a + 2bn + 2c$

лист 1.
~~~~

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$]

$-\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}$



$2p(n) = 2an^2 + 2bn + 2c$.

$p(n+1) + p(n-1) - 2p(n) = 2a$ + для квадр

$a = 0$

Проверка линейного случая: $p(x) = ax + b$. +

$p(n+1) + (p(n-1)) = 2an + 2b = 2p(n)$ — все верно

$\Rightarrow p(x) = ax + b \quad a, b \in R$

Отв: $p(x) = ax + b$, где $a, b \in R$

N_2:

$\sin(\cos(x)) \geqslant \cos(\sin(x))$.

$\sin(\cos(x)) \geqslant \sin(\frac{\pi}{2} - \sin(x))$

$\sin(\cos(x)) - \sin(\frac{\pi}{2} - \sin(x)) \geqslant 0$.

$$2\cos\left(\frac{\cos x + \frac{\pi}{2} - \sin x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2}\right)$$

$$\underset{A}{\parallel} \qquad\qquad \underset{B}{\parallel}$$

$2\cos A \cdot \cos B \geqslant 0$. ; Рассмотрим какие значения может принимать A и B

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ +

$\frac{\cos x + \sin x - \frac{\pi}{2}}{2} \in [\frac{-\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}}{2}] \subset (-\frac{\pi}{2}; 0)$

$\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} < 0$, $\Rightarrow B < 0$, значит и $\sin B < 0$

Если $\sin B < 0$, а выражение должно быть $\geqslant$, $\Rightarrow \cos$ тоже должен быть отрицательным, сейчас надо посмотреть знак cos.

$\cos x - \sin x = -\sqrt{2} \cdot \sin(x - \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ +

$A = \frac{\cos x - \sin(x) + \frac{\pi}{2}}{2} \in [\frac{-\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}}{2}] \subset (0; \frac{\pi}{2})$

$\frac{-\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}}{2} > 0$, значит $A > 0$ и знак у $\cos > 0$.

т.к $\cos A > 0$ и $\sin B < 0$, то $\cos A \cdot \sin B < 0$, значит решений нету.

Ответ: нет решений

№5

Пусть:

R – житель рыцарь

L – житель лжец.

T_1 – на первый вопрос правильный ответ.

F_2 – на второй ложный.

$P(R) = \frac{1}{3}$

$P(L) = \frac{2}{3}$

Рыцари всегда говорят правду $\Rightarrow P(T_1|R) = 1$.

$P(F_2|R) = 0$.

Вероятность правды на первый вопрос:

$$P(T_1) = \underbrace{P(T_1|R)\cdot P(R)}_{\text{рыцар.}} + \underbrace{P(T_1|L)\cdot P(L)}_{\text{лжец}} = 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

?

Вероятность того что на первый вопрос, ни 2 солжет. для рыцаря это не возможно $P(F_2 \cap T_1|R) = 0$.

Для лжеца: $P(F_2 \cap T_1|L) = P(T_1|L)\cdot P(F_2|L) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Тогда $P(F_2 \cap T_1) = 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

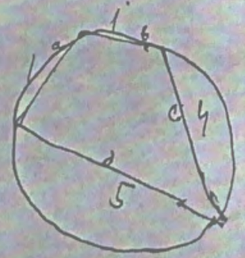
$\Downarrow$

Услов. вероятн $= \frac{\text{благоприят}}{\text{все}} = \frac{P(F_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{27}\cdot\frac{9}{5} = \frac{4}{15}$

Отв: $\frac{4}{15}$

(+)

№4



Найду площадь в четырех угол по формуле Герона.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{243}{8}.$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2} = 5{,}5$

R окружности буду искать по формуле

$$R = \frac{1}{4S\cdot\sqrt{(ab+cd)\cdot(ac+bd)\cdot(ad+bc)}}$$

$$\frac{1}{4\cdot\frac{243}{2}\cdot\sqrt{21\cdot 81}}$$

Ответ: $R = \frac{1}{\frac{243}{2}\cdot\sqrt{21\cdot 81}}$

Также надо доказать почему число с помощ. расположением сторон радиус будет однозначный, так как я думаю она пересечется сторон. S не поменяется $\Rightarrow$ и радиус тоже.

Лист 3

М10-43

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 71

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 915054

M10-11

№1

$\sqrt[2020]{2025!} \vee \sqrt[2021]{2026!}$

$\sqrt[2020]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2025} \vee \sqrt[2021]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026}$

$1^{\frac{1}{2020}} \cdot 2^{\frac{1}{2020}} \cdot 3^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}} \vee 1^{\frac{1}{2021}} \cdot 2^{\frac{1}{2021}} \cdot \ldots \times 2026^{\frac{1}{2021}}$

$2^{\frac{1}{2020}} \cdot 3^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}} \vee 2^{\frac{1}{2021}} \cdot 3^{\frac{1}{2021}} \cdot \ldots \cdot 2026^{\frac{1}{2021}}$

$2^{\frac{1}{2020}} : 2^{\frac{1}{2021}} = 2^{\left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right)} = 2^{\frac{1}{2020 \cdot 2021}}$

По аналогии разделим ~~левую часть на прав~~ левую и правую части на $\left(2^{\frac{1}{2021}} \cdot 3^{\frac{1}{2021}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2021}}\right)$

Мы имеем на это право, т.к. делитель $> 0 \Rightarrow$ неравенство сохранит свой знак.

Получим

$2^{\frac{1}{2020 \cdot 2021}} \cdot 3^{\frac{1}{2020 \cdot 2021}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020 \cdot 2021}} \vee 2026^{\frac{1}{2021}}$

$2^{\frac{1}{2020 \cdot 2021}} = \left(2^{\frac{1}{2020}}\right)^{\frac{1}{2021}}$

По аналогии левую часть можно представить в виде

$\left(2^{\frac{1}{2020}} \cdot 3^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}}\right)^{\frac{1}{2021}} \vee 2026^{\frac{1}{2021}}$

Знак между левой и правой частью тот же, что и в выражении (т.к. $a^k < b^k$ если $a < b$, где $a, b, k > 0$)

$2^{\frac{1}{2020}} \cdot 3^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}} \vee 2026$

1	2	3	4	5	Σ
20	0	12	0	0	32

Л.

М 10-71

№ 1 продолж.

Решим неравенство

$$2^{\frac{1}{2020}} \cdot 3^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}} < 2026$$

$$2025 = \underbrace{2025^{\frac{1}{2020}} \cdot 2025^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}}}_{\text{всего 2020 множителей}}$$

Представим левую часть в виде

$$\underbrace{720^{\frac{1}{2020}}}_{(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)^{\frac{1}{2020}}} \cdot 7^{\frac{1}{2020}} \cdot 8^{\frac{1}{2020}} \cdot 9^{\frac{1}{2020}} \cdot \ldots \cdot 2025^{\frac{1}{2020}}$$

В этом произведении 2020 множителей, причем все кроме одного $< 2025^{\frac{1}{2020}}$, т.е. однозначно это произведение < 2025 (произведение 2020 множителей $= 2025^{\frac{1}{2020}}$)

А раз левая часть < 2025, то и < 2026

Доказано таким образом, что

$$(2025!)^{\frac{1}{2020}} < 2026$$

$$(2025!)^{\frac{1}{2020\cdot2021}} < 2026^{\frac{1}{2021}}$$

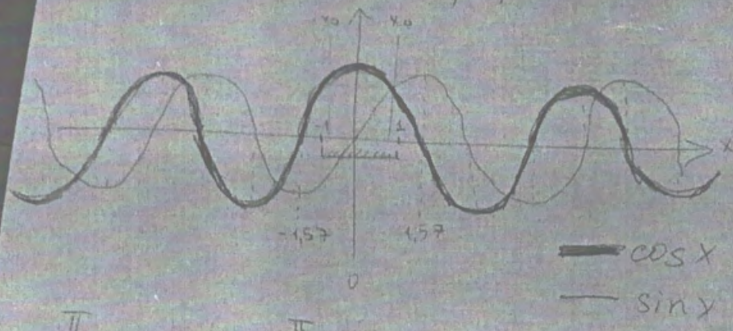
$$\sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$$

M10 - 71

№2

Заметим, что $\sin x$ и $\cos x$ принимают значения [-1; 1] (от -1 до 1).

Теперь рассмотрим графики $\sin x$ и $\cos x$.



$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 \qquad \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$

Нас интересует интервал $x \in [-1, 1]$.

Нужно на нем подобрать такие x_1 и x_2, чтобы $\sin x_1 \geq \cos x_2$ ($x_1 = \cos x$, $x_2 = \sin x$ - где x не относится к графику)

Т.к. график $\cos x$ симметричен по OY, то из графика видно, что решение будет при $x_1 \geq x_0$ и $|x_2| \geq x_0$.

x_0 - точка где $\sin x = \cos x$, т.е. $x = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.

$$\begin{cases} \cos x \geq \frac{\pi}{4} \\ |\sin x| \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\cos^2 x \geq \frac{\pi^2}{16}$

$\sin^2 x \geq \frac{\pi^2}{16}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{\pi^2}{16} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{8} = \frac{9{,}7596}{8} > 1$

Т.е. даже при самых малых допустимых $\cos x$ и $\sin x$, $\sin^2 x + \cos^2 x > 1$, что невозможно.

Итак, это невозможно.

Ответ: решений нет

M10-71

Задача 3. Пусть многочлен строго следующим образом

$P = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 ...$

С x^0 и x^1 проблем не возникает

индекс это степень

$P_0(x+1) + P_0(x-1) = 2a = 2 \cdot P_0(x) = 2 \cdot a$

$P_1(x+1) + P_1(x-1) = a + bx + b + a + bx - b = 2a + 2bx = 2(a+bx) = 2 \cdot P_1(x)$

Но далее степени x возрастают

$P_2(x+1) + P_2(x-1) = 2a + 2bx + 2cx^2 + 2c = 2P_2(x) + 2c$, то есть равенство возможно лишь при $c = 0$

Добавим степень

$P_3(x+1) = P_2(x+1) + d(x+1)^3 = \cancel{P_2(x+1) + 2(dx^3+3d)}$

$P_3(x+1) + P_3(x-1) = P_2(x+1) + P_2(x-1) + 2(dx^3 + 3d) =$ разве?

$= 2P_2(x) + 2(c + dx^3 + 3d)$, что может быть $=$

$= 2 \cdot P_3(x)$ лишь при $c + 3d = 0$, $\boxed{c = -3 \cdot d}$

Далее, добавляя новые степени x, добавляются новые условия

$P_4(x+1) + P_4(x-1) = P_3(x+1) + P_3(x+1) + 2(ex^4 + 3ex^2 + \cancel{2}e) =$?

$= 2 \cdot P_4(x) + 2(3ex^2 + e) + c + 3d)$

т.е. $3ex^2 + e + c + 3d = 0$ и т.д.

То есть любой многочлен, подходящий под определенные условия $(3ex^2 + e + c + 3d) = 0$ подойдет

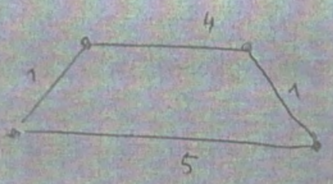
и?...

М10-71

Задача 4.

Из 4х отрезков есть 2 способа собрать 4х-угольник:

1. Трапеция.



равнобедренная
(∀ вписанная трапеция — равнобедренная)

М 10-71

Задача 5.

Лжецов – $\frac{2}{3}$ и врут они в $\frac{2}{3}$ случаев (в $\frac{1}{3}$ – говорят правду)

Рыцарей – $\frac{1}{3}$ и они в 1 из 1 случаев говорят правду

Произвольно выбранный житель в $\frac{1}{3}$ случаев рыцарь и в $\frac{2}{3}$ – лжец. То, что он сказал правду – событие с вероятностью $\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

Но то, что он уже повторно скажет правду –

$\frac{1}{3}\cdot 1$ (может это все еще был тогда рыцарь?) +

+ $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ (лжец дважды подряд сказал правду) =

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{27}=\frac{9}{27}+\frac{2}{27}=\frac{11}{27}$

Тогда вероятность, что второй раз житель соврет

$1-\frac{11}{27}=\frac{16}{27}$

Ответ: $\frac{16}{27}$ −

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 70

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 930058

1	2	3	4	5	Σ
5	0	2	20	0	27

М10-70

Задание 1

Нужно сравнить числа $\sqrt[2020]{2025!}$ и $\sqrt[2021]{2026!}$

Если обе части неравенства возвести в одну и ту же степень, то неравенство останется верным. Возведём оба числа в степень 2020·2021:

$\left(\sqrt[2020]{2025!}\right)^{2020\cdot2021} \vee \left(\sqrt[2021]{2026!}\right)^{2020\cdot2021} \Rightarrow (2025!)^{2021} \vee (2026!)^{2020} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2025!)^{2021} \vee (2026!)^{2020} \Rightarrow (2025!)^{2021} \vee (2025!\cdot2026)^{2020} \Rightarrow (2025!)^{2021} \vee (2025!)^{2020}\cdot2026^{2020}$

$\Rightarrow (2025!)^{2021} - (2025!)^{2020} \vee 2026^{2020} \Rightarrow (2025!)^{2020}(2025!-1) \vee 2026^{2020} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2026\cdot\frac{2025!}{1013\cdot2}\right)^{2020}\cdot(2025!-1) \vee 2026^{2020} \Rightarrow 2026^{2020}\cdot\left(\frac{2025!}{1013\cdot2}\right)^{2020}\cdot(2025!-1) \vee 2026^{2020}$

так как $2026^{2020}>0$, то можно обе части неравенства сократить на это число, при этом неравенство останется верным:

$\left(\frac{2025!}{1013\cdot2}\right)^{2020}\cdot(2025!-1) \vee 1$

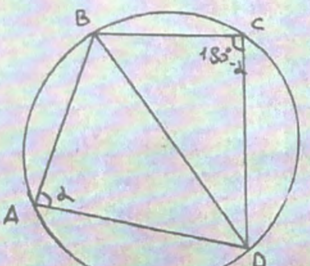
$\frac{2025!}{1013\cdot2}>1 \Rightarrow \left(\frac{2025!}{1013\cdot2}\right)^{2020}>1$; $2025!-1>1 \Rightarrow \left(\frac{2025!}{1013\cdot2}\right)^{2020}\cdot(2025!-1)>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в изначальном неравенстве также должен быть знак больше $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[2020]{2025!} > \sqrt[2021]{2026!} \Rightarrow$ больше число $\sqrt[2020]{2025!}$

Ответ: число $\sqrt[2020]{2025!}$ больше

Задание 4 Пусть из отрезков длиной 1, 1, 4 и 5 Любочка составила вписанный четырёхугольник ABCD:



Пусть $\angle BAD=\alpha \Rightarrow \angle BCD=180°-\alpha$, так как четырёхугольник вписанный и сумма ~~его противолеж~~ углов, лежащих напротив друг друга, равна 180°

По теореме косинусов для BD:

- $BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha$
- $BD^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos(180-\alpha)=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cdot(-\cos\alpha)=$
$=BC^2+CD^2+2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha=BC^2+CD^2+2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2+AD^2-BC^2-CD^2=2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha+2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos\alpha \Rightarrow AB^2+AD^2-BC^2-CD^2=$

$=2\cdot\cos\alpha\cdot(AB\cdot AB+BC\cdot CD)$

Рассмотрим все варианты пар AB и AD и BC и CD:

AB и AD	1 и 1	4 и 5	1 и 4	1 и 5
BC и CD	4 и 5	1 и 1	1 и 5	1 и 4

1) AB и AD = 1 и 1, BC и CD = 4 и 5

$\Rightarrow 1^2+1^2-4^2-5^2=2\cdot\cos\alpha\cdot(1\cdot1+4\cdot5) \Rightarrow 1+1-16-25=2\cdot\cos\alpha\cdot(1+20)=2-41=2\cdot21\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow -39=42\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{39}{42} \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1521}{1764}=\frac{243}{1764} \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{243}{1764}}=\pm\frac{\sqrt{243}}{42}$

т.к. сумма двух противолежащих углов в 4-угольнике равна 180° $\Rightarrow$ каждый из этих углов меньше, чем 180° $\Rightarrow \sin\alpha>0 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{243}}{42}$

$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{39}{42}\right)=1+1+2\cdot\frac{39}{42}=2+\frac{39}{21}=\frac{42+39}{21}=\frac{81}{21} \Rightarrow BD=\sqrt{\frac{81}{21}}=$

По теореме синусов: $2R=\frac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow R=\frac{BD}{2\cdot\sin\alpha}=\frac{9/\sqrt{21}}{2\cdot\frac{\sqrt{243}}{42}}=\frac{9/\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{243}}{21}}=\frac{9\cdot21}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{243}}=\frac{9\sqrt{21}}{\sqrt{243}}=9\sqrt{\frac{21}{243}}$
$=9\cdot\sqrt{\frac{7}{81}}=\frac{9\cdot\sqrt{7}}{9}=\sqrt{7}$

2) AB и AD = 4 и 5, BC и CD = 1 и 1

$\Rightarrow 4^2+5^2-1^2-1^2=2\cdot\cos\alpha(4\cdot5+1\cdot1) \Rightarrow 16+25-1-1=2\cdot(20+1)\cdot\cos\alpha \Rightarrow 41-2=2\cdot21\cdot\cos\alpha \Rightarrow 39=42\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{39}{42} \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{39}{42}\right)^2=1-\frac{1521}{1764}=\frac{243}{1764} \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{243}{1764}}=\pm\frac{\sqrt{243}}{42}$

т.к. $\angle BAD+\angle BCD=180°$, то каждый из них < чем 180° $\Rightarrow \sin\alpha>0 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{243}}{42}$

$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\alpha=16+25-40\cdot\frac{39}{42}=41-\frac{20\cdot39}{21}=\frac{861-20\cdot39}{21}=\frac{861-780}{21}=$

$=\frac{81}{21} \Rightarrow BD=\sqrt{\frac{81}{21}}=\frac{9}{\sqrt{21}}$

M10-70

по теореме синусов:

$2R = \frac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{BD}{2\cdot\sin\alpha}$

~~т.к. BD и Sin α совпали с~~

т.к значения BD и Sin α совпали со значениями из первого пункта, то значение радиуса получится как в первом пункте, то есть $R = 9\cdot\sqrt{\frac{21}{243}} = 9\cdot\sqrt{\frac{7}{81}} = \frac{9\sqrt{7}}{9} = \sqrt{7}$

3) AB и AD = 1 и 4, BC и CD = 1 и 5

$1^2+4^2-1^2-5^2 = 2\cdot\cos\alpha\cdot(1\cdot4+1\cdot5) \Rightarrow 1+16-1-25 = 2\cdot\cos\alpha\cdot(4+5) \Rightarrow 16-25 = 2\cdot9\cdot\cos\alpha \Rightarrow -9 = 2\cdot9\cdot\cos\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha = -1 \Rightarrow \cos\alpha = -1/2 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-(-\frac{1}{2})^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha > 0$ (доказано в прошлых пунктах) $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BD^2 = AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha = 1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cdot(-\frac{1}{2}) = 1+16+2\cdot1\cdot4\cdot\frac{1}{2} = 17+4 = 21 \Rightarrow BD = \sqrt{21}$

по теореме синусов:

$2R = \frac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{BD}{2\cdot\sin\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7}$

4) AB и AD = 1 и 5, BC и CD = 1 и 4

$1^2+5^2-1^2-4^2 = 2\cdot\cos\alpha\cdot(1\cdot5+1\cdot4) \Rightarrow 25-16 = 2\cdot\cos\alpha\cdot(5+4) \Rightarrow 9 = 2\cdot9\cdot\cos\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-(\frac{1}{2})^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BD^2 = AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha = 1^2+5^2-2\cdot1\cdot5\cdot\frac{1}{2} = 1+25-5 = 1+20 = 21 \Rightarrow BD = \sqrt{21}$

по теореме синусов

$2R = \frac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{BD}{2\cdot\sin\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow$ В любом случае радиус окружности, в которую можно вписать полученный четырёхугольник, будет равен $\sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{7}$

$\boxed{\text{Задание 5}}$ Для того, чтобы произвольно выбранный житель на второй вопрос солгал, этот житель должен оказаться лжецом.

Вероятность того, что ~~р~~ произвольно выбранный житель окажется лжецом:

$p_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (т.к. рыцарей $\frac{1}{3}$)

вероятность, что окажется рыцарем

Вероятность того, что на ~~первый~~ один вопрос лжец скажет правду:

$p_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (т.к. лжец врёт в $\frac{2}{3}$ случаев)

вероятность, что солжёт

Вероятность того, что лжец на второй вопрос солжёт:

$p_3 = \frac{2}{3}$ (т.к. лжец врёт в $\frac{2}{3}$ случаев)

Вероятность того, что произвольно выбранный житель на первый вопрос ответит правду, а на второй солжёт:

$p' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

Вероятность того, что произвольно выбранный житель на второй вопрос ответит правду, а на первый солжёт:

$p'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

Вероятность того, что произвольно выбранный житель на один вопрос ответит правду, а на второй солжёт:

$p = p' + p'' = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$

Ответ: $\frac{8}{27}$

−

М10-70

Задание 3

$P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1)+P(n-1)) = \frac{P(n+1)+P(n-1)}{2}$ - среднее арифметическое

данное соотношение работает в арифметической прогрессии, поэтому $P(x)$ имеет вид $kx+d$

Проверим:

$\frac{1}{2}(P(n+1)+P(n-1)) = \frac{1}{2}(k(n+1)+d) + k(n-1)+d)) = \frac{1}{2}(kn+k+d+kn-k+d) = \frac{1}{2}(2kn+2d) =$
$= kn+d = P(n)$ - подходит

+

предположим, что $P(x)$ имеет вид $a_1 \cdot x^m + a_2 x^{m-1} + \ldots + a_m \cdot x + a_{m+1}$.

тогда чтобы соотношение было верным должно выполняться:

$\frac{a_{m-k+1} \cdot (n+1)^k + a_{m-k+1} \cdot (n-1)^k}{2} = a_{m-k+1} \cdot n^k$?

рауве это должно быть для суммы всех одночленов

по предположению $a_i \neq 0$ => можно сократить на a_{m-k+1}

$\frac{(n+1)^k + (n-1)^k}{2} = n^k$

$(n+1)^k = n^k + b_1 \cdot n^{k-1} + b_2 \cdot n^{k-2} + \ldots + b_{k-1} \cdot n + 1$

$(n-1)^k = n^k - b_1 \cdot n^{k-1} + b_2 \cdot n^{k-2} - \ldots + (-1)^i b_i \cdot n^{k-i} + \ldots + (-1)^k \cdot 1$

Почему?

Заметим, что при сложении этих многочленов некоторые слагаемые взаимно-уничтожатся, т.к. одни из них были со знаком "+", а другие со знаком "−", а остальные умножатся на 2, т.к. оба были со знаком "+". Обозначим сумму всех удвоившихся слагаемых кроме $2n^k$ за A, тогда:

$\frac{(n+1)^k + (n-1)^k}{2} = \frac{2n^k + A}{2} = n^k + \frac{A}{2} = n^k$, данное р-во верное, только если $A=0$,

а такое возможно только при $k \leq 1$

=> все многочлены, удовлетворяющие соответствию имеют вид:

$P(x) = kx + d$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 68

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1089723

№2 1. область значений и аргументов

$\cos x \in [-1;1]$, $x \in R$

$\sin x \in [-1;1]$, $x \in R$

М10-68

2. функция $\sin t$ на $t \in [-1;1]$

$\sin t$ возрастает, т.к. $\cos t > 0$, при $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

а $[-1;1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin(-1) \approx -0{,}8415$, $\sin(1) = 0{,}8415 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\cos x) \leq 0{,}84 \\ \sin(\cos x) \geq -0{,}84 \end{cases}$

3. $\cos t$ на $t \in [-1;1]$

$\cos(-1) = \cos(1) \approx 0{,}54 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\sin x) \leq 1$

$\cos(\sin x) \geq 0{,}54$

4. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$

Пусть $x=0$, тогда

$\sin(\cos 0) = \sin(1) \approx 0{,}84$

$\cos(\sin 0) = \cos(0) = 1$

$0{,}84 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\cos x) < \cos(\sin x)$

$\Downarrow$

неравенство $\sin(\cos x) \geq \cos(\sin x)$ не выполняется ни при каких x

Ответ: $x \in \varnothing$

№3 1. $P(n) = \frac{1}{2}\left(P(n+1) + P(n-1)\right) \mid \cdot 2$

$2P(n) = P(n+1) + P(n-1)$

$P(n+1) - 2P(n) + P(n-1) = 0$

2. $P(n) = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$

$\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0$

$\lambda^{n-1}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

1	2	3	4	5	Σ
10	2	2	0	20	34

3. т.к. $\lambda \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)^2 = 0$

$\lambda = 1$ – кратный корень

4. При кратном корне 1

M10-68

$P(n) = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n = A + Bn$, где $A, B = const$, $A, B \in R$

Ответ: все многочлены удовлетворяющие условию – линейные многочлены (включая константы) +

№5 $P(\text{рыцарь}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{лжец}) = \frac{2}{3}$

$P(\text{правда рыцаря}) = 1$

$P(\text{правда лжеца}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

1. Найдём вероятность, что случ. выбранный житель ответил правду на I вопрос, пусть это событие A

$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

2. Найдём вероятность, что ответивший правду – рыцарь, пусть это событие B

$P(B) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$

C – ~~веро~~ событие, что ответивший – лжец

$P(C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

3. Найдём вероятность, что на II вопрос солжет

Если это рыцарь, то $P = 0$

Если лжец, то $\frac{2}{3}$

4. D – событие, что на II вопрос солгут

$P(D) = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15}$

+

№1 $A = \sqrt[2020]{2025!}$, $B = \sqrt[2021]{2026!}$

М 10-68

$\sqrt[2020]{2025!} = (2025!)^{\frac{1}{2020}}$

$\sqrt[2021]{2026!} = (2026!)^{\frac{1}{2021}}$

1. Заметим, что $2026! = 2025! \cdot 2026 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2026!)^{\frac{1}{2021}} = 2025!^{\frac{1}{2021}} \cdot 2026^{\frac{1}{2021}}$

2. $(2025!)^{\frac{1}{2020}}$

$\overline{(2026)^{\frac{1}{2021}} \cdot (2025)^{\frac{1}{2021}}} = \dfrac{(2025!)^{\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}}}{2026^{\frac{1}{2021}}} =$

$= \dfrac{(2025!)^{\frac{1}{2020\cdot 2021}}}{2026^{\frac{1}{2021}}}$

3. Прологарифмируем

$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{2020\cdot 2021}\ln(2025) - \frac{1}{2021}\ln 2026 \quad \Big| \cdot 2021$

$2021 \cdot \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{2020}\ln(2025) - \ln 2026$

4. $\ln(2025!) \approx 13395{,}4$ (по формуле Стирлинга)

$\frac{1}{2020}\ln(2025!) \approx 6{,}631$

$\ln 2026 \approx 7{,}6135$

Тогда

$2021 \cdot \ln\left(\frac{A}{B}\right) \approx 6{,}631 - 7{,}6135 = -0{,}9825 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{A}{B}\right) \approx -0{,}000486 < 0$

5. Т.к. $\ln\left(\frac{A}{B}\right) < 0$, что $\frac{A}{B} < 1 \Rightarrow A < B$

Ответ! $\sqrt[2021]{2026!} > \sqrt[2020]{2025!}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 66

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1277726

1	2	3	4	5	Σ
20	0	8	0	0	28

М 10-66

Задача 1.

$$\sqrt[2020]{2025!} \vee \sqrt[2021]{2026!} \Big| \cdot (\ )^{2020}$$

$$2025! \vee \left(\sqrt[2021]{2026!}\right)^{2020} \Big| : \sqrt[2021]{2026!}$$

$$\sqrt[2021]{2026!} \cdot \cancel{2025!} \vee \cancel{2026!}\ 2026 \Big| \cdot (\ )^{2021}$$

$$2026! \vee 2026^{2021}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2025 \cdot \cancel{2026} \vee \cancel{2026} \cdot 2026 \cdot 2026 \cdot \ldots$$

$$\underset{6!}{720} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \ldots \cdot 2025 \vee 2026 \cdot 2026 \cdot 2026 \ldots$$

И тут и тут по 2020 множителей и каждый множитель из правой части больше любого из левой. $\Rightarrow \sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

Задача 5

Мы хотим найти вероятность того, что произвольно выбранный житель ответит правду на 1-й вопрос и обманет ответив на 2-й вопрос. Получается, что этот произвольный житель должен оказаться лжецом, иначе рыцарь на оба вопроса ответит правду. (вероятность этого $\frac{2}{3}$) Нужно, чтобы лжец сказал правду на 1-й вопрос, а вероятность этого $\frac{1}{3}$. Во 2-й раз он обманет вероятность этого $\frac{2}{3}$.

Задача 5 (продолжение)

М10-66

А итоговая вероятность будет равна перемножению всех этих вероятностей. То есть, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$.

то, что лжец; правда на 1-й вопрос; ложь на 2-й вопрос

Ответ: $\frac{4}{27}$.

$\ominus$

Задача 3

Из условия, что $P(n) = \frac{1}{2}\left(P(n+1) + P(n-1)\right)$ мы понимаем, что значения $\ldots; P(n-2); P(n-1); P(n); P(n+1); P(n+2)$ это арифметическая прогрессия ($n \in \mathbb{Z}$). Получается, что нам точно подойдут все многочлены вида $P(x) = mx$, где m это любое число.

$+$

А почему других нет?

Задача 4

Мы хотим найти радиус окружности такой, что в неё будет вписан четырёхугольник со сторонами 1; 1; 4; 5. Очевидно, что сторона 5 будет как максимум диаметром (может быть меньше тогда радиус больше). Получается, что $R \geq \frac{5}{2}$; $R \geq 2{,}5$.

[redacted]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 21

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 861739

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр М10-21
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	10	0	10	0	20											40
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

10 класс
(класс участия)

1 сравнить $\sqrt[2020]{2025!}$ и $\sqrt[2021]{2026!}$ $\qquad$ $2025! = x$

нужно узнать знак выражения $\sqrt[2021]{2026x} - \sqrt[2020]{x}$

домножим его на выраж $\left(\sqrt[2021]{(2026x)^{2020}} + \sqrt[2021]{(2026x)^{2019}} \cdot \sqrt[2020]{x} + \ldots + \sqrt[2020]{x^{2020}}\right) > 0$

получаем $\sqrt[2021]{(2026x)^{2021}} - \sqrt[2020]{x^{2021}} = 2026x - x^{\frac{2021}{2020}} = x(2026 - \sqrt[2020]{x})$

т.к. $x > 0$, то нужно найти знак $(2026 - \sqrt[2020]{x})$

по аналогии домножим на $(2028^{2019} + 2026^{2018} \cdot \sqrt[2020]{x} + \ldots - \sqrt[2020]{x^{2019}}) > 0$

приходим к выражению $2026^{2020} - x = 2026^{2020} - 2025!$

знак данного выражения найти проще, т.к. каждый множитель вычитаемого больше множителя уменьшаемого

а значит $2026^{2020} - 2025! > 0$ $\quad \Rightarrow \sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

5. вероятность того, что рыцарь ответил на вопрос правдиво, равна 1 от общего кол-ва жителей, рыцарей было $\frac{1}{3}$

тогда лжецов было $\frac{2}{3}$

вероятность того, что лжец ответил правду, равна $\frac{1}{3}$

значит вероятность, что на любой вопрос ответит правду любой из жителей $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$

а вероятность того, что на вопрос отвечал лжец и ответил правду

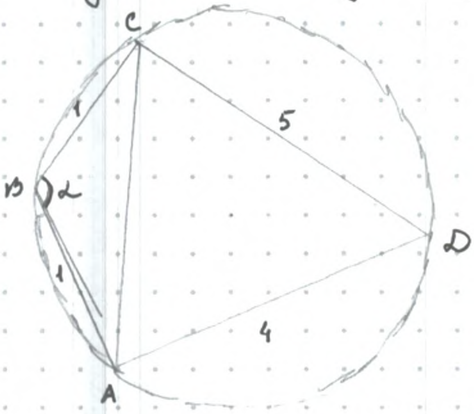
равна $\frac{2}{9} : \frac{5}{9} = \frac{2}{5}$

значит на второй вопрос можно услышать ложь с вероятностью

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15}$ +

4. случай 1: когда стороны 1 и 1 стоят рядом



$AC^2 = 1 + 1 - 2\cos\alpha$

$AC^2 = 25 + 16 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$

$AC^2 = 41 + 40\cos\alpha$

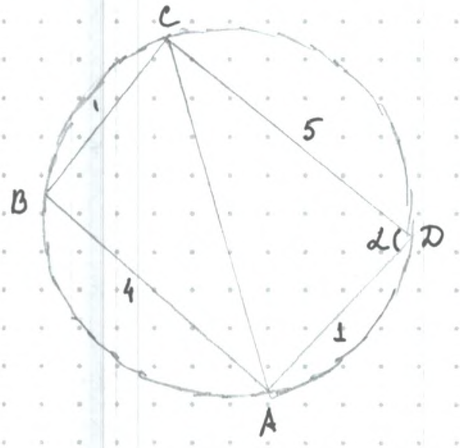
$2 - 2\cos\alpha = 41 + 40\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{13}{14}$ $\quad\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{27}}{14}$

$AC = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{7}}$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\cancel{28}\,14}{2\sqrt{7}} = \sqrt{7}$

случай 2: стороны 1 и 1 лежат противоположно



$AC^2 = 1 + 25 - 10\cos\alpha$

$AC^2 = 1 + 16 + 8\cos\alpha$

$26 - 10\cos\alpha = 17 + 8\cos\alpha$

$9 = 18\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \sqrt{21}$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{21} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

в обоих случаях $R = \sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{7}$

Итоговый балл ________ ________ Шифр М10-21

(подпись председателя жюри) (заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 10 класс,

вариант ________

3. $P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1)$ для $n \in \mathbb{Z}$

$P(n-1) = \frac{1}{2}(P(n) + P(n-2))$

$P(n+1) = \frac{1}{2}(P(n+2) + P(n))$

$P(n) = \frac{1}{4}P(n) + \frac{1}{4}P(n-2) + \frac{1}{4}P(n+2) + \frac{1}{4}P(n)$

$\frac{1}{2}P(n) = \frac{1}{4}(P(n-2) + P(n+2))$

$P(n) = \frac{1}{2}(P(n-2) + P(n+2))$

$\Rightarrow$ $P(n)$ всегда среднее арифметическое двух чисел равноудаленных от n

$\Rightarrow$? $\Leftarrow$ проверено

такое достигается только в том случае, когда $P(x) = kx + b$?

проверим:

$P(x) = \frac{1}{2}(P(x-1) + P(x+1))$ $\quad$ $P(x) = kx + b$

$P(x-1) = kx - k + b$

$P(x+1) = kx + k + b$

$kx + b = \frac{1}{2}(kx + k + b + kx - k + b)$

$kx + b = \frac{1}{2}(2kx + 2b)$

$kx + b = kx + b$

равенство достижимо

Ответ: $P(x) = kx + b$

2. $\sin(\cos(x)) \geq \cos(\sin(x))$

если $\cos(x) = \sin(x)$ при $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$\sin(\sin(x) \geq \cos(\cos(x))$

равенство достигнуто —

Лист №________

ecuu $\sin(x) \neq \cos(x)$

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ 1804

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М10-14

Данные участника

ID номер участника	1180322
Фамилия Имя Отчество	Григорьев Тимофей Дмитриевич
Дата рождения	28.04.2009
Город/село	Казань
Учебное заведение	СУНЦ „IT-лицей" КФУ
Класс	10
Телефон	89969008887
E-mail	rabochapochtatg@gmail.com
Тип документа	Паспорт
Серия документа	9223
Номер документа	303265
СНИЛС	171-349-910 74
Город прохождения очного тура	Казань
Данные верны	(подпись участника)

Дополнительные записи на титульном листе делать не разрешается

Я согласен(-а), что фото- и видеоизображения участника олимпиады будут использоваться в информационных материалах о проведении олимпиады.

Я согласен(-а) на публикацию результатов участия в олимпиаде (баллов, статуса) и цифровой копии работы на официальном сайте ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Подпись участника (данные верны)

Подпись законного представителя

Заполняется в присутствии организатора

Количество использованных рабочих листов: 3

Работу сдал (подпись участника)

Работу принял (подпись организатора)

Дата проведения Олимпиады

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М10-14
(заполняется оргкомитетом)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ... КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ... МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА Кремлевская ул., д. 18, Казань, 420008 Тел./факс: 8(843) 292-53-63

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	1	20	0	20											61
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика — (профиль олимпиады)

10 — (класс участия)

№1

$\sqrt[2020]{2025!} \vee \sqrt[2021]{2026!}$ Возведем обе части в степень $2020\cdot 2021$

$(2025!)^{2021} \vee (2026!)^{2020}$

$(2025!)^{2021} \vee (2025!)^{2020}\cdot 2026^{2020} \quad \Big| : (2025!)^{2020}$

$\cancel{(2025!)^{2021}}\ \ 2025! \vee 2026^{2020}$

$$\left.\begin{array}{l} 720 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 < 2026 \\ 7 < 2026 \\ 8 < 2026 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 2025 < 2026 \end{array}\right\} 2020 \text{ раз}$$

$\Rightarrow 2025\cdot 2024\cdot\ldots\cdot 1 < 2026^{2020} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2025! < 2026^{2020} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

Ответ: $\sqrt[2021]{2026!}$ +

№3

$Q(x) = P(x) - \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$. У $Q(x)$ все целые являются корнями,

$\Rightarrow Q(x)$ тожд. $0 \Rightarrow P(x) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ $\forall x \Rightarrow 2\cdot P(x) = P(x+1)+P(x-1)$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$

1) Пусть $n \geq 2$. Посмотрим на коэффициент при x^{n-2}. У $2P(x)$ это $2\cdot a_{n-2}$,

у $P(x+1) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + a_{n-2}(x+1)^{n-2} + \ldots + a_0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Из первой скобки: } \cancel{4a_n x^{n-2}}\ C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot a_n \\ \text{Из второй скобки: } a_{n-1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2} \\ \text{Из третей скобки: } a_{n-2}\, x^{n-2} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{n-2}\left(C_n^2\cdot a_n + a_{n-1}(n-1) + a_{n-2}\right)$$

Далее $n-2$ степень не встречается

у $P(x-1) = a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + a_{n-2}(x-1)^{n-2} + \ldots + a_0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Из первой скобки: } C_n^2\cdot a_n\cdot x^{n-2} \\ \text{Из второй: } -(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot a_{n-1} \\ \text{Из третей: } a_{n-2}\, x^{n-2} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{n-2}\left(C_n^2\cdot a_n + a_{n-2} - (n-1)\,a_{n-1}\right)$$

Т.к. $P(x)\cdot 2 = P(x+1)+P(x-1)$, то коэффициенты перед $n-2$ степенью равны, т.е. $2\cdot a_{n-2} = \left(C_n^2\cdot a_n + a_{n-1}(n-1) + a_{n-2}\right) + \left(C_n^2\cdot a_n + a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}\right)$

$2\cdot C_n^2\cdot a_n = 0$, но $n \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} C_n^2 \neq 0 \\ a_n \neq 0 \end{cases}$ — !

2) $n = 1 \Rightarrow P(x) = kx + c$, где c, k — const, $k \neq 0$

$P(x+1)+P(x-1) = kx+1+c+kx-1+c = 2(kx+c) = P(x)\cdot 2$ ✓

3) $n = 0 \Rightarrow P(x) = c$, где c — const

$P(x+1)+P(x-1) = 2c = 2\cdot P(x)$. Из 1) и 3) $\Rightarrow$ Ответ: $kx+c$ $\forall k, c$.

~~Ответ: $P(x) = x+c$, $P(x) = c$, где c — const~~

Итоговый балл ______ ____________ (подпись председателя жюри)

Шифр М10-14 (заполняется оргкомитетом)

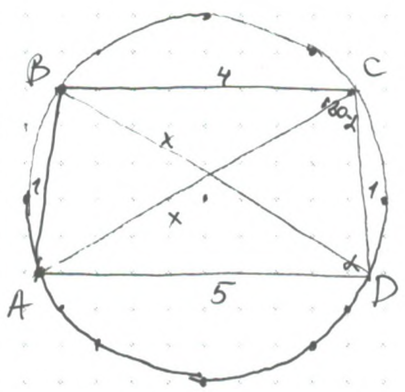
Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 10 класс,

вариант ________

№4 ABCD-четырехугольник

1) Пусть отрезки по 1 будут противоположными сторонами, тогда т.к. ABCD-впис => ABCD-р/б трапеция.



AB=CD=1, BC=4, AD=5. ABCD-р/б трапеция => если $\angle D=\alpha$, то $\angle C=180^\circ-\alpha$

AC=BD=x

$x^2=25+1-10\cos\alpha$ (т. cos ΔADC)

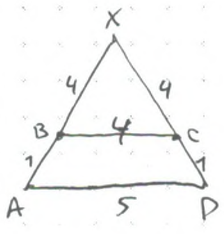
$x^2=16+1+8\cos\alpha$ (т. cos ΔBCD)

$\Rightarrow 26-10\cos\alpha=17+8\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$

Тогда $x^2=26-10\cos\alpha=21 \Rightarrow x=\sqrt{21}$

$\cos\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

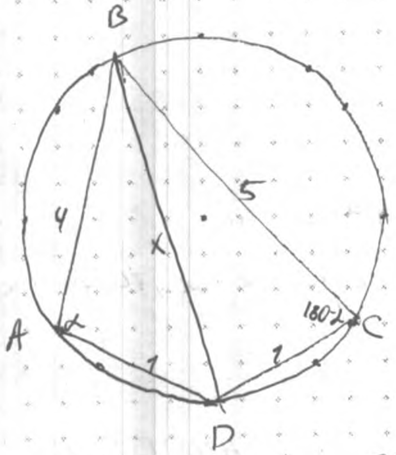
$2R=\frac{x}{\sin\alpha}$ (по т. sin ΔADC) $=\frac{\sqrt{21}\cdot 2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{7} \Rightarrow R=\sqrt{7}$



Также понятно, что такая трапеция существует, взяв р/с ΔAXD со стороной 5 и на сторонах AX и XD точки B и C, что AB=CD=1, получаем что т.к. $\begin{cases} AB=CD \\ BX=XC \end{cases} \Rightarrow BC \parallel AD$ (по Фалесу) $\Rightarrow$ ΔBXC − р/с $\Rightarrow BC=BX=$
$=5-1=4$

2) Отрезки по 1 соседние. $AD=CD=1$, $AB=4$, $BC=5$

$\angle A=\alpha$, $\angle C=180^\circ-\alpha$, $BD=x$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow x^2=25+1+10\cos\alpha$ (т. cos $\triangle BCD$)

$x^2=16+1-8\cos\alpha$ (т. cos $\triangle ADB$)

$18\cos\alpha=-9 \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2=25+1+10\cdot -\frac{1}{2}=21 \Rightarrow x=\sqrt{21}$

$2R=\frac{x}{\sin\alpha}$ (т. sin $\triangle ABD$) $=\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow R=\sqrt{7}$

В обоих случаях радиус $\sqrt{7}$, причем 2 1 случай точно возможно построить, что было доказано в 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\sqrt{7}$

№5 лгут $\frac{2}{3} \Rightarrow$ правда $\frac{1}{3}$

~~Найдем~~ вероятность того, что перед нами лжец. Это может произойти в том случае, если произвольно выбранный человек лжец и сказал правду. Рыцарей $\frac{1}{3} \Rightarrow$ лжецов $\frac{2}{3}$

$P(\text{лж})=\frac{2}{3}$ $P(\text{лж. и скажет правду})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

Вероятность лжи = вероятность, что перед нами лжец, сказавший в I раз правду и сейчас солжет $=\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$

Ответ: $\frac{4}{27}$

Итоговый балл _______ _______________

(подпись председателя жюри)

Шифр М10-14

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 10 класс,

№2

Расмотрим ур-е : $\sin(\cos(x)) = \cos(\sin(x))$

$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi(2k+1)}{2} \pm \beta$, где $k \in \mathbb{Z}$

$2k+1 = z. \Rightarrow \alpha = \frac{\pi z}{2} \pm \beta$, $z \neq 0$, $z \in \mathbb{Z}$

~~$\cos x = \frac{\pi z}{2} + \sin x$~~ $\cos x = \frac{\pi z}{2} - \sin x$

$\cos x + \sin x = \frac{\pi z}{2}$

$(\cos x + \sin x)^2 = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin x \cos x = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 - 1$

$\sin x + \cos x = \frac{\pi z}{2}$

$\sin x = a,\ \cos x = b \Rightarrow \begin{cases} a+b = \frac{\pi z}{2} \\ 2ab = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 - 1 \end{cases}$

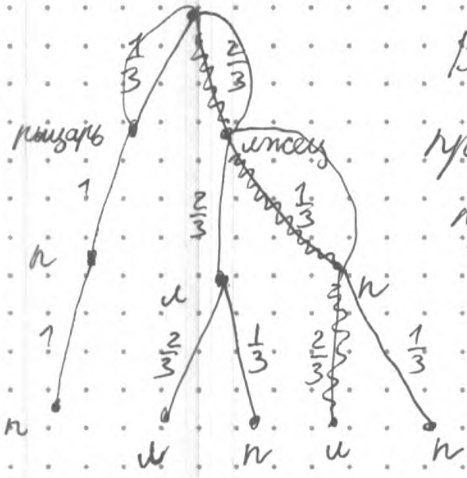
$\underbrace{(a+b)^2 - 4ab}_{(a-b)^2 \geq 0} = \frac{\pi^2 z^2}{4} - 2\cdot\frac{\pi^2 z^2}{4} + 2 = 2 - \frac{\pi^2 z^2}{4}$, т.е. $2 \geq \frac{\pi^2 z^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \geq \pi^2 z^2 \Rightarrow 8 \geq \pi^2$, но $\pi > 3$ – !

Т.е. рав-во не достигается $\Rightarrow$ одно из этих всегда больше другого (т.к. функции непрерывны)

При $x = \frac{\pi}{2}$ левая часть 0, а правая $> 0 \Rightarrow$ правая всегда больше левой

№5



Вероятность того, что человек солжет во вт. раз при условии, что в первый раз сказал правду $= \dfrac{P(\text{солжет во II раз и скажет правду в I раз})}{P(\text{скажет правду в I раз})}$ по Формуле Байеса.

$P(\text{пр в I р. и лжи во II раз}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ (выделенный путь ш)

$P(\text{пр. в I р.}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$ (пути)

$\frac{4}{27} : \frac{5}{9} = \frac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ
ЭКОНОМИЧЕСКАЯ
ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М10-13

Данные участника

ID номер участника 860313

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр м10-13
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	18	0	20	0	20											58
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

№1

$$\sqrt[2020]{2025!} \vee \sqrt[2021]{2026!} \quad \Big| \ ^{2020\cdot 2021}$$

$$(2025!)^{2021} \vee (2026!)^{2020} = (2025!)^{2020}\cdot(2026)^{2020} \quad \Big| : (2025!)^{2020}$$

$$(2025! \vee (2026)^{2020}$$

$$\underbrace{\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}_{120,720}\cdot 6 \cdot\ldots\cdot 2025}_{2020 \text{ шт.}} < (2025)^{2020} < (2026)^{2020} \Rightarrow \sqrt[2021]{2026!} > \sqrt[2020]{2025!}$$

№3

$$P(n) = \frac{1}{2}\left(P(n+1) + P(n-1)\right) \Rightarrow 2P(n) = P(n+1) + P(n-1) \Rightarrow P(n) - P(n-1) = P(n+1) - P(n),$$

т.е многочлен $P(x) - P(x-1)$ принимает одно и то же значение в бесконечном числе точек $\Rightarrow P(x) - P(x-1) \to$ константа; пусть $\deg(P) \geq 2$:

$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} \ldots a_0$; $P(x-1) = a_k (x-1)^k + \ldots + a_0 \Rightarrow$ ~~P(x)~~ посмотрим какой коэффициент при x^{k-1} у многочлена $P(x) - P(x-1) \Rightarrow a_{k-1}\cdot x^{k-1} + a_k\cdot k\cdot x^{k-1} - a_{k-1}\cdot x^{k-1} =$

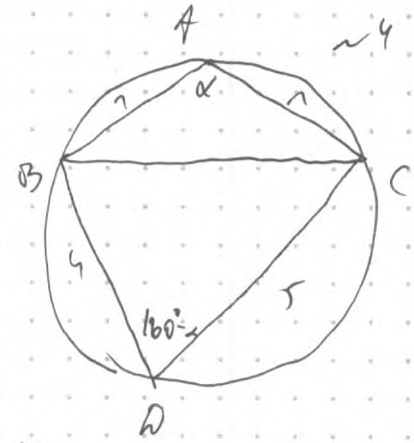
$= a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$, но мы знаем, что $k-1 \geq 1 \Rightarrow a_k \cdot k = 0$, т.к нам многочлен константа $\Rightarrow a_k = 0$, противоречие, т.к это старший коэффициент $\Rightarrow k \leq 1$

Пусть $P(x) = kx+b$, тогда $P(n) = kn+b = P(n) = \frac{1}{2}(2kn+2b) = kn+b$, т.е многочлен вида $kx+b$ подходит, также подходит $P(x) = const$, очевидно $(const = \frac{1}{2}(const + const))$.

Ответ: $P(x) = kx+b$; $P(x) = const$

№4

1) случай 1:



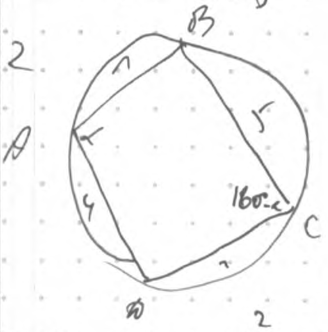
Запишем т. косинусов для $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$: $2-2\cos\alpha = 41+40\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-39}{42}$, т.е $BC^2 = 2+\frac{39}{21} = 2+\frac{13}{7} = \frac{27}{7} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, по основному триг. тождеству $\Rightarrow$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{14}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{7} \Rightarrow R = \sqrt{7}$.

2) Случай 2



Также $17 - 8\cos\alpha = 26 + 10\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2\cos\alpha}\ 18\cos\alpha = -9 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 120^\circ \Rightarrow BC^2 = 17 + 8\cdot\frac{1}{2} = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21} \Rightarrow \cancel{\frac{BC}{\sin\alpha}}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{7} \Rightarrow R = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$

Итоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М10-13

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 10 класс,

вариант ________

№2

1) Пусть $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

1) $\sin x > \cos x$: $\cos(\sin x) > \sin(\sin x)$, т.к. $\sin x < 1$ и $\cos\alpha > \sin\alpha$, при $\alpha < 1$, также $\sin(\sin x) > \sin(\cos x)$, т.к. $\sin x > \cos x$

2) $\sin x < \cos x$: $\cos(\sin x) > \cos(\cos x)$, т.к. $\sin x < \cos x$ и $\cos(\cos x) > \sin(\cos x)$, т.к. $\cos x < 1 \Rightarrow \cos(\sin x) > \cos(\cos x)$

3) $\sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}) > \sin(\frac{\sqrt{2}}{2})$, т.к. $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

2) Пусть $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi]$: ~~sin~~ $\cos x < 0 \Rightarrow \sin(\cos x) < 0$, также $0 < \sin x < 1 \Rightarrow \cos(\sin x) > 0 \Rightarrow \cos(\sin x) > \sin(\cos x)$, ~~полностью~~ [illegible]

3) Пусть $x \in (\pi; 1{,}5\pi]$, тогда считаем, что $x = -a$, где $a \in (\frac{\pi}{2}; \pi]$, тогда $\sin(\cos x) = \sin(\cos a)$ и $\cos(\sin x) = \cos(-\sin a) = \cos(\sin a)$ и задача сводится к (2)

4) Пусть $x \in (1{,}5\pi; 2\pi]$: тогда $x = -a$, где $a \in [0; \frac{\pi}{2}]$, тогда $\cos(\sin x) = \cos(\sin -a) = \cos(-\sin a) = \cos(\sin a)$; $\sin(\cos x) = \sin(\cos -a) = \sin(\cos a)$, задача сводится к (1) ~~Кратные случаи~~

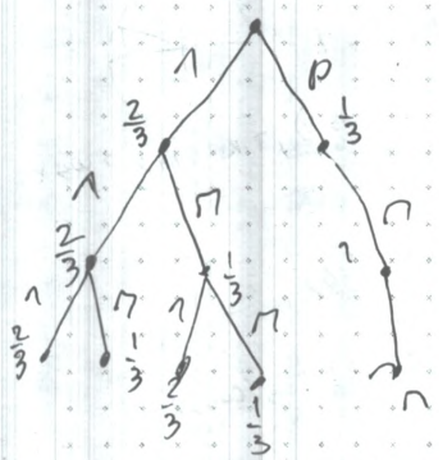
Лист №________

Ответ: решений нет

№5

$P(B \text{ если случилось } A) = \dfrac{\cancel{P(A)}\cancel{P(B)}\ P(A\cap B)}{\cancel{P(B)}\ P(A)}$

A - произвольно выбранный человек сказал правду на первый вопрос ; B - произвольно выбранный человек сказал ложь на второй вопрос.



$P(A\cap B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + 0 = \frac{4}{27}$

$P(A) = \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}\ \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

$\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \cancel{\dfrac{2}{27}\Big/\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\frac{4}{27}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15}$

(+)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 28

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 861841

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М10-28
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	18	0	18	—	0											36
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

1) $\sqrt[2020]{2025!}$? $\sqrt[2021]{2026!}$ ~~возведем все в 2021 степень~~

$\sqrt[2020]{(2025!)^{2021}}$? $2026!$

$2025! \sqrt[2020]{2025!}$? $2026!$

$\sqrt[2020]{2025!}$? 2026

$\sqrt[2020]{2025!}$: ~~прел~~ 2025! представим в виде произведения чисел от 8 до 2025, и 84, и 60 $(84 = 7\cdot6\cdot2$, а $60 = 5\cdot4\cdot3)$ в произведении 2025!, тогда

$$\sqrt[2020]{2025!} = \sqrt[2020]{\underbrace{8\cdot9 \ldots 2025\cdot84\cdot60}_{2020 \text{ чисел}}} \le \frac{8+9+10+\ldots+2025+60+84}{2020} =$$

$$= \frac{\frac{2033\cdot2018}{2} + 60 + 84}{2020}$$

$$\begin{array}{r} 2033 \\ \times\ 1009 \\ \hline 18297 \\ 2033 \\ \hline 2051297 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2051297 \\ 144 \\ \hline 2051441 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2026 \\ 2020 \end{array}$$

$2033\cdot1009 + 144$? $2020\cdot2026$

1) $\sqrt[2020]{2025!}$? $\sqrt[2021]{2026!}$ Возведем в 2021 степень

$\sqrt[2020]{(2025!)^{2021}}$? $2026!$

$2025! \cdot \sqrt[2020]{(2025)!}$? $2026!$ $\quad | : 2025!$

$\sqrt[2020]{2025!}$? 2026

Представим 2025! в виде произведения чисел от 8 до 2025 и 84, 60 $(84 = 7 \cdot 6 \cdot 2$, а $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5)$, тем самым произведение будет 2025!

?

$$\sqrt[2020]{2025!} = \sqrt[2020]{\underbrace{8 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2025 \cdot 84 \cdot 60}_{\text{2020 чисел}}} \le \frac{8+9+\ldots+2025+84+60}{2020}$$

Мы увеличили $\sqrt[2020]{2025!}$, сравним полученное значение с 2026, домножив на 2020

$$\underbrace{8+9+\ldots+2025}_{\Downarrow}+84+60 \ ? \ 2026 \cdot 2020$$

$\frac{2033 \cdot 2018}{2} + 144$? $4{,}092{,}520$

$2033 \cdot 1009 + 144$? 4092520

$2051441 < 4092520$

$$\begin{array}{r} 2026 \\ \times\ 2020 \\ \hline 4052 \\ 4052 \\ \hline 4{,}092{,}520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2033 \\ \times\ 1009 \\ \hline 18297 \\ 2033 \\ \hline 2{,}051{,}297 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2051297 \\ +\ 144 \\ \hline 2{,}051{,}441 \end{array}$$

Даже при увеличении левого числа, правое все равно больше =>
число $\sqrt[2021]{2026!}$ больше

ый балл ______ ____________ (подпись председателя жюри)

Шифр М10-28 (заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 10 класс,

вариант ______

3) Пусть x от 180 до 270

$\sin(\sin(x+90)) \overset{?}{\vee} \sin(\sin(x)+90)$

$\sin(x+90)\le 0$ т.к $x+90$ от 270 360

$\sin(x)=\sin(x+360)$

$\sin(360+\sin(x+90)) = \sin(\sin(x+90))$

$\sin(359) \le \sin(360+\sin(x+90)) \le \sin(360)$

$\sin(89) < \sin(\sin(x)+90) \le \sin(90)$

$\sin(89)>0$

$\sin(360)=0$

$\sin(89) > \sin(360) \Rightarrow$

$\sin(\sin(x+90)) < \sin(\sin(x)+90)$

т.е при x от 180 до 270 нет решений

4) Пусть x от 270 до 360.

$\sin(\sin(x+90)) \overset{?}{\vee} \sin(\sin(x)+90)$

~~$\sin(x+90)\le\sin(90)$~~ $\sin(x+90)=\sin(x-270)$

$0\le x-270\le 90$

$\sin(\sin(0)) \le \sin(\sin(x+90)) \le$ ~~$\sin(90)$~~ $\sin(\sin(90))$

$-1\le\sin(x)\le 0 \Rightarrow \sin(89) \le \sin(\sin(x)+90)\le\sin(90)$

~~$\sin(x)$ от 0 до 90~~ $\sin(0) \le \sin(\sin(x+90)) \le \sin(1)$

$\sin(1) < \sin(89) \le \sin(\sin(x)+90) \Rightarrow$

$\sin(\sin(x+90)) \le \sin(\sin(90))$ т.е при x от 180 до 360 нет решений

Лист № ______

если к каждому шагу от 0 до 360 прибавлять 360 то значение sin и cos не меняется, а т.к мы доказали что при $x \in [0; 360]$ решений нет, то ни при каких x решений нет.

[redacted]вый балл ____________
(подпись председателя жюри)

Шифр M10-28
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 10 класс,

вариант ________

3) $P(n) = \frac{P(n+1)+P(n-1)}{2} \quad |\cdot 2 \quad 2P(n) = P(n+1) + P(n-1)$ $\Rightarrow$

① $P(n+1) = 2P(n) - P(n-1)$, т.е $P(n) = 2P(n-1) - P(n-2)$ да

$P(n+1) = 4P(n-1) - 2P(n-2) - P(n-1) = 3P(n-1) - 2P(n-2)$

$P(n+1) - P(n) = P(n-1) - P(n-2)$

из ① $P(n+1) - P(n) = 2P(n) - P(n-1) - P(n) = \cancel{P(n)-P}$

$= P(n) - P(n-1) = P(n-1) - P(n-2)$

$\Rightarrow$ если сказать $a_i = P(i)$, то разность между соседними а равны $\Rightarrow$ a_i - арифметическая прогрессия $\Rightarrow$ $P(x)$ имеет вид $P(x) = a_1 + xd$ V

5) Пусть было x жителей, тогда рыц. $\frac{x}{3}$, а лж. $\frac{2x}{3}$

$$x \to \text{рыц. } \frac{x}{3} \to \text{прав. } \frac{x}{3},\ \text{ложь } 0; \quad x \to \text{лж. } \frac{2x}{3} \to \text{пр. } \frac{2x}{9},\ \text{ложь } \frac{4x}{9}$$

т.к рыцари не лгут, то вероят, что рыц. скажет ложь $=0$, а правду $\frac{x}{3}$ вероят. лжец скажет ложь $\frac{2\cdot 2x}{3\cdot 3}$ (в $\frac{2}{3}$ случаях врет)

$\Rightarrow$ в $\frac{1}{3}$ случаях говорит правду $\Rightarrow$ вероят. правды от лж. $\frac{1\cdot 2x}{3\cdot 3} = \frac{2x}{9}$

$\Rightarrow$ p что скажет ~~пр~~ соллжет $\frac{4x}{9\cdot \cancel{x}} = \frac{4}{9}$

Ответ: $\frac{4}{9}$ $-$

Лист № ________

2) $\sin(x) = \cos(x-90)$

$\cos(x) = \sin(x+90)$

$\sin(\cos(x)) = \sin(\sin(x+90))$

$\cos(\sin(x)) = \sin(\sin(x)+90)$

1) Если x от 0 до 90

чем больше α, тем больше $\sin(\alpha)$

$180 > \sin(x)+90 \geq 90$ $\quad \sin(x) = \sin(180-x)$

$\sin(\sin(x)+90) = \sin(90-\sin(x))$, при этом $90 \geq 90-\sin(x) > 0$

$\sin(x+90) = \sin(90-x)$ $\quad , 90 \geq 90-x \geq 0$

$\sin(\sin(90-x)) \overset{?}{=} \sin(90-\sin(x))$

$0 \leq \sin(90-x) \leq 1 \qquad \sin(90-\sin(x))$

$\sin(\sin(90-x)) \leq \sin(1)$

$\sin(90-\sin(x)) \geq \sin(89)$

$\sin(\sin(90-x)) \leq \sin(1) < \sin(89) \leq \sin(90-\sin(x))$

$\Rightarrow \sin(\sin(90-x)) < \sin(90-\sin(x))$

$\Rightarrow$ при x от 0 до 90 решений нет

2) Если x от 90 до 180

Чем меньше α, тем больше $\sin(\alpha)$ от 90 до 180

$\sin(\sin(x+90)) \overset{?}{=} \sin(\sin(x)+90)$

$\cancel{\sin(x+90) = -\sin(x-90)}$

$0 < \sin(x)+90 \leq 90 \Rightarrow \sin(\sin(x)+90) = \sin(90-\sin(x))$

$\sin(\sin(x+90)) \overset{?}{=} \sin(90-\sin(x))$

$89 \leq 90-\sin(x) \leq 90$

$-1 \leq \sin(x+90) \leq 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin(89) \leq \sin(90-\sin(x)) \leq \sin(90)$

$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(\sin(x+90)) < \sin(\sin(x)+90)$

при x от 90 до 180 решений нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 35

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 996403

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр N10-35
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

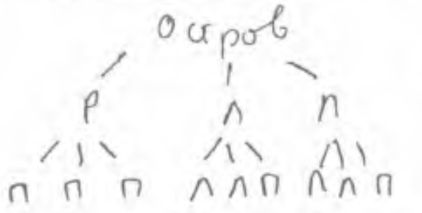
№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	10	0	8	20	20											58
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

МАТЕМАТИКА
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

1 $\sqrt[2020]{2025!}$ $\sqrt[2021]{2026!}$ возведём оба числа в степень $(2021\cdot 2020)$ => $2025!^{2021}$ и $2026!^{2020}$ степени; $2025!^{2021} = 2025!\cdot 2025!^{2020}$, $2026!^{2020} = 2025!^{2020}\cdot 2026^{2020}$; сократим $2025!^{2020}$; Остаётся сравнить 2026^{2020} и $2025!$ → $\underbrace{2026\cdot 2026\cdot\ldots\cdot 2026}_{2020\text{ раз}} > \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2025}_{2025\text{ чисел}}$
=> $\sqrt[2021]{2026!}$ больше

5



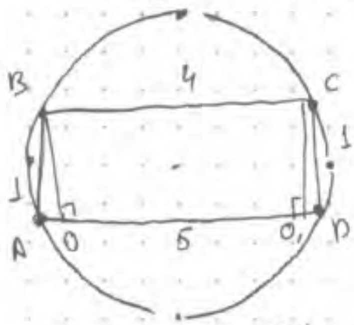
$2/3$ - лжецы; $\frac{1}{3}$ - рыцари;

1ый вопрос, $2/3$ у лжецов ложь (почему три правды у рыцаря? Для того, чтобы события были равнозначные). Всего правды 5 из них от лжецов - 2; Значит того, что это был лжец $\frac{2}{5}$ или же 0,4. Вероятность, что он соврёт второй раз $\frac{2}{3}$ => $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ +

4 Рассмотрим возможные фигуры: произвольный 4-ник (где стороны 1 и 1 смежные) или же равнобедренная трапеция. Почему не первый вариант? Из таких сторон, которые

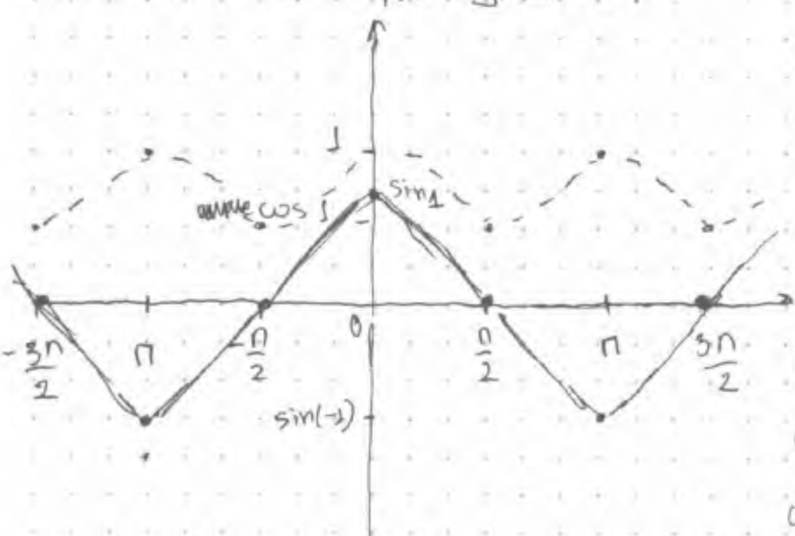
нам дана. 4-ка будет очень вытянутой в длине. (Угол напротив 5 $\angle 5$). В соотношении
схематичное изображение:

$\angle 5 > \angle 4 > 1 > 1$, т.к напротив большей стороны больший угол $\Rightarrow \angle 5 + \angle 4 > \angle 1 + \angle 1$, $\Rightarrow$ мы не можем вписать эту фигуру в окружность. Остаётся равнобедренная трапеция



Найдём углы при основании, для это проведём высоты $OO_1 = BC = 4$ (как прямоугольник) $5-4=1$ $\frac{1}{2}=0,5$ $O_1D = AO = 0,5$ видим, что AO половина $BA \Rightarrow \angle \overset{ABO}{\cancel{BAO}} = 30^\circ \Rightarrow \angle BAO = 60^\circ$; Аналогично для O_1DC; $\Rightarrow$ что углы ABC и $DCB = 120^\circ$. Проведём диагональ BD, чтобы получить вписанный треугольник BCD найдём его длину по т. косинусов $BD^2 = 16 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 21$ ($16 = BC^2$; $CD^2 = 1$; $-\frac{1}{2} = \cos 120$), $BD = \sqrt{21}$. Проверка:
$BD + BC > CD$; $BC + CD > BD$; $CD + BD > BC$; По расширенной теореме синусов $\frac{\sqrt{21}}{\sin 120} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{21}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{7}$

2. Один из способ решения графический. Начертим $\sin(\cos(x))$ и $\cos(\sin(x))$. Стоит уточнить, что функции остаются периодическими ~~[illegible]~~.



Найдём точки:
$\cos(\sin 0) = 1$
$\cos(\sin \frac{\pi}{2}) = \cancel{arc}\cos 1$
$\cos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = \cancel{arc}\cos -1$
(Важно уточнить $\cancel{arc}\cos(-1) > 0$)
$\cos(\sin \pi) = 1$
$\cos(\sin(-\pi)) = 1$
$\cos 1 = \cos -1$

Итоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М10-35

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «МАТЕМАТИКЕ», 10 класс,

вариант ________

Найдём ТЕ же точки для : $\sin(\cos x)$

$\sin(\cos 0) = \sin 1$ $\quad$ $\sin 1 < 1$, но $\sin 1 > \cos 1$

$\sin(\cos\frac{\pi}{2}) = 0$ $\quad$ $\sin(\cos\frac{3\pi}{2}) = 0$

$\sin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = 0$ $\quad$ $\sin(\cos(-\frac{3\pi}{2})) = 0$

$\sin(\cos\pi) = \sin(-1)$

$\sin(\cos -\pi) = \sin(-1)$

Как мы видим решений нет $\varnothing$

3. Сразу уберём не подходящие: ?

• Все многочлены с степенью меньше -1, почему? в целые числа входит ноль, что при делении даёт неопределённости

• Все многочлены степени выше второй, т.к исходя из отношения, которое нам дали там нет каких либо степеней. А степени будут увеличивать/уменьшать $n-1$ и $n+1$ в более сложные прогрессии, а сумма $P(n-1)$ и $P(n+1)$ не будут в среднем давать n при больших числах.

Остаются только многочлены первой степени, что и будет являться ответом.

Любой многочлен первой степени

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 19

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1001325

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М10-19
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	—	12	—	20											52
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[illegible]
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

Задача 1: Возведём $\sqrt[2020]{2025!}$ и $\sqrt[2021]{2026!}$ в степень равную $2020 \cdot 2021$

У нас получится $(2025!)^{2021}$ и $(2026!)^{2020}$ Т.е. у нас получится $1^{2021} \cdot 2^{2021} \cdot \ldots \cdot 2024^{2021} \cdot 2025^{2021}$ и $1^{2020} \cdot 2^{2020} \cdot \ldots \cdot 2025^{2020} \cdot 2026^{2020}$ соответственно. Разделим обе части на: $1^{2020} \cdot 2^{2020} \cdot \ldots \cdot 2025^{2020}$

Из $\sqrt[2020]{2025!}$ у нас останется $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2024 \cdot 2025$. А из $\sqrt[2021]{2026!}$ — 2026^{2020}. $2026^{2020} > 2025!$, т.к:

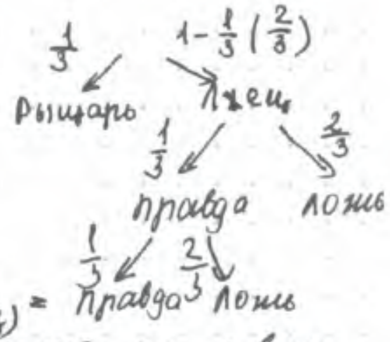
Сделаем так, чтобы в произведении $2025!$ стало 2020 множителей

Н-р: $\underbrace{720 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2024 \cdot 2025}_{2020 \text{ множителей}}$. А $2026^{2020} = \underbrace{2026 \cdot 2026 \cdot \ldots \cdot 2026}_{2020 \text{ раз}}$

Т.е. в этих произведениях одинаковое кол-во множителей, но в 2026^{2020} каждый из множителей больше, чем в $720 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2024 \cdot 2025 \Rightarrow$ ~~произ~~ $2026^{2020} > 2025!$
$\Rightarrow \sqrt[2021]{2026!} > \sqrt[2020]{2025!}$

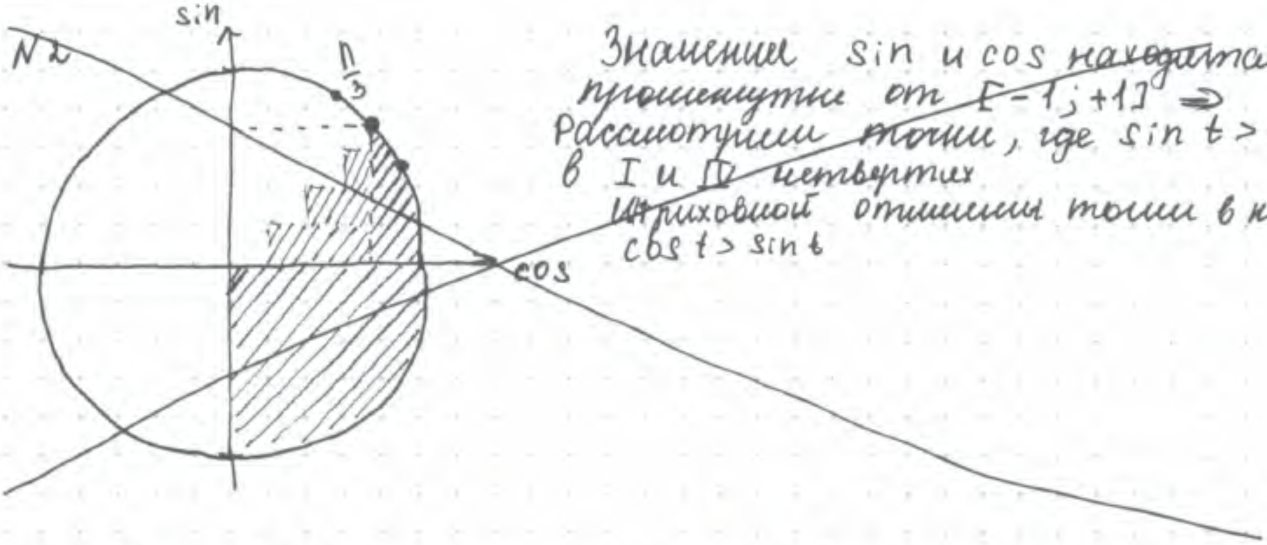
Ответ: $\sqrt[2021]{2026!} > \sqrt[2020]{2025!}$

Задача 5: Этот житель с вероятностью $\frac{1}{3}$ рыцарь и с вероятностью $\frac{2}{3}$ лжец. Этот лжец мог ответить на 1 вопрос правдой с вероятностью $\frac{1}{3}$, и солгать с вероятность $\frac{2}{3}$. Т.е. вероятность того, что житель в целом мог ответить на 1 вопрос правдой равна $\frac{1}{3}$(если рыцарь) $+ \frac{2}{3} \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$(если лжец) $= \frac{5}{9}$. Найдем вероятность того, что житель солжет на 2 вопрос: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$. Т.е. вероятность что он солжет равна $\frac{4}{27} : \frac{5}{9}$ (на ее вероятность того, что такое вообще может быть) $= \frac{4}{15}$.



Ответ: $\frac{4}{15}$

№2



Значения sin и cos находятся в промежутке от $[-1; +1]$ $\Rightarrow$ Рассмотрим точки, где $\sin t > \cos t$ в I и IV четвертях
Штриховкой отмечены точки в которых $\cos t > \sin t$

№3. Если $P(x)$ задан линейной ф-цией вида: $ax+b$, то $P(n) = an + b$; А $\frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1)) = \frac{1}{2}(a(n+1)+b + a(n-1)+b) = \frac{1}{2}(an + a + b + an - a + b) = \frac{1}{2}(2an + 2b) = an + b$. Т.е. $P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1))$ $\Rightarrow$ Если $P(x)$ имеет вид $ax+b$, то он нам подходит V

Если $P(x)$ задан квадратичной ф-цией вида $ax^2 + bx + c$. То $P(n) = an^2 + bn + c$. А $\frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1)) = \frac{1}{2}(an^2 + 2an + a + bn + b + c + an^2 - 2an + a + bn - b + c) = an^2 + a + bn + c$ $\Rightarrow$ $P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1))$, только если $a = 0$. Ну тогда ф-ция принимает линейный вид.

Если $P(x)$ задано кубической функцией вида $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда $P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$
А $\frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1)) = \frac{1}{2}(an^3 + 3an^2 + 3an + 1 + bn^2 + 2bn + b + cn + c + d + an^3 - 3an^2 + 3an - 1 + bn^2 - 2bn + b + cn - c + d) = \frac{1}{2}(2an^3 + 6an + 2bn^2 + 2b + 2cn + 2d) = an^3 + 3an + bn^2 + b + cn + d$
$\Rightarrow$ чтобы $P(n)$ было равно $\frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1))$, $3an + b$ должно быть равно 0. То есть b должно быть равно $-3an$, но b должно быть при различных n, а b всегда одно $\Rightarrow$ не получится иначе $a = 0$ и $b = 0$. Но тогда ф-ция будет линейной при дальнейшем степени многочлена все равно будем приходить к тому, что коэффициенты при x^4 должны быть равные 0 и ф-ции должны быть линейными.
Ответ: $P(x)$ должна иметь вид $ax + c$.

~~№1. Для начала найдем~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 30

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1011479

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М 10-30
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	18	1	12	20	0											51
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

Задача 1

$\sqrt[2020]{2025!} \vee \sqrt[2021]{2026!}$

Возведем оба выражения в степень $2020 \cdot 2021$

$(2025!)^{2021} \vee (2026!)^{2020}$

$(2025!)^{2020} \cdot 2025! \vee (2025!)^{2020} \cdot 2026^{2020} \quad \Big| : (2025!)^{2020}$

$2025! \vee 2026^{2020}$

$1 \cdot 2 \cdot \overset{6}{3} \cdot \overset{24}{4} \cdot \overset{120}{5} \cdot \overset{720}{6} \cdot \underbrace{7 \cdot \ldots \cdot 2025}_{2019 \text{ множ.}} \vee 2026 \cdot 2026^{2019}$

$720 \cdot \underbrace{7 \cdot \ldots \cdot 2025}_{2019 \text{ множит.}} \vee 2026 \cdot 2026^{2019}$

$720 < 2026$

$\underbrace{7 \cdot \ldots 2025}_{2019 \text{ множ.}} < 2026^{2019}$

$\Bigg| \Rightarrow 720 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2025 < 2026^{2020} \Rightarrow$ почему?

$\Rightarrow 2025! < 2026^{2020} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

Ответ: $\sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

Задача 3.

Пусть $P(n) = C$, где C - любое число (константа)

Тогда $P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1))$

$C = \frac{1}{2}(C + C)$

$C = C$, т.е. все многочлены вида $P(n) = C$ подходят

Пусть $P(n) = a \cdot n + b$ - любой многочлен первой степени

$P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1))$

$an + b = \frac{1}{2}(a(n+1) + b + a(n-1) + b)$

$an + b = \frac{1}{2}(an + a + b + an - a + b)$

$an + b = an + b$, т.е. все многочлены вида $P(n) = an + b$ подходят

Пусть $P(n) = an^2 + bn + c$

$P(n) = \frac{1}{2}(P(n+1) + P(n-1)$

$an^2 + bn + c = \frac{1}{2}(an^2 + 2an + a + bn + b + c + an^2 - 2an + a + bn - b + c) = \frac{1}{2}(2an^2 + 2a + 2bn + 2c)$

$an^2 + bn + c = an^2 + bn + c + a$

$a = 0 \Rightarrow$ опять многочлен первой степени,

т.е. $P(n) = an^2 + bn + C$ не подходит

$P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

$an^3 + bn^2 + cn + d = \frac{1}{2}(a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d + a(n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1) + d) = \frac{1}{2}(\underline{an^3} + \cancel{3an^2} + 3an + \cancel{a} + bn^2 + \cancel{2bn} + b + cn + \cancel{c} + d + \underline{an^3} - \cancel{3an^2} + 3an - \cancel{a} + bn^2 - \cancel{2bn} + b + cn - \cancel{c} + d) = \frac{1}{2}(2an^3 + 6an + 2bn^2 + 2b + 2cn + 2d)$

$an^3 + bn^2 + cn + d = an^3 + \underline{3an} + bn^2 + \underline{b} + cn + d$

$3an + b = 0$

Но это не будет верно для всех n (при $n = 0 \Rightarrow b = 0$, но при $n \neq 0$, и если $b = 0 \Rightarrow a = 0$, т.е. не 3-я степень.) $P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ не подходит [redacted]тоговый балл ______ ______ Шифр М10-30

(подпись председателя жюри) (заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 10 класс,

вариант ______

индукция ?

Задача 3 (продолжение)

Пусть нашлось в какой-то момент $P(0) = \frac{1}{2}(P(n-1)+P(n+1))$ n? что уходит неверное предположение шага

Рассмотрим, тогда многочлен ~~следующей~~ предыдущей степени; он будет верен ? почему?

$\cancel{P(0)}\ P(n)\cdot n + q = \frac{1}{2}(P(n-1)\cdot(n-1)+q+P(n+1)\cdot(n+1)+q)$

$P(n)\cdot n + q = \frac{1}{2}(P(n-1)\cdot n - P(n-1) + 2q + P(n+1)\cdot n + P(n+1))$

$P(n)\cdot n = \frac{P(n-1)\cdot n + P(n+1)\cdot n + P(n+1) - P(n-1)}{2}$

$n\left(P(n) - \left(\frac{P(n-1)+P(n+1)}{2}\right)\right) = \frac{P(n+1)-P(n-1)}{2}$

$n(2P(n) - (P(n-1)) + P(n+1)) = P(n+1) - P(n-1)$

Если $n = 0$

$\cancel{P(n+1)}$

$P(1) = P(-1)$

Если $n = 1$

$2P(n) = 2P(n+1)$

$P(1) = P(2)$

$\Rightarrow P(1) = P(2) = P(-1)$

~~Это всегда верно~~

Если $n = -1$

$-1\cdot(2P(-1) - P(-2) - P(0)) = P(0) - P(-2)$

$P(-2) + P(0) - 2P(-1) = P(0) - P(-2)$

$P(-2) = P(-1)$

Т.е. $P(-2) = P(-1) = P(1) = P(2)$ и т.д. $\Rightarrow$ аналогично получается $P(n) = P(n+1) \Rightarrow P(n) = C$, т.е. многочлен следующей степени: $P(n) = an + b$. Т.е. никаких других подходящих нет.

Ответ: $P(n) = C$
$P(n) = an + b$

Задача 5.

Если на второй вопрос он должен солгать, то он будет лжецом, вероятность $\frac{2}{3}$ (т.к. треть острова - рыцари)

Но при этом лжец сказал правду на первый вопрос.

Это может произойти с вероятностью $\frac{1}{3}$

Но на второй вопрос он солжёт с вероятностью $\frac{2}{3}$.

Значит, общая вероятность, что такое может произойти:

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{он лжец, т.к. лгать могут только лжецы}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{первый раз лжец сказал правду}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{второй раз он уже солгал}} = \frac{4}{27}$$

Ответ: $\frac{4}{27}$ вероятность того, что на второй вопрос он солжёт.

⊖

Итоговый балл _____

_____________ _____________

(подпись председателя жюри)

Шифр M10-30

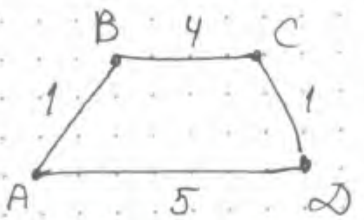
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

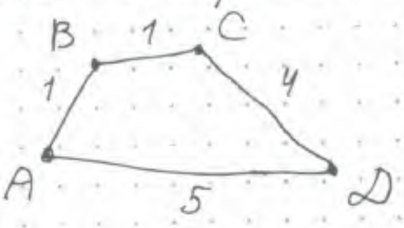
по « математике », 10 класс,

Задача 4.

Есть два варианта четырех угольника с такими длинами сторон:

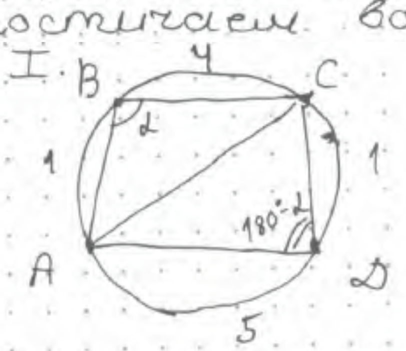


и



Если это вписанный четырехугольник, то посчитаем возможный радиус

I.



По т. косинусов:

1) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$AC^2 = 17 - 8 \cdot \cos\alpha$

2) $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cdot \cos(180° - \alpha)$

$AC^2 = 26 + 10 \cdot \cos\alpha$

3) $17 - 8 \cdot \cos\alpha = 26 + 10 \cdot \cos\alpha$

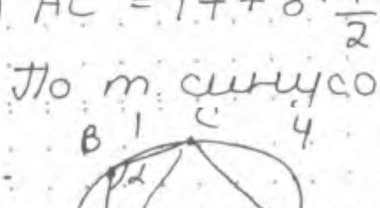
$18\cos\alpha = -9$

$\cos\alpha = \frac{-1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (II четв.)

4) $AC^2 = 17 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 21 \Rightarrow AC = \sqrt{21}$

5) По т. синусов: $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

II.



По т. косинусов:

1) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos\alpha$

$AC^2 = 2 - 2\cos\alpha$

2) $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos(180° - \alpha)$

$AC^2 = 41 + 40 \cdot \cos\alpha$

3) $2 - 2\cos\alpha = 41 + 40\cos\alpha$

$42\cos\alpha = -39 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-13}{14} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

4) $AC^2 = 2 - 2 \cdot \frac{13}{14} = \frac{28+26}{14} = \frac{27}{7} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

5) По т. синусов $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 14}{\sqrt{7} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

Ответ: $R = \sqrt{7}$

Задача 2

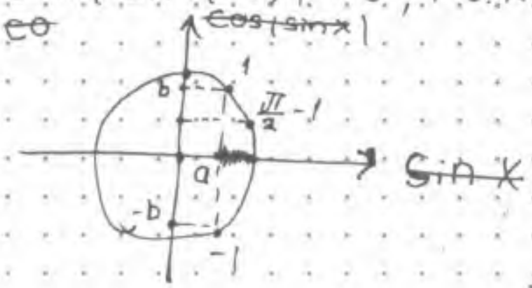
$\sin(\cos(x)) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos(x)\right)$

Т.е. $-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos(x)\right) \geq \cos(\sin(x))$

$\cos(\sin(x)) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos(x)\right) \leq 0$

$\cos(\sin(x)) > 0$, т.к. $\sin(x) \in [-1; 1]$

~~со~~



$\Rightarrow \cos(\sin(x)) \in [\cos(1); 1]$

$\Rightarrow \sin(\cos(x)) \in [-\sin(-1); \sin(1)]$

Получается тогда выражение:

$\cos(\sin(x)) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos(x)\right) > 0$

при любом значении x, значит, может выполнятся лишь рав-во:

$\cos(\sin x) \leq -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos(x)\right)$

$\sin x = -\frac{\pi}{2} - \cos(x)$

$\sin x + \cos x = -\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2}$, что невозможно, значи

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

если $\cos(\sin x) \uparrow \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos(x)\right) \downarrow$

т.е.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	M10 - 20

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1093571

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" 01 2026 г.

Шифр M10-20
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	0	8	—	20											48
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

МАТЕМАТИКА
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

N 1

$\cancel{\sqrt[2020]{2025!} \quad \sqrt[2021]{2026!}}$

$$\sqrt[2020]{2025!} \qquad \sqrt[2021]{2026!}$$

$$\left(\sqrt[2020]{2025!}\right)^{2020\cdot 2021} \qquad \left(\sqrt[2021]{2026!}\right)^{2020\cdot 2021}$$

$$(2025!)^{2021} \qquad (2026!)^{2020}$$

$$2025! \qquad 2026^{2020}$$

$$\underbrace{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\ldots\cdot 2025}_{2020} \qquad \underbrace{2026\cdot 2026\ldots 2026}_{2020}$$

В левой части 2020 множителей, каждый из которых меньше 2026, в ~~левой~~ правой 2026^{2020}, значит правая часть больше.

Ответ: $\sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

N3

$P(n) = \frac{1}{2}\left(P(n+1) + P(n-1)\right)$

Представим $P(n)$ как $P(n-1)+x$, тогда:

$P(n-1) + x = \frac{1}{2}\left(P(n+1) + P(n-1)\right)$

$P(n+1) = P(n-1) + 2x$ ✓

если $P(n) = P(n-1)+x$, то $P(n+1) = P(n)+x$, значит функция $P(n)$ линейна, у многочленов $P(x)$ не может быть степень выше 1. не доказано ?!

$P(x) = n_1 x + n_2$, где n_1, n_2 – ~~натуральные~~ коэффициенты

Ответ: $P(x) = n_1 x + n_2$

N5

Рассмотрим сначала какова вероятность что он лжец.

Вероятность, что это рыцарь $\frac{1}{3}$, лжец совравший $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, лжец сказавший правду $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$\frac{2}{9} : \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right) = 2:5$ – вероятность, что ответивший правду лжец

теперь вероятность, что он солжет на 2-ой вопрос – $\frac{2}{3}$, значит

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ – вероятность, что житель, сказавший правду солжет на 2-ой вопрос

Ответ: $\frac{4}{15}$ (+)

N2 $\quad \pi = 1$

Обозначим $\sin x$ как a, тогда $\sin(\cos x) \geq \cos(\sin x)$ можно представить как

$\sin\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right) \geq \cos a$

Найдем точки, где они равны —

$\sin\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right) = \cos a$

$a + \frac{\pi}{2} = \sqrt{1-a^2}$ $\qquad$ ~~$a+\frac{\pi}{2} = -\sqrt{1-a^2}$~~

$a^2 + a\pi + \frac{\pi^2}{4} = 1 - a^2$

$2a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$

$1 + 6 = 7$

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 51

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1262249

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М10-31
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	0	—	—	20											40
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)

Задача №1

$\sqrt[2020]{2025!}$ и $\sqrt[2021]{2026!}$ $\Big|\ ^{\wedge}2020\cdot 2021$ (возведем в степень, равную произведению 2020 и 2021, чтобы избавиться от корня.

$2025!^{2021}$ и $2026!^{2020}$

$\left(\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot(7\cdot\ldots\cdot2025)\,2026^{2020}\cdot 2025!^{2020}}\right)$

$2025!\cdot\cancel{2025!^{2020}}$ и $\cancel{2025!^{2020}}\cdot 2026^{2020}$ $\Big|\ :2025!^{2020}$

$2025!$ и $2026^{2020} \to 2026\cdot 2026^{2019}$

$\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\underbrace{(7\cdot\ldots\cdot2025)}$

$\underbrace{720}_{720<2026}\cdot\underbrace{(7\cdot\ldots\cdot2025)}_{2019\text{ чисел, каждое из которых } < 2026}$ и $2026\cdot 2026^{2019}$

Т.к. кол-во множителей равно и каждый из множителей 1-го числа меньше множителей 2, $\Rightarrow$ $\sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

Ответ: $\sqrt[2020]{2025!} < \sqrt[2021]{2026!}$

[redacted]

Задача N 5

При первой встрече:

$P(\text{рыц}) = \frac{1}{3}$ $\quad P(\text{лж}) = \frac{2}{3}$

$P(\text{л}) = \frac{2}{3}$ $\quad P(\text{пр}) = \frac{1}{3}$

Таким образом, вероятность услышать правду при 1 встрече равна:

$$P(\text{пр}(1\text{встр})) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

Согласно условиям, у нас ~~есть шанс 1,~~ первое высказывание - правда, тогда:

$P(\text{рыц}) = \frac{3}{5}$ $\quad P(\text{лж}) = \frac{2}{5}$

$P(\text{л}) = \frac{2}{3}$ $\quad P(\text{п}_\text{р}) = \frac{1}{3}$

Значит, $P(\text{пр}_{\text{рыц}}) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15}$ (рыц.) $\Rightarrow$

$P(\text{пр}_{\text{лж}}) = \frac{2}{15}$

$\cancel{P(\text{л}) = 1 - \frac{9}{15} = \frac{6}{15}}$ $\quad P(\text{лож}) = \frac{4}{15}$ +

Ответ: $\frac{4}{15}$

Задача N 4

$1+1+4+5 = 11 \Rightarrow \min(R) = 4$

Задача N 2

Ответ: $x \in [-1; -\arcsin(0,64)] \cup [\arcsin(0,64); 1]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М10 - 39

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 10 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1274704

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М10-39
(заполняется оргкомитетом)

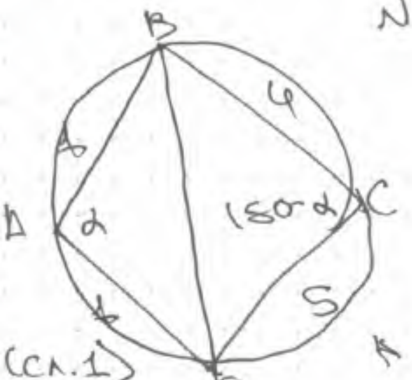
Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	0	0	2	20	20											42
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

МАТЕМАТИКА
(профиль олимпиады)

10
(класс участия)



(сл.1)

№4. Дано: четырёх. угол. впис. в окруж. со стр. 1, 1, 4, 5

Найти R_0

Решение:

* Рассмотрим 2 случая

1. (сл. 1) стороны 1 и 1 стоят рядом

ABCD - 4-хугольник.

Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BCD = 180 - \alpha$, по т. Косинусов.

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD} = \sqrt{1+1+2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\alpha}$

$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2 + 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD} =$

$= \sqrt{16+25+2\cdot 4\cdot 5\cos(180-\alpha)} = \sqrt{41 - 40\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2 + 2\cos\alpha = 41 - 40\cos\alpha$

$42\cos\alpha = 39$

$\cos\alpha = \frac{39}{42} = \frac{13}{14} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{13^2}{14^2}} =$

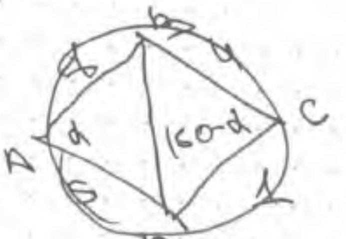
$= \sqrt{1-\frac{169}{196}} = \sqrt{\frac{27}{196}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

$BC = \sqrt{2+2\cos\alpha} = \sqrt{2+\frac{2\cdot 13}{4}} = \sqrt{2+\frac{13}{7}} = \sqrt{\frac{27}{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

по т. Синусов:

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\cancel{14}^{7}}{3\cancel{\sqrt{3}}}}{\cancel{2}} = \sqrt{7}$

случай №2.



Стороны 1 и 1 не стоят рядом

ABCD- четырёхугольник. AB = BC = 1

по т. Косинусов:

~~BD~~ $\angle BAD = \alpha \Rightarrow \angle BCD = 180-\alpha$

по т. Косинусов.

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 + 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\alpha} = \sqrt{1+25+2\cdot 1\cdot 5\cdot\cos\alpha}$

$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2 + 2BC\cdot CD\cdot\cos(180-\alpha)} = \sqrt{1+16-2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos\alpha}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 26 + 10\cos\alpha = 17 - 8\cos\alpha$

$\cos\alpha = -1/2$

$BD = \sqrt{17+4} = \sqrt{21} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{BD}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

Других случаев нет

Ответ: $R = \sqrt{7}$

[redacted]оговый балл ________ ______________

(подпись председателя жюри)

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

4

Шифр М10-39

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «______________________________», ______ класс,

вариант ________

№2.

$\sin(\cos(x)) \geq \cos(\sin(x))$

$\sin(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) \geq \cos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$

$\arcsin(\frac{\pi}{2}-x) \geq \arccos(\frac{\pi}{2}-x)$

$\arccos(\frac{\pi}{2}-x) = \sqrt{1-\arcsin^2(\frac{\pi}{2}-x)}$

$\arcsin(\frac{\pi}{2}-x) \geq \sqrt{1-\arcsin^2(\frac{\pi}{2}-x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin(\frac{\pi}{2}-x) \geq 0 \Rightarrow$ можно возвести в квадрат

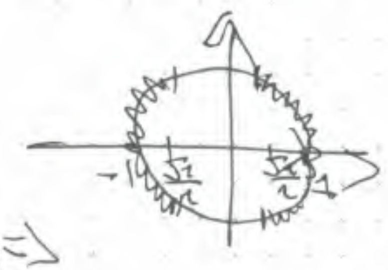
$\arcsin^2(\frac{\pi}{2}-x) \geq \cancel{1}\ 1-\arcsin^2(\frac{\pi}{2}-x)$

пусть $\arcsin(\frac{\pi}{2}-x)=y$, $y\in[-1,1]$

$y^2 \geq 1-y^2$

$2y^2 \geq 1$

$y^2 \geq 1/2$



$\cancel{y} \ y\in[-1;\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2};+1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-x \in [\cancel{\frac{\pi}{4}}\ 2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n]\cup[\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \frac{5\pi}{4}+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$

$-x \in [\frac{3\pi}{4}+2\pi n, -\frac{\pi}{4}+2\pi n]\cup[\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n]$

$x\in[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{\pi}{4}+2\pi n]\cup[\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n]$

$n\in\mathbb{Z}$

Ответ

Лист № 2

N3.

Найти $P(x)$ если $P(n)=\frac{P(n+1)+P(n-1)}{2}$, если $n\in\mathbb{Z}$

$2P(n)=P(n+1)+P(n-1)=\frac{P(n)+P(n+2)+P(n)+P(n-2)}{2}=$

$=P(n)+\frac{P(n+2)+P(n-2)}{2}\Rightarrow$

$P(n)=\frac{P(n+2)+P(n-2)}{2}$ и т.д. $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(n)=P(n+1)+P(n-1)=P(n+2)+P(n-2)=\dots$

$a(n+1)^k+b(n+1)^{k-1}+\dots+c+a(n-1)^k+b(n-1)^{k-1}+\dots+c=$

$\dots=a(n+2)^k+b(n+2)^{k-1}+\dots+c+a(n-2)^k+b(n-2)^{k-1}+\dots+c\Rightarrow$

$\Rightarrow c$ - любое число ?

и т.д. $\Rightarrow$ возможно если $a=b=\dots=c=0$ и ?.. а это все случаи?

— +

N5.

Рыцари - 1/3 Правда → ложь P?

Лжецы - 2/3

P - выбрать лжеца $=\frac{2}{3}$

P - что он не солжёт $\frac{1}{3}$

$P_1^{\circ}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

P - выбрать рыцаря $=1/3$

P - что он не солжёт $=1$

$P_2^{\circ}=1\cdot 1/3=1/3$

$P^{\circ}_{общ}=1/3+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$ - первый вопрос правда

$P_n=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{выбрать л}}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{сказал правд}}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{соврал}}=\frac{4}{27}$

$P=\frac{P^{\circ}_{общ\cdot n}}{P^{\circ}_{общ}}=\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{5}=\frac{4}{15}$

Ответ: $P=\frac{4}{15}$ +

Отв