КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ 1804

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М 11-45

Данные участника

ID номер участника 1263853

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М11-45
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	10	20	0	5											55
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

11
(класс участия)

№1. Пусть всего z листов, x листов Вова порвал на ~~снежинки~~ звездочки; y листов - Люба на снежинки. По условию ~~составим~~ систему уравнений

$$\begin{cases} 2(z-x)+3(z-y)=20 \\ 3x+4y=26 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5z-2x-3y=20 \\ 3x+4y=26 \end{cases}$$

Т.к все переменные натуральные числа, то все подходящие под второе условие x и y это $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

При первом $z=7,8$ - не натуральное число не подходит ~~как~~ при втором $z=7,6$ - не натуральное не подходит

Значит система не имеет решения в натуральных числах.

~~Ответ~~: ошиблись

№2. $a-x=(x-b)^2$, $a-x\geq 0$ $a\geq x$, т.к $\sqrt{a-x}=x-b$

$a-x=x^2-2bx+b^2$

$x^2-x(2b-1)+b^2-a=0$

$D=4b^2-4b+1-4b^2+4a=4a-4b+1$, $D\geq 0$ $\quad 4a-4b+1\geq 0$, $(a-b)\geq -0{,}25$

Пусть $(a-b)=t$, значит $t\geq -0{,}25$

Сдано 2 листов

подпись участника

подпись наблюдателя в аудитории

Лист №1

~~$x_1 = 2b - 1$~~
~~x_2~~

$$x_1 = \frac{2b - 1 + \sqrt{4t+1}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2b-1 - \sqrt{4t+1}}{2}$$

Если один корень лишний, то $x_1 \geq a > x_2$, либо $D = 0$ и $\frac{2b-1}{2} < a$

1. $\frac{2b-1+\sqrt{4t+1}}{2} \geq a$

$2b-1+\sqrt{4t+1} \geq 2a$

$\sqrt{4t+1} \geq 2t+1 > 0,5 \Rightarrow$ $4t+1 \geq (2t+1)^2$

$4t+1 \geq 4t^2+4t+1$

$0 \geq 4t^2 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow a = b$

$a > \frac{2b-1-\sqrt{4t+1}}{2}$

$2a-2b+1 > -\sqrt{4t+1}$

$2t+1 > 0,5$; $0 \geq -\sqrt{4t+1} \Rightarrow 2t+1 > -\sqrt{4t+1}$

при всех t

$$\begin{cases} \frac{2b-1+\sqrt{4t+1}}{2} \geq a \\ a > \frac{2b-1-\sqrt{4t+1}}{2} \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow a = b$$

2. $D = 0 \Rightarrow 4a - 4b + 1 = 0 \Rightarrow a = b - 0,25$

$\frac{2b-1}{2} < a \Rightarrow 2b - 1 < 2a \Rightarrow 2a - 2b + 1 > 0 \Rightarrow$

$2t + 1 > 0$, верно т.к. $2t+1 > 0,5$; $0,5 > 0$

$$\begin{cases} D = 0 \\ \frac{2b-1}{2} < 0 \end{cases}$$ при $a = b - 0,25$

Ответ: $a = b$ или $a = b - 0,25$

№4. Солгать может только Алексей, он уже ~~солгал два~~ сказал правду два раза, каждый раз с вероятностью 0,25, скажет неправду он ~~две~~ с вероятностью 0,75

$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,015625$

Ответ: 0,015625

[redacted]овый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М 11-45

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике **»,** 11 **класс,**

вариант ________

№3 ~~Возьмём~~ Пусть радиус малого шара — это r.

Заметим, что ~~если~~ если соединить центры больших шаров, то мы получим ~~равнобедренный~~ равносторонний ~~КФУ~~ треугольник со стороной $2R$ и параллельный плоскости. Чтобы маленький шар был с максимальным радиусом, ~~его~~ его центр должен совпадать с центром треугольника, т.е горизонтальное расстояние между центрами малого и любого большого шара это $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

Зная, что расстояние между центрами малого и большого шаров равно $R+r$, а вертикальное расстояние между ними $R-r$, по теореме Пифагора выполняется

$$(R+r)^2 = \frac{4R^2}{3} + (R-r)^2$$

$$(R+r)^2 - (R-r)^2 = \frac{4R^2}{3}$$

$$4Rr = \frac{4R^2}{3}, \text{ откуда } r = \frac{R}{3}$$

Ответ: $r = \frac{R}{3}$

№5 б) Если $P(x)$ - четная функция, то $P(x) = P(-x)$

При $x=0$

$0 \cdot P'(0) = k(P(1) + P(-1)) \Rightarrow P(1) = -P(-1)$.

Т.к $P(1) = P(-1)$, то $P(1) = 0$

Ответ: 0

Лист № 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 138

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 841945

М11-138

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	20	10	80

Задача 2.

$\sqrt{a-x} = x-b \to (x-b)^2 = a-x$ $\quad x \geq b, x \leq a$

$(x-b)^2 = a-x$

$x^2-2bx+b^2=a-x$

$x^2-2bx+x+b^2-a=0$

$x^2+(1-2b)x+(b^2-a)=0$

$D=b^2-4ac=(1-2b)^2-4\cdot1\cdot(b^2-a)=(1-4b+4b^2)-4b^2+4a=(1-4b+4b^2)-4b^2+4a=$

$=1-4b+4a$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=-\frac{(1-2b)\pm\sqrt{1-4b+4a}}{2\cdot1}=\frac{2b-1\pm\sqrt{1-4b+4a}}{2}$

Чтобы ровно 1 корень был лишним: $y_1 \geq 0$, $y_2<0$

Выполняется при $a-b\geq0$ (т.к. тогда $y_2<0, y_1\geq0$)

случай $a-b<0$ дает оба $y_{1,2}<0$ => оба лишние => не подходят

[redacted] тогда $a\geq b$

Ответ: при $a \geq b$

Задача 1.

Вовочка 2сн или 3зв. $\left.\right\}$ 20сн верно ли?

Любочка 3сн или 4зв 26зв

Пусть Вовочка – x_1, y_1

Любочка – x_2, y_2

$x_1+y_1=x_2+y_2=N$ (одинаковое кол-во листов)

$2x_1+3x_2=20$ – снежинки

$3y_1+4y_2=26$ – звездочки

$y_1=N-x_1,\ y_2=N-x_2$

подставляем (звезд.)

$3(N-x_1)+4(N-x_2)=26$

$7N-3x_1-4x_2=26$

$3x_1+4x_2=7N-26$

[redacted] (снеж)

$2x_1+3x_2=20$

$x_1=10-\frac{3}{2}x_2$

$3(10-\frac{3}{2}x_2)+4x_2=7N-26$

$30-\frac{9}{2}x_2+4x_2=7N-26$

$30-\frac{1}{2}x_2=7N-26$

$56-7N=\frac{1}{2}x_2$

$x_2=112-14N$

т.к $x_2\geq 0$, то $112-14N\geq 0 \Rightarrow N\leq 8$

$x_1=10-\frac{3}{2}(112-14N)=21N-158$

$x_1\geq 0 \Rightarrow 21N-158\geq 0 \Rightarrow N\geq 8$

Значит $N=8$

Тогда $x_2=112-14\cdot 8=0$

$x_1=21\cdot 8-158=10$

Тогда $y_1=N-x_1=8-10=-2<0$ – противореч

$\Downarrow$

нет решений

ошиблись

Ответ: ошиблись.

или

Кол-во общих снежинок

$2N+3N=20$

Общее кол-во звездочек:

$3N+4N=26$

Получаем систему:

$\begin{cases} 2N+3N=20 \\ 3N+4N=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(\underbrace{2+3}_{5})=20 \Rightarrow N=4 \\ N(\underbrace{3+4}_{7})=26 \end{cases}$

Единственное натуральное N (кол-во листов) удовлетворяющее кол-во снежинок – 4

Подставляя 4 во второе уравнение: $4\cdot 7\neq 26$

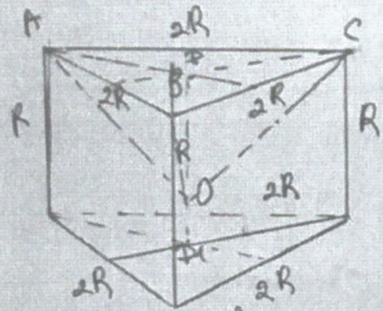
$\Downarrow$

ошибка

M11 - 138

Задание 3.

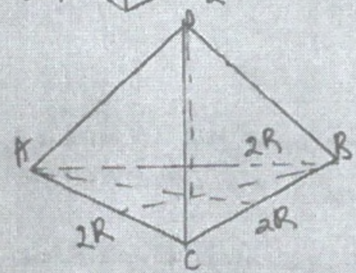
Обозначим центры первых трех шаров: A, B, C, радиусы – R
центр четвертого – O, радиус r

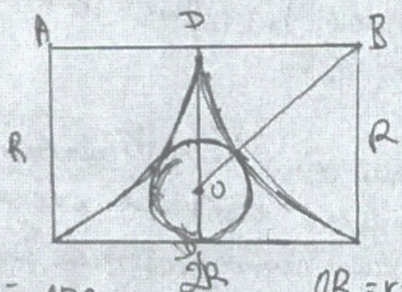


1) сведем задачу к тому, что четвертый шар касается остальных. В этом случае у него будет наибольший радиус.

2) соединяем все центры

3) Очевидно, что получается правильная треугольная пирамида:

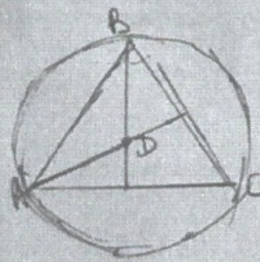




$OB = r + R = AO = CO$

$OD = R - r$

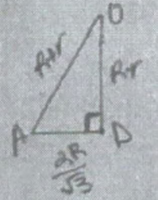
4) Впишем равносторонний $\triangle ABC$ в окружность



Т.к. D – проекция вершины O на основание правильной треуг. пирамиды OABC, то т. O – центр $\triangle ABC \Rightarrow$ центр описан. окружности

AD – радиус $\Rightarrow AD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

5) $\triangle ADO$ – прямоугольный



По т. Пифагора

$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$

$\frac{4R^2}{3} + \cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} = \cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2}$

$\frac{4R^2}{3} - 4Rr = 0$

$\frac{4R^2 - 12Rr}{3} = 0$

$4R^2 - 12Rr = 0$

$4R(R - 3r) = 0$

$\left[\begin{array}{l} R = 0 \text{ – невозможно (R – радиус)} \\ r = \frac{R}{3} \end{array}\right.$

Ответ: наибольший возможный радиус четвертого шара

$r = \frac{R}{3}$

Задача 2.

Задание 4.

(Р) Рыцари $P_р = \frac{2}{3}$ – правда 100%

(Л) Лжецы $P_л = \frac{1}{3}$ — правда $\frac{1}{4}$, ложь $\frac{3}{4}$

А: правда + правда

$P(A)_л = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$P(A)_р = 1$

$P(A) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{3} + \frac{1}{48} = \frac{32}{48} + \frac{1}{48} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$

$P(A)_л = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{11}{16}} = \frac{1}{48} \cdot \frac{16}{11} = \frac{1}{3 \cdot 11} = \frac{1}{33}$

$P(A)_р = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}$

$P(A)_{ложь} = P(A)_л \cdot \frac{3}{4} + P(A)_р \cdot 0 = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{132} = \frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$

М11-138

Задача 6

$P(x)$ - многочлен $\qquad xP'(x)=k(P(x+1)+P(x-1))$

$k\in N$

а) $P(x)$ - четная

б) $P(1)$ - ?

$Px=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, где $a_n\neq 0$

$P'x=na_nx^{n-1}+(n-1)(a_{n-1}\cdot x^{n-2})+\ldots+0$

коэффициент при старшей степени

$x(na_nx^{n-1})=\underbrace{na_n}_{\text{коэффициент}}x^n$

$k(a_n(x+1)^n+a_n(x-1)^n)=ka_n((x+1)^n+(x-1)^n)=ka_n(x^n+x^n)=2ka_nx^n$

$2ka_n=na_n\,|:a_n\neq 0$

$n=2k$

а) В выражении $(x+1)^j+(x-1)^j$ содержатся только те степени x, четность которых совпадает с четностью j (тк. нечетные степени взаимно уничтожаются или удваиваются в зависимости от j)

Рассмотрим коэффициенты при степенях x^m.
Для существования нечетных степеней в $P(x)$ необходимо, чтобы нашелся такой нечетный индекс m, что $a_m\neq 0$

Тк $n=2k$, то n - четно, $m<n$

Коэффициенты при x^m слева: ma_m;

справа - $2ka_m$ $\qquad$ x^m может возникать в различных суммах вида $(x+1)^j+(x-1)^j$

$ma_m=2ka_m$

тк. m нечетное, а $n=2k$ четное, то $m\neq 2k \Rightarrow$ равенство возможно только при $a_m=0$. Мы получили противоречие с предположением $\Rightarrow P(x)$ содержит только четные степени x, то есть $P(x)=P(-x)$

$\Downarrow$

$P(x)$ - четная функция

б) подставим $x=0$:

$0\cdot P'(0)=k(P(0+1)+P(0-1))$

$0=k(P(1)+P(-1))$

Тк. $P(x)$ - четная, то $P(-1)=P(1)$:

$0=k(P(1)+P(1))=2kP(1)$ [redacted]

Тк. $k\in N$, то $k\neq 0\Rightarrow P(1)=0$

Ответ: $P(1)=0$

5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 140

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1260581

1	2	3	4	5	Σ
20	0	20	10	0	50

М 11-140

№5

а) Подставим $-x$ вместо x: $-xP'(-x) = k(P(-x+1) + P(-x-1))$.

$Q(x) = P(-x) \Rightarrow Q'(x) = -P'(-x) \Rightarrow$ ~~Q~~ $xQ'(x) = k(Q(x-1) + Q(x+1))$

$xP'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$

Поскольку $P(x)$ и $Q(x) = P(-x)$ — решения одного и того же линейного дифференциального уравнения с одинаковыми начальными условиями (сначала мы?), $P(0) = Q(0)$, то $(P(x) = Q(x) = P(-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x)$ - четная

б) $P(-x)$ - четная, т.е $P(1) = P(-1)$

Подставим $x = 1$: $1 \cdot P'(1) = k(P(2) + P(0))$.

Подставим $x = -1$: $-1 \cdot P'(-1) = k(P(0) + P(-2))$

Т.к $P(x)$ четная, $P'(-1) = -P'(1)$. Подставим в это уравнение для $x = -1$

$-1 \cdot (-P'(1)) = k(P(0) + P(2)) \Rightarrow P'(1) = k(P(0) + P(2))$

Сравнивая с уравнением для $x = 1$, получаем:

$k(P(2) + (P(0)) = k(P(0) + P(2))$

Рассмотрим $P(x)$ пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$

$xP'(x)$ имеет степень n

$k(P(x+1) + P$ ~~(x)~~ $(x-1))$ тоже имеет степень n, но при раскрытии скобок члены с нечетными степенями x сокращаются $\Rightarrow P(x)$ могут быть только члены с четными степенями, т.е $P(x)$ - многочлен от x^2

Пусть $P(x) = Q(x^2)$, где Q - многочлен. тогда: $P'(x) = 2xQ'(x^2)$

$P(x+1) = Q((x+1)^2)$,

$P(x-1) = Q((x-1)^2)$

Подставим в : $x \cdot 2xQ'(x^2) = k(Q((x+1)^2) + Q((x-1)^2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 Q'(x^2) = k(Q(x^2 + 2x + 1) + Q(x^2 - 2x + 1))$

$y = x^2 \Rightarrow 2yQ'(y) = k(Q(y + 2x + 1) + Q(y - 2x + 1))$

Пусть $P(x) = C$ (константа C) $\Rightarrow P'(x) = 0$

$xP'(x) = 0$

$k(P(x+1) + P(x-1)) = k(C + C) = 2kC$

Для выполнения тождества $0 = 2kC$ необходимо $C = 0$ (т.к k - пол-ое число) $\Rightarrow P(x) = 0$ для всех x

Ответ: а) $P(x)$ - четная ф-ция

б) $P(1) = 0$

№4

· Рыцарь всегда говорит правду. Если житель - рыцарь, то он ответил правду на 2 вопроса с вероятностью 1.

· Лжец говорит правду с вероятностью $\frac{3}{4}$. Вероятность, что лжец ответил правду на 2 вопроса подряд: $\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$

Ищем апостериорные вероятности, что житель - рыцарь или лжец, при условии, что он ответил правду на два вопроса. Используем формулу Байеса.

· Пусть A - событие «житель - рыцарь», B - событие «житель - лжец», C - событие «житель ответил правду на два вопроса».

· Априорные вер-ти: $P(A)=\frac{2}{3}$ $P(B)=\frac{1}{3}$

$$P(C|A)=1, \quad P(C|B)=\frac{9}{16}$$

$$P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)=1\cdot\frac{2}{3}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{9}{48}=\frac{41}{48}$$

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C)}=\frac{1\cdot\frac{2}{3}}{\frac{41}{48}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{48}{41}=\frac{32}{41}$$

$$P(B|C)=\frac{P(C|B)P(B)}{P(C)}=\frac{\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{41}{48}}=\frac{3}{16}\cdot\frac{48}{41}=\frac{9}{41}$$

Если житель - рыцарь (A), он никогда не соврет: ~~P~~ $P(\text{соврет}|A)=0$

Если житель - лжец (B), он соврет с вероятностью $\frac{1}{4}$.

: $P(\text{соврет}|B)=\frac{1}{4}$

Общая вероятность, что житель соврет на 3 вопрос:

$$P(\text{соврет})=P(\text{соврет}|A)\cdot P(A|C)+P(\text{соврет}|B)\cdot P(B|C)=0\cdot\frac{32}{41}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{41}=\frac{9}{164}$$

Ответ: $\frac{9}{164}$

Задача решена для случая, что лжец говорит правду с вер-тью $\frac{3}{4}$ вместо $\frac{1}{4}$.

M 11-140

№3

1) Центры трех шаров образуют равносторонний треугольник со стороной 2R (т.к шары соприкасаются). Высота треугольника $h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

2) Центр равностороннего треугольника находится на расстоянии $\frac{2}{3}h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ от каждого центра.

3) Пусть радиус четвертого шара — r. Его центр находится на высоте r над плоскостью. Расстояние от центра четвертого шара до центра каждого из трех шаров должно быть R+r

4) Вертикальное расстояние между центрами: R − r. Горизонтальное расстояние от центроида до центра четвертого шара: $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

По теореме Пифагора:

$$(R+r)^2 = \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (R-r)^2$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = \frac{4R^2}{3} + R^2 - 2Rr + r^2$$

$$2Rr = \frac{4R^2}{3} - 2Rr$$

$$4Rr = \frac{4R^2}{3}$$

$$r = \frac{R}{3}$$

Ответ: наибольший возможный радиус четвертого шара равен $\frac{R}{3}$

Случай 2: Один корень больше c, другой $b \le c$]

Пусть $x_1 > c$, $x_2 \in [b; c]$

$x_1 + x_2 = 2b-1$

$x_1 \cdot x_2 = b^2 - c$

Из $x_1 > c$ и $x_2 \le c$ следует, что $x_1 + x_2 > c$, т.е. $2b-1 > c$

$x_2 \ge b \Rightarrow x_1 + x_2 \ge b + x_1 > b + c$, но $x_1 + x_2 = 2b-1 \Rightarrow 2b-1 > b+c \Rightarrow$

$\Rightarrow b-1 > c$

Из $x_1 > c$ и $x_2 \le c$ следует, что $x_1 \cdot x_2 > c \cdot x_2$, но $x_2 \le c \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \ge c^2$, т.е. $b^2 - c > c^2 \Rightarrow b^2 > c^2 + c$

$x_1 > c$ и $x_2 \le c$ означает, что x_1 – больший корень, x_2 – меньший, $\Rightarrow$ $f(c) < 0$, где $f(x) = x^2 - (2b-1)x + (b^2 - c)$

$x_2 \ge b$

$f(c) = c^2 - (2b-1)c + (b^2 - c) = c^2 - 2cb + c + b^2 - c = c^2 - 2cb + b^2 =$

$= (c-b)^2 < 0$, но это невозможно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow b > 1$, $c > b$

Проверим, пусть $b = 2$, $c = 3$

$\sqrt{3-x} = x-2$

$3 - x = x^2 - 3x + 1$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_1 \approx 0,784 < 2$ (посторонний)

$x_2 \approx 2,236 \in [2,3)$ (подходит)

Ответ: ровно один полученный корень является корнем для исходного уравнения при $b > 1$ и $c > b$.

M 11-140

№2

$\sqrt{a-x} = x-b$

Допустимые значения лежат в промежутке $[b, a]$

$a-x\ge 0 \Rightarrow x\le a$

$x-b\ge 0 \Rightarrow x\ge b$

$a-x=(x-b)^2$

$a-x = x^2-2xb+b^2$

Пусть x_1 и x_2 - корни этого квадратного уравнения.

Рассмотрим возможные случаи:

- один корень меньше b, а другой в промежутке $[b, a]$
- один корень больше a, а другой в промежутке $[b, a]$

Случай 1: один корень меньше b, а другой в $[b, a]$. Пусть $x_1<b$, $x_2\in[b,a]$. Для квадратного уравнения $x^2-(2b-1)x+(b^2-a)=0$

по т. Виета $x_1+x_2=2b-1$

$x_1\cdot x_2=b^2-a$

Из $x_1<b$ и $x_2\ge b$ следует, что $x_1+x_2>b$, т.е. $2b-1>b \Rightarrow b>1$

$x_2\le a \Rightarrow x_1+x_2\le a+b \Rightarrow 2b-1\le a+b \Rightarrow b-1\le a$

$x_1<b$ и $x_2>b$ следует что $x_1\cdot x_2<b\cdot x_2$. но $x_2\ge b \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1\cdot x_2\le b^2$. т.е $b^2-a\le b^2 \Rightarrow a\ge 0$

$x_1<b$ и $x_2\ge b$ обозначает что x_1 - меньший корень, x_2 - больший. Тогда $f(b)<0$, где $f(x)=x^2-(2b-1)x+(b^2-a)$ (т.к b между корнями)

$x_2\le a$

$f(b)=b^2-(2b-1)b+(b^2-a)=b^2-2b^2+b+b^2-a=b-a<0 \Rightarrow a>b$

$x_2\le a$ $x_2=2b-1-x_1$, т.к $x_1<b \Rightarrow x_2>2b-1-b=b-1$, но как а.

$b>1$, $a>b$

№1

x_1 - кол-во листов, из которых Вовочка вырезал 2 снежинки

y_1 - кол-во листов из которых Вовочка вырезал 3 звездочки.

Тогда $x_1+y_1=n$ (общее кол-во)

x_2 - кол-во листов из которых Любочка вырезала 3 снежинки

y_2 - кол-во листов из которых Любочка вырезала 4 звездочки.

$x_2+y_2=n$

Общее кол-во снежинок: $2x_1+3x_2=26$

Общее кол-во звёздочек: $3y_1+4y_2=26$

$$y_1=n-x_1, \quad y_2=n-x_2 \Rightarrow 3(n-x_1)+4(n-x_2)=26$$

$$3n-3x_1+4n-4x_2=26$$

$$7n-3x_1-4x_2=26 \ (1)$$

$$2x_1+3x_2=20 \ (2)$$

(1) и (2):

$$x_1=\frac{20-3x_2}{2}$$

Подставим в (1)

$$7n-3\left(\frac{20-3x_2}{2}\right)-4x_2=26$$

$$7n-\frac{60-9x_2}{2}-4x_2=26 \quad |\cdot 2$$

$$14n-60+9x_2-8x_2=52$$

$$14n+x_2=112$$

$$x_2=112-14n \ (3)$$

$x_2 \le n$ (т.к. $x_2+y_2=n$)

Из (3): $x_2=112-14n \ge 0 \Rightarrow 112 \ge 14n \Rightarrow n \le 8$

$x_2 \le n \Rightarrow 112-14n \le n \Rightarrow 112 \le 15n \Rightarrow n \ge \frac{112}{15} \approx 7{,}47$

Т.к. n - целое $\Rightarrow n=8$

Найдем x_2 и x_1 при $n=8$

Из (3): $x_2=112-14\cdot 8=112-112=0$

Из (2): $2x_1+3\cdot 0=20 \Rightarrow x_1=10$

$x_1=10$, $n=8$, но $x_1+y_1=n \Rightarrow 10+y_1=8$, $y_1=-2$

Ответ: дома ошиблись в подсчетах. Система уравнений не имеет решений в целых неотрицательных числах, удовлетворяющих всем условиям задачи

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга

особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 133

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1000238

1	2	3	4	5	Σ
20	0	20	20	5	65

М11-133

Задача №1

Пусть каждому выдали N листов. Тогда пусть Вовочка вырезал x листов со снежинками и $N-x$ со звёздочками, а Любочка вырезала y листов со снежинками и $N-y$ со звёздочками

Тогда

Снежинок: $2x+3y=20 \longrightarrow x=\frac{20-3y}{2}$

Звёздочек: $3(N-x)+4(N-y)=26$

$7N-3x-4y=26$

$7N-3\cdot\frac{20-3y}{2}-4y=26$

$14N-60+9y-8y=52$

$14N+y=112$

Значит $y=112-14N$

чем больше N тем меньше y.

из $2x+3y=20$ мы можем понять, что $y\le 2$

При $N>8$ $y<0$

При $N=8$ $y=0$, а $x=10$, т.е. $x>N$, чего не может быть

При $N=7$ $y=14$, но $y\le 2$, т.е. $N>7$, но $N>7$ решений нет

Значит они ошиблись в расчетах

Ответ: да, они ошиблись.

Задача №2

$\sqrt{a-x} = x - b$ ОДЗ: $a - x \geq 0$

≥ 0, то $x - b \geq 0 \Rightarrow x \geq b$ $x \leq a$.

т.е. $x \in [b; a]$. и $b < a$.

$a - x = (x - b)^2$

$x^2 - 2bx + b^2 + x - a = 0$ $f(x) = x^2 - 2bx + b^2 + x - a$

Квадратное уравнение даёт 2 корня, если $D > 0$

Один из корней будет лишним, если

$f(b) < 0$, а $f(a) > 0$ или если $f(b) > 0$, а $f(a) < 0$

т.к. это парабола с ветвями вверх.

$$\begin{cases} D > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(b) < 0 \\ f(a) > 0 \end{cases} ① \\ \begin{cases} f(b) > 0 \\ f(a) < 0 \end{cases} ② \end{array}\right. \end{cases}$$

① $\begin{cases} f(b) < 0 \\ f(a) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 - 2b^2 + b^2 + b - a < 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 + a - a > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b - a < 0 \\ (a-b)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \neq b,\ b < a$

② $\begin{cases} f(b) > 0 \\ f(a) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a > 0 \\ (a - b)^2 < 0 \end{cases}$ решений нет.

$x^2 - x \cdot (2b - 1) + (b^2 - a)$

$D = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 + 4a = 4a - 4b + 1.$

$4a - 4b + 1 > 0$ $b - a < -0,25 \Rightarrow a - b > 0,25$

То есть это возможно при таких a и b, что $a - b > 0,25$

Ответ $a - b > 0,25$.

M11-133

Задача №3

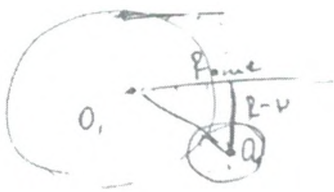
Пусть центры трех больших шаров это O_1; O_2 и O_3 лежат в горизонтальной плоскости α на высоте R от осн. плоскости. причем α параллельна осн. плоскости
Т.к. они касаются, то

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2R$ (расстояния между центрами)

Пусть r - искомый радиус, а O_4 - его центр. Из соображений симметрии, центр O_4 должен находиться в вертикальной оси, перпендикулярной α и проходящей через центр равностороннего треугольника $O_1O_2O_3$. Т.к. он касается осн. плоскости, то его центр находится на высоте r. Центры больших - на R.
Расстояние от центра равностороннего треугольника до любой его вершины равно $R_{опис}$ и равно:

$$R_{опис} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$, где a - сторона треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный
Гипотенуза - O_1O_4, т.к. шары касаются, то $O_1O_4 = R+r$
Верт. катет: Разность высот центров $|R-r|$, т.к. $r<R$, то $R-r$
Гор. катет: $R_{опис} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$



Тогда по т. Пифагора

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{4R^2}{3}$$

$$2Rr = -2Rr + \frac{4R^2}{3}$$

$$4Rr = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

Ответ: $R/3$.

Задача № 4

$\frac{2}{3}$ - рыцари , то $\frac{1}{3}$ - лжецы.

Вероятность:

Если это рыцарь , то 1

Если лжец $(0,25)^2 = 0,0625$

$$P = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,0625 = \frac{33}{48}$$

Вероятность, что он лжец:

$$P(L) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,0625}{\frac{33}{48}} = \frac{1}{33}$$

Тогда вероятность, что он солжёт на третий вопрос:

$$P = \frac{1}{33} \cdot 0,75 = \frac{1}{44}$$

Ответ: 1/44.

M11-133

Задача № 5

$P(x)$ при некотором натуральном k удовлетворяет тождеству

$$x \cdot P'(x) = k \cdot (P(x+1) + P(x-1))$$

а) Рассмотрим функцию $Q(x) = P(x) - P(-x)$

Это нечётная часть многочлена, докажем, что $Q(x) \equiv 0$

Подставим $(-x)$ вместо x ~~$-x$~~ в исходное тождество

$$(-x) P'(-x) = k(P(1-x) + P(-1-x))$$

Вычтем это из исходного

~~$(-x)P'(-x) = k(P(1-x) + P(-1-x$~~

$$x P'(x) + x P'(-x) = k(P(x+1) - P(-1-x) + P(x-1) - P(1-x))$$

$$x(P'(x) + P'(-x)) = k(Q(x+1) + Q(x-1))$$

$Q'(x)$ – чет

$$x Q'(x) = k(Q(x+1) + Q(x-1))$$

$x Q'(x)$ – нечет

$Q(x)$ – нечетный многочлен. левая часть – чет. функция

правая сумма знач. нечет функции

то есть нечетная

Четная = нечетная.

Значит обе части тождественно равны нулю,

т. е. $Q(x) \equiv 0$

Значит $P(x)$ – четная функция.

Подставим $x = 0$ в исходное ~~тожде~~ тождество

$$0 \cdot P'(0) = k \cdot (P(0+1) + P(0-1))$$

$0 = k(P(1) + P(-1))$, т.к. $P(x)$ - четная, то $P(-1) = P(1)$

$0 = 2kP(1)$), т.к. k - натуральное, то $k \neq 0$, то

$P(1) = 0$

Ответ: 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 131

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1089682

1	2	3	4	5	Σ
10	10	20	0	20	60

№1

M11-131

a листов каждому

В: m листов (по 2 сн.) и (a−m) листов (по 3 зв.)

Л: n листов (по 3 сн.) и (a−n) листов (по 4 зв.)

20 снежинок и 26 звёздочек ⇒

$m, n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{Z}$

~~2m + 3(a − m)~~

$2m + 3n = 20$

$3(a-m) + 4(a-n) = 26$

$2m + 3n = 20$

$7a = 26 + 3m + 4n$

$\underset{\vdots 2}{2m} + 3n = \underset{\vdots 2}{20} \Rightarrow 3n \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow n = 2n_1$

$2m + 6n_1 = 20 \mid : 2$

$m + 3n_1 = 10$

$m = 10 - 3n_1$

$7a = 26 + 3(10 - 3n_1) + 8n_1 = 26 + 30 - n_1 = 56 - n_1$

$\underset{\vdots 7}{7a} = \underset{\vdots 7}{56} - n_1 \Rightarrow n_1 \vdots 7 \Rightarrow n_1 = 7n_2$

$7a = 56 - 7n_2$

$a = 8 - n_2$

$n = 2n_1 = 2 \cdot 7n_2 = 14n_2$

$m = 10 - 21n_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{10}{21} \geq n_2$ целое $\Rightarrow n_2 = 0 \Rightarrow m = 10$

$a = 8$,

~~a =~~ 40

$m \leq a$ (очевидно)

$10 \leq 8$ – противоречие ⇒

Ошиблась

Ответ: ошиблась

№2

$\sqrt{a-x}=x-b$

$a-x=(x-b)^2$ ← корни x_1 и x_2

пусть x_2 - лишний, x_1 - подходит.

тогда $x_1-b\geq 0$ $\quad x_1\geq b$

$x_2-b<0$ $\quad x_2<b$

$a-x=x^2-2bx+b^2$

$x^2-2bx+x+b^2-a=0$

$x^2+x(1-2b)+b^2-a=0$

$D=(1-2b)^2-4(b^2-a)=1+\cancel{4b^2}-4b-\cancel{4b^2}+4a=$

$=4a-4b+1>0$ (т.к. 2 корня)

$x_1=\dfrac{2b-1+\sqrt{D}}{2}$ $\quad \to x_1\geq x_2 \Rightarrow$ $\quad \dfrac{2b-1+\sqrt{D}}{2}\geq b$

$x_2=\dfrac{2b-1-\sqrt{D}}{2}$ $\quad \dfrac{2b-1+\sqrt{D}}{2}\geq\dfrac{2b-1-\sqrt{D}}{2}$ $\quad \dfrac{2b-1-\sqrt{D}}{2}<b$

$\sqrt{D}\geq 0$

$2b-1+\sqrt{D}\geq 2b$ $\quad \sqrt{D}\geq 1\to D\geq 1$

$2b-1-\sqrt{D}<2b$ $\quad -1<\sqrt{D}$ - верно всегда

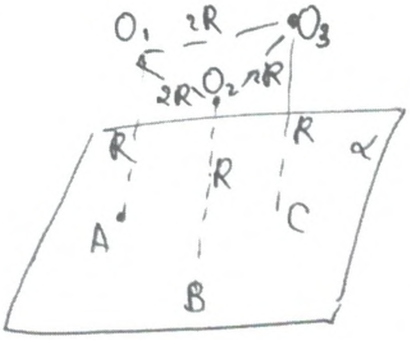
$4a-4b+1\geq 1$

$a\geq b.$

Ответ: a и b такие, что $a\geq b$

M11-131

№3

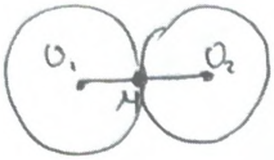


O_1, O_2, O_3 — центры шаров

α — горизонтальная плоскость, на которую они положены

A, B, C — основания перпендикуляров из O_1, O_2, O_3 на α ⇒

$AO_1 = BO_2 = CO_3 = R$

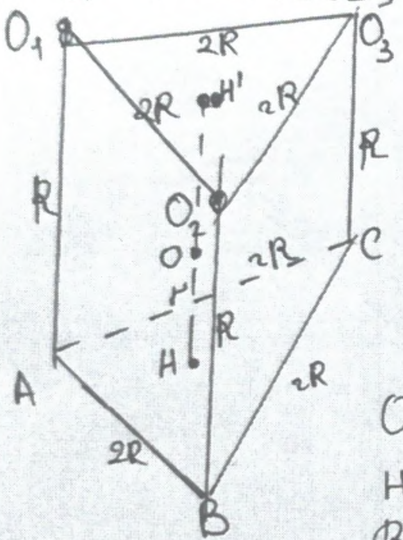


$\Rightarrow O_1M = MO_2 = R \Rightarrow$

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2R \Rightarrow$

$AB = BC = AC = 2R$

$\Rightarrow ABCO_1O_2O_3$ — правильная прямая призма



Четвёртый шар лежит в полости между тремя шарами и α.

его радиус $= r$.

$\max(r)$ достигается, когда он касается всех трёх шаров и α.

пусть его центр O.

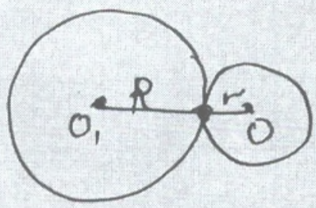
Отметим H и H' — центры $\triangle ABC$ и $\triangle O_1O_2O_3$

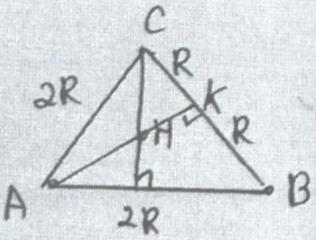
$HH' \perp (ABC)$ и $(O_1O_2O_3)$

В силу симметрии: $O \in HH'$.

шар касается $(ABC) \Rightarrow OH = r$

$O_1O = O_2O = O_3O = R + r$





$CK = BK = R$,

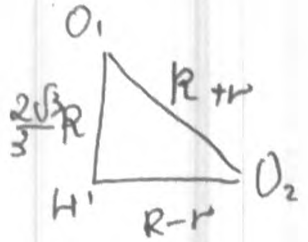
$AK = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3}R$, H — т. пересечения медиан ⇒

$AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

$AH = O_1H' = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$, $HH' \perp (O_1O_2O_3) \Rightarrow HH' \perp O_1H'$

$H'O = R - r$

№3 (продолжение)



$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2+(R-r)^2=(R+r)^2$$

$$\frac{4}{3}R^2+R^2\cancel{+r^2}-2Rr=R^2\cancel{+r^2}+2Rr$$

$$\frac{4}{3}R^2=4Rr$$

$$\frac{R^2}{3}=Rr \qquad R=3r$$

$$\cancel{R=}\ r=\frac{R}{3}$$

Ответ: $\frac{R}{3}$

№4 M11-131

$\frac{2}{3}$ m – жителей

$\frac{2}{3}$ m – рыцари (никогда не лгут)

$\frac{m}{3}$ – лжецы (лгут в 75% случаев)

Произвольно выбранный житель ответил правду на два вопроса.

если он окажется рыцарем вероятность $= \dfrac{\frac{2}{3}m}{m} = \frac{2}{3}$, то на 3 вопрос он скажет правду.

Ответ: 0,25

если он окажется лжецом вероятность этого $= \frac{1}{3}$ вероятность того, что он солжёт $= \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

$\ominus$

№5

$X \cdot P'(x) = k\left(P(x+1) + P(x-1)\right),\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \neq 0$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$P'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1}(n-1) x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$

$X \cdot P'(x) = a_n \cdot n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x^2 + a_1 x$

$(P(x+1) + P(x-1)) \cdot k = k \cdot \left(a_n(x+1)^n + a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \ldots + a_2(x+1)^2 + a_2(x-1)^2 + a_1(x+1) + a_1(x-1) + 2a_0\right)$

рассмотрим сумму

$a_i(x+1)^i + a_i(x+1)^i = a_i\left((x+1)^i + (x-1)^i\right)$

• i - чётное ~~все коэф~~ будут только чётные степени

нечётные сократятся, т.к.

$\cancel{x^{2k+1} = x^{\text{неч}} \cdot 1^{\text{чет}}}$

~~или~~

$\cancel{x^{2k+1} = x^{\text{чет}} \cdot 1^{\text{неч}}}$

x^{2k+1}

$1 \quad 1$

$\cancel{x^{2l+1} \cdot 1}$ $\quad$ $\cancel{x^{\text{неч}} \cdot 1^{\text{неч}}}$ ~~или~~

$x^{2k+1} \Rightarrow x^{2k+1} \cdot 1^{i-(2k+1)}$ - неч $= x^{2k+1}$

$x^{2k+1} \Rightarrow x^{2k+1} \cdot (-1)^{i-(2k+1)}$ - неч $= -x^{2k+1}$

сократятся

Аналогично

• i - нечётное будут только неч. степени

$x^{2k} \Rightarrow x^{2k} \cdot 1^{i-2k}$ - неч $= x^{2k}$

$x^{2k} \to x^{2k} \cdot (-1)^{i-2k}$ - неч $= -x^{2k}$

сократятся.

расмотрим коэффициент перед x^n

$X \cdot P'(x)$: $a_n \cdot n$

$k \cdot (P(x+1) + P(x-1))$: $k \cdot 2a_n$

$\Rightarrow a_n \cdot n = 2ka_n$

т.к. это первый коэф

$a_n \neq 0 \Rightarrow n = 2k$

n - чётное

$\sqrt{5}$ М11-131

Будем смотреть только на x^{2n+1}:

$a_{n-1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-1}+a_{n-3}(n-3)x^{n-3}+a_{n-5}(n-5)x^{n-5}+\ldots$

$+3a_3x^3+a_1\cdot x=$

$a_{n-2},\ a_{n-4}$ — ?

$k\cdot\big(a_{n-1}(x+1)^{n-1}+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+a_{n-3}(x+1)^{n-3}+a_{n-3}(x-1)^{n-3}+$

$+a_{n-5}(x+1)^{n-5}+a_{n-5}(x-1)^{n-5}+\ldots+a_3(x-1)^3+a_3(x+1)^3+$

$+a_1(x+1)+a_1(x-1)\big)$

Посмотрим на коэф. перед x^{n-1}

$a_{n-1}(n-1)=k\cdot 2a_{n-1}$ (его можно получить только из $a_{n-1}(x+1)^{n-1}$ и $a_{n-1}(x-1)^{n-1}$; все ост. скобки меньше)

если $a_{n-1}\neq 0$

$n-1=2k$

$2k-1=2k$ — противоречие $\Rightarrow$

$a_{n-1}=0$, аналогично будем ~~a_{n-3}, т.к.~~

рассматривать коэф. перед x^{n-3} — наиб. на данный момент, получим

$a_{n-3}(n-3)=k\cdot 2a_{n-3}$

если $a_{n-3}\neq 0$

$n-3=2k$

$\underbrace{2k}_{2k-3}\Rightarrow a_{n-3}=0$

Т.е. $a_p\cdot p=k\cdot 2a_p$

$a_p\neq 0\to \underbrace{p}_{\text{нечетно}}=2k\to a_p=0$

$\Rightarrow$ получили, что все коэффициенты перед нечётными степенями $=0\Rightarrow$ все степени чётные $x^{2q}=(-x)^{2q}$ и так со всеми степенями

$\Downarrow$

$P(x)=P(-x)\to$ что $P(x)$ — чётн.

№5

б) $P(x)$ - четная

$x \cdot P'(x) = k \cdot (P(x+1) + P(x-1))$

подставим $x = 0$

$0 = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{k} \cdot (P(1) + P(-1)) \Rightarrow$

$P(1) + P(-1) = 0$

$P(-1) = P(1)$ (чётная ф-ция) $\Rightarrow$

$2P(1) = 0$

$P(1) = 0$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$\underset{\substack{\| \\ 0}}{P(1)} = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ — сумма коэф.

Ответ: 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	M11 - 129

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1094940

М11-129

Задача № 4

Во-первых, чтобы человек солгал, он должен быть лжецом. т.к. он уже сказал две правды, нас интересует только то, что он скажет следующим, те две правды не учитываются.

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}25$$

Ответ: 0,25

$\ominus$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	5	65

Задача № 5

$$x \cdot P'(x) = k \cdot (P(x+1) + P(x-1))$$

Для начала решим б.

$x \to 0.$

$0 \cdot P'(0) = k \cdot (P(1) + P(-1))$, из четности следует, что $P(-1) = P(1)$

$0 = 2 \cdot k \cdot P(1)$, т.к. $k \in \mathbb{N}$, $P(1) = 0$

Ответ: 0

а) $$x = \frac{k \cdot (P(x+1) + P(x-1))}{P'(x)} = f(x)$$

$x \to -x$

$$-x = \frac{k \cdot (P(-(x-1)) + P(-(x+1)))}{P'(-x)}$$

$$x = -\frac{k \cdot (P(-(x-1)) + P(-(x+1)))}{P'(-x)} = \frac{k \cdot (P(x+1) + P(x-1))}{P'(x)}$$

$$P(-(x-1)) + P(-(x+1)) = P(x-1) + P(x+1)$$

С другой стороны $P(-(x-1)) - P'(-x) = P(x-1) + P'(x)$

$P(-(x+1)) - P'(-x) = P(x+1) + P'(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-(x-1)) = P(x-1) \\ P(-(x+1)) = P(x+1) \\ P'(-x) = -P'(x) \end{cases} \Rightarrow P(x) \text{ - чётно}$$

ч.т.д.

?

$D = 4a - 4b + 1 = 0.$

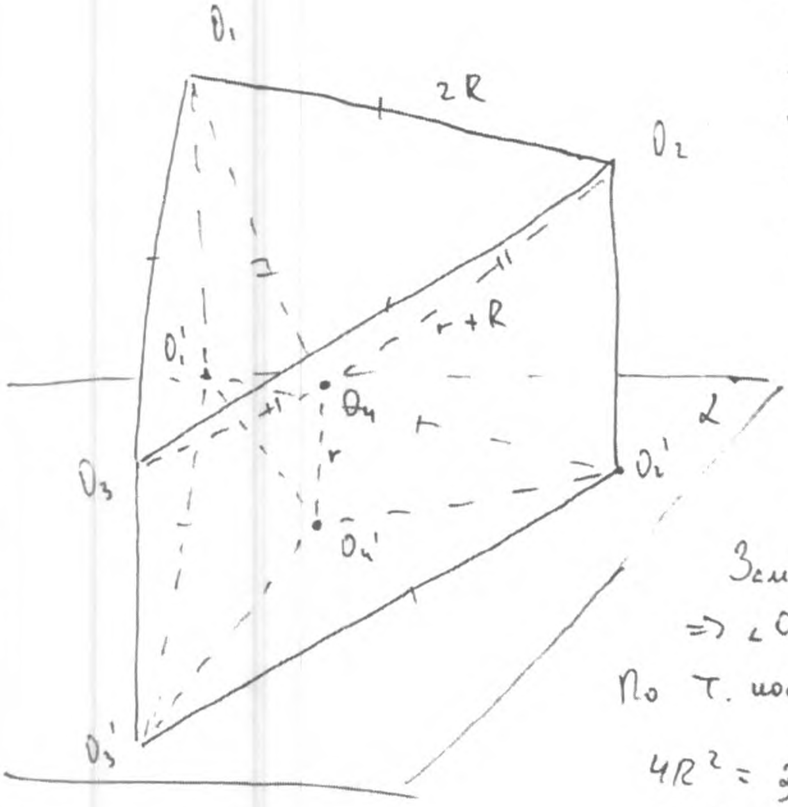
$a - b = -\frac{1}{4}$

$b - a = \frac{1}{4}.$

Ответ: при $a \geqslant b$ либо $b = a + \frac{1}{4}$

Задача № 3

Для удобства не буду рисовать сами сферы, только их центры. O_1, O_2, O_3 для 3-х сфер радиуса R. и O_4 для сферы, лежащей в полосе, пусть её радиус — r.



Точки O_1', O_2', O_3', O_4' — точки касания окружностей с подходящими центрами с плоскостью, назовём её α, т.е. проекции на эту плоскость.

Сферы касаются $\Rightarrow O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3 = 2R$, $O_4O_1 = O_4O_2 = O_2O_3 = r + R$.

При этом $O_1O_2 = O_1'O_2'$, $O_3O_2 = O_3'O_2'$

$O_1O_3 = O_1'O_3'$. $O_4O_4' = r$

Заметим, O_4' - центр $\triangle O_1'O_2'O_3' \Rightarrow$

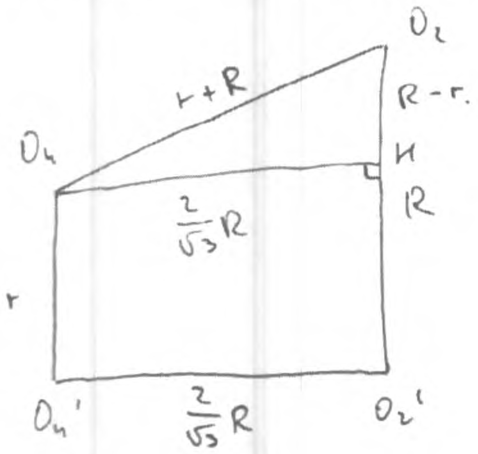
$\Rightarrow \angle O_1'O_4'O_2' = 120°.$

По т. косинусов: $O_1'O_2'^2 = O_1'O_4'^2 + O_4'O_2'^2 - 2 \cdot O_1'O_4' \cdot O_4'O_2' \cdot \cos 120$

$4R^2 = 3O_1'O_4'^2 \; (O_1'O_4' = O_4'O_2' = O_4'O_3')$

$O_1'O_4' = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R$

Рассмотрим трапецию $O_4O_2O_2'O_4'$. Опустим перпендикуляр O_4H на O_2O_2'



$O_4H = O_4'O_2' = \frac{2}{\sqrt{3}}R.$ $O_2H = O_2O_2' - O_4'O_4 = R - r$

Заметим, r - однозначно.

Т. Пифагора:

$O_4O_2^2 = O_2H^2 + O_4H^2$

$(r+R)^2 = (R-r)^2 + \frac{4}{3}R^2$

$r^2 + R^2 + 2rR = R^2 + r^2 - 2Rr + \frac{4}{3}R^2$

$4Rr = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3}R$

Ответ: $\frac{1}{3}R$

Задача №1

Пусть у ребят по m листов

Вова потратил a листов на снежинки и b листов на звездочки

Люба потратила c листов на снежинки и d листов на звездочки

$a+b=c+d=m$, $m\in\mathbb{N}$, $a,b,c,d\in\mathbb{N}_0$

Получается, что

$$2a+3c=20 \Rightarrow a=10-\frac{3}{2}c$$
$$3b+4d=26 \Rightarrow b=\frac{26-4d}{3}$$

$$10-\frac{3}{2}c+\frac{26-4d}{3}=c+d$$

$$60-9c+52-8d=6c+6d$$

$$112=15c+14d$$

Заметим, что $112 \vdots 14$, $14d \vdots 14$, $15c \underset{14}{\equiv} c \Rightarrow c \vdots 14$.

Если $c>0$, то $2a+3c>20$. Если $c=0$, то $a=10$.

$10+b=d \Rightarrow d\geqslant 10$

Тогда $3b+4d\geqslant 40>26$.

Значит, они ошиблись в подсчётах.

Ответ: ошиблись.

Задача №2

$\sqrt{a-x}=x-b$. Сначала заметим, у уравнения есть 1 корень при $a\geqslant b$, иначе нет корней.

I $a\geqslant b$, 1 корень.

У уравнения $a-x=(x-b)^2$ точно будет этот 1 корень. Нужно найти a и b при которых у уравнения будет 2 корня, 1 будет не подходить под первое ур.

$$a-x=x^2+b^2-2xb$$

$$x^2-x(2b-1)+b^2-a=0$$

$$D=(2b-1)^2-4(b^2-a)>0$$

$$4b^2-\cancel{2}4b+1-4b^2+4a>0$$

$$4a-4b+1>0.$$

Верно при всех $a\geqslant b$.

II $a<b$, у $\sqrt{a-x}=x-b$ нет корней, нужно найти a и b при которых $a-x=(x-b)^2$ будет 1 корень, т.е. когда $x^2-x(2b-1)+b^2-a$ — полный квадрат

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	M11 - 121

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1278211

M11-121

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	5	85

№1

Вовочка $\to$ $2k$ снежинок, $3m$ звёздочки

Любочка $\to$ $3n$ снежинки, $4f$ звёздочки

k, m, n, f – целые числа, определяют кол-во бумажек затр. на фигуры

Рассмотрим сумму звёздочек:

$3m + 4f = 26$, т.к. m и f целые число, то:

$$\left[\begin{array}{l} m = 2;\ f = 5 \\ m = 6;\ f = 2 \end{array}\right.$$

Рассмотрим сумму снежинок:

$2k + 3n = 20$

$k = 10$ $n = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} k = 7; & n = 2 \\ k = 4 & n = 4 \\ k = 1 & n = 6 \end{array}\right.$$

Среди пар $(m; f)$ и $(k; n)$ нужно выбрать такие, чтобы $m + k = f + n$ т.к. видом одинаковое кол-во бумаги.

Самая близкая пара $k = 1$; $n = 6$; $m = 6$; $f = 2$, но $m + k = f + n$ не достигается в любых сочетаниях $\Rightarrow$ ошибка в подсчётах

Ответ: ошибка

1

№2

$\sqrt{a-x} = x - b$; $x \geq b$, $x \leq a$

$x \in [b; a]$

$(a-x) = (x-b)^2$

$x^2 - 2bx + b^2 = a - x$

$x^2 + (1-2b)x + b^2 - a = 0$

После возведение в квадрат потеряно условие $x - b \geq 0$. Если $x < b$, то он не будет. находи уравнение

$D = 4(a-b)+1$

$x_{1,2} = \frac{2b-1 \pm \sqrt{D}}{2}$; $D > 0$; x_2 (с "+") $\geq x_1$ (с "–")

Всегда ли ~~x<b~~:

$\frac{2b-1-\sqrt{D}}{2} < b$

$\sqrt{D} > -1$ – всегда $\Rightarrow$ x_1 всегда меньше b $\Rightarrow$ всегда посторонний.

Условие $x_2 \geq b$

$\frac{2b-1+\sqrt{D}}{2} \geq b$

$2b-1 \geq 2b - \sqrt{D}$

$\sqrt{D} \geq 1$

$4a-4b+1 \geq 1 \Rightarrow a \geq b$ – и есть условие ОДЗ $\Rightarrow$ при $a \geq b$; $x_2 \geq b$

(2)

M11-121

№2 (продолжение)

Условие: $x_2 \le a$

$$\frac{2b-1+\sqrt{D}}{2} \le a$$

$t = a - b \ge 0$

$D = 4t + 1$

$$-1+\sqrt{4t+1} \le 2t$$

$\sqrt{4t+1} \le 2t + 1$

$t > 0 \Rightarrow$:

$4t + 1 \le 4t^2 + 4t + 1$

$0 \le 4t^2$ – нер-во верно для всех $t \in R$, значит и при $t \ge 0$

значит, при $a \ge b$ всегда $x_2 \le a$

значит для любых $a \ge b$:

$D > 0$

$x_1 < b$ – посторон.

$x_2 \in [b; a]$

3

Если $D = 0$, то $a = b - \frac{1}{4}$, т.к. $a < b$ / не подходит по ОДЗ $\Rightarrow$ единств. и именно корня не существует

Ответ: любое число $a \ge b$

№3

Т.к. все шары (R) одинаковые, то рассмотрим один большой и 1 маленький:

1) Шары касаются друг друга => образуют равностор. Δ со стороной 2R
2) Расстояние между центром малого шара и центром большого (горизонт.)

$= \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Вертикальное: $R - r$

полное: $R + r$, т.к. шары соприкасаются

По Т. Пифагора:

$$(R+r)^2 = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R-r)^2$$

$$4Rr = \frac{4R^2}{3}$$

$$12r = 4R$$

$$r = \frac{R}{3}$$

Ответ: $r = \frac{R}{3}$ – max, при касании малого с большим

4

М11-121

№4

Рыцари (K) – говорят правду

Лжецы (L) – лгут с вер. 0,75

Вероятность ответить правду на 2 вопроса:

$P(R_1, R_2 | L) = (0,25)^2$

$P(R_1, R_2 | K) = 1$

По формуле Байеса

$P(R_1, R_2) = P(R_1, R_2 | A) P(A) + P(R_1, R_2 | B) P(B) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (0,25)^2 = \frac{2}{3} + \frac{0,0625}{3} =$

$= 0,6875$

$P(A | R_1, R_1)$ – вероятность, что ~~на~~ 2 вопроса отвечал ~~лжец~~ рыцарь: $= \frac{\frac{2}{3}}{0,6875} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{16}} = \frac{32}{33} =$

$\Rightarrow P(B | R_1, R_2) = \frac{1}{33}$

Вероятность солгать на 3 вопрос: $P(B | R_1, R_2) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{44}$

Ответ: $1/44$

+

5

№5

$$xP'(x)=k\left(P(x+1)+P(x-1)\right)$$

а) Если $P(x)$ - четная ф-я, то $P(x)=P(-x)$

Подставим $-x$

$$-x\,P'(-x)=k\left(P(1-x)+P(-(x+1))\right)$$

Расс-им

$$Q(x)=P(-x)$$

$$Q'(x)=-P'(-x)$$

$$xQ'(x)=k\left(Q(x-1)+Q(x+1)\right)$$ ↑ удовлетв. исходному уравн. $\Rightarrow P(-x)=P(x)$. Что?

?

б) $P(1)$

Подставим $P(0)$.

$$0=k\left(P(1)+P(-1)\right)=k\cdot 2P(1)$$ т.к. функция четная

k - нат. число $\Rightarrow$ $P(1)=\frac{0}{2k}=0$

Ответ: 0

6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 61

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1180891

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	20	0	70

М11-61

№1 ~~Пусть~~ N — кол-во листов у каждого из ребят

Пусть x — кол-во листов, которые Вовочка потратил на снежинки. Тогда он потратил $N-x$ листов на звездочки

Пусть y — кол-во листов, которые Любочка потратила на снежин, тогда $N-y$ листов она потратила на звездочки. Выходит $x \le N$, $y \le N$

По условию: $\begin{cases} \cancel{3}^{2}x + 3y = 20 \\ 3(\cancel{x}N-x) + 4(N-y) = 26 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ 3N - 3x + 4N - 4y = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ 7N - 3x - 4y = 26 \end{cases}$

$x = \frac{20-3y}{2}$; $3y = 20 - 2x = 2(10-x) \Rightarrow 3y \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2$

Переберём значения для y: 1) $y=0 \Rightarrow x = 10$

2) $y = 2 \Rightarrow x = 7$ 3) $y = 4 \Rightarrow x = 4$ 4) $y = 6 \Rightarrow x = 1$

5) $y = 8 \Rightarrow x = -2$ — !? $(x \ge 0)$

Дальше рассматривать y нет смысла, так как x при увеличении y уменьшается

1) $y=0$; $x=10$: $7N = 26 + 3x + 4y \Rightarrow N = \frac{26+3x+4y}{7}$

$N = \frac{26+30}{7} = 8$ — подходит, но $x > N$ — !?

2) $y=2$; $x=7$: $N = \frac{26+21+8}{7} = \frac{55}{7}$ — не подходит $(N \in \mathbb{N})$

3) $y=4$; $x=4$: $N = \frac{26+12+16}{7} = \frac{54}{7}$ — не подходит $(N \in \mathbb{N})$

4) $y=6$; $x=1$: $N = \frac{26+3+24}{7} = \frac{53}{7}$ — не подходит $(N \in \mathbb{N})$

~~Ничего~~ Выходит что они ошиблись, так как такое кол-во снеж. и звездочек невозможно сделать ~~ни в~~ ~~случаев~~ ~~для их~~

Ответ: они ошиблись.

№ 2 $\sqrt{a-x} = x - b$

ОДЗ: $\begin{cases} a - x \geq 0 \\ x - b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \\ x \in [b; a] \end{cases}$

$a - x = (x-b)^2$

$a - x = x^2 - 2xb + b^2$

$x^2 + x(1-2b) + b^2 - a = 0$

$D = (1-2b)^2 - 4(b^2-a) = 1 - 4b + 4b^2 - 4b^2 + 4a =$
$= 4(a-b) + 1$

По условию нужно, чтобы один корень был лишним, а значит у кв. ур-ния есть два корня, один из которых подходит $\Rightarrow$ (иначе не подходили бы двак.)

$\Rightarrow a \geq b$ (иначе не подходили бы двак.)

При $a \geq b$ $D > 0$ — верно

Пусть x_0 — корень квадр. ур-ния и у изнач. ур-ния

тогда $a - x_0 = (x_0 - b)^2 \Rightarrow \sqrt{a - x_0} = |x_0 - b|$

$x_0 \leq a$; $x_0 - b \geq 0$ (иначе x_0 не был бы корнем ур-ния $\sqrt{a-x} = x_0 - b$)

$x_0 \in [b; a]$

Пусть $x_1 < x_2$ — корни кв. ур-ния

$$x_{1,2} = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{4(a-b)+1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2b - 1 - \sqrt{4(a-b)+1}}{2}$$

$$x_1 - b = \frac{2b - 1 - \sqrt{4(a-b)+1}}{2} - \frac{2b}{2} = -\left(\frac{1 + \sqrt{4(a-b)+1}}{2}\right) < 0 \Rightarrow$$

x_1 всегда $< b \Rightarrow x_1$ всегда ~~не~~ не является корн. изнач. ур-ния

~~хэа~~ $x_2 - \cancel{b}\,a - \dfrac{-1 + \sqrt{4(a-b)+1}}{2}$; $\sqrt{4(a-b)+1} > 1$, N11-61

$$x_2 - a = \frac{2b - 2a - 1 + \sqrt{4(a-b)+1}}{2}$$

Пусть $k = a - b \geq 0$

$$x_2 - a = \frac{-2k - 1 + \sqrt{4k+1}}{2}$$

Докажем, что $\frac{-2k-1+\sqrt{4k+1}}{2} \overset{\leq}{\cancel{\geq}} 0$

$$-2k - 1 + \sqrt{4k+1} \overset{?}{\leq} 0$$

$$\underbrace{\sqrt{4k+1}}_{\geq 0} \overset{?}{\leq} \underbrace{2k+1}_{\geq 0} \xrightarrow{\wedge 2} 4k+1 \overset{?}{\leq} 4k^2+4k+1$$

$$4k \overset{?}{\leq} 4k^2 + 4k$$

$4k^2 \overset{?}{\geq} 0$ — верно всегда, доказано

А значит $x_2 - a \leq 0 \Rightarrow x_2 \leq a$

$x_2 - b = \frac{-1+\sqrt{4(a-b)+1}}{2}$; $\sqrt{4(a-b)+1}$ при $a \geq b$ всегда $\geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-1+\sqrt{4(a-b)+1}}{2} \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq b$$

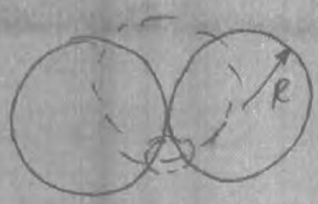
Выходит при $a \geq b$ $x_2 \in [a;b]$, а $x_1 \notin [a;b]$

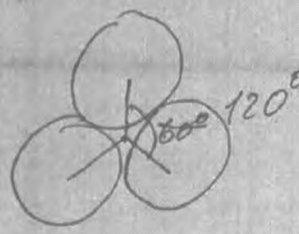
а значит при $a \geq b$ всегда меньший корень кв. ур-ния не будет подходить к изнач., а больший — будет.

Ответ: при $a \geq b$.

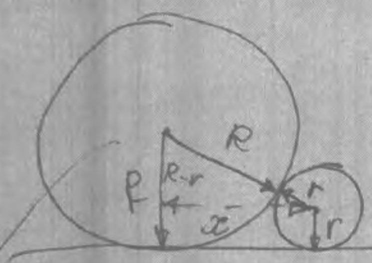
Пусть N — кол-во листов ...
x — кол-во листов, ... снежинки. Тогда он ...

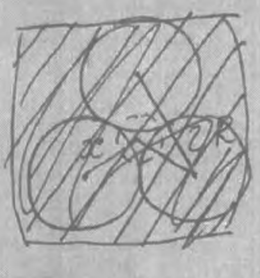
№3 Дано: R

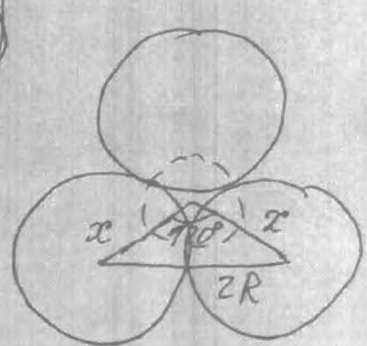


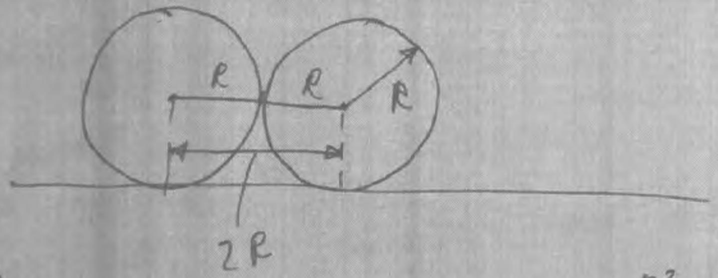


При максимальновозможном радиусе малого шара он касается всех трёх больших









$$4R^2 = x^2 + x^2 - 2\cos 120^\circ x^2$$

$$4R^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

По т. Пифагора $(R+r)^2 = (R-r)^2 + x^2$

$$(R+r-(R-r))(R+r+R-r) = x^2$$

$$2r \cdot 2R = x^2 \Rightarrow 4r = \frac{x^2}{R} \Rightarrow r = \frac{x^2}{4R} = \frac{\frac{4}{3}R^2}{4R} = \boxed{\frac{R}{3}}$$

Ответ: $R/3$

М11 -

лассов,

4 $\frac{2}{3}$ — Рыцари ; Лжец говорит правду ~~в 25~~ с вероятностью 0,25 М11-61

Вероятность того, что случайновыбранный житель скажет правду два раза, равна

$P(2\ правда) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0{,}25^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{48}$

Вероятность того, что случайновыбранный житель — лжец, который сказал правду два раза, равна $\frac{1}{3} \cdot 0{,}25^2 = \frac{1}{48}$

Значит, вероятность того, что выбранный житель, который 2 раза сказал правду, окажется лжецом, равна $\dfrac{1/48}{\frac{2}{3} + \frac{1}{48}} = \frac{1}{33}$

Чтобы этот житель сказал ложь на третий вопрос, он как ми обязан быть лжецом то есть

$P(3в - ложь) = \frac{1}{33} \cdot 0{,}75 = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{44}}$

Ответ: $\frac{1}{44}$

№5 $\quad xP'(x) = k\left(P(x+1) + P(x-1)\right)$; $k \in \mathbb{N}$

а) Пусть $T(x) = P(-x)$ $\qquad -xP'(-x)$

$xT'(x) = -xP'(x)$

$k\left(T(x+1) + T(x-1)\right) = k\left(P(-x-1) + P(-x+1)\right) =$

$= k\left(P(-(x+1)) + P(-(x-1))\right)$

$(-x)P'(-x) = k\left(P(-x+1) + P(-x-1)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -xP'(-x) = k\left(P(-(x-1)) + P(-(x+1))\right)$

Выходит, $xT'(x) = k\left(T(x+1) + T(x-1)\right)$

А значит $P(x)$ — чётная, ч.т.д.

Почему?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ
ЭКОНОМИЧЕСКАЯ
ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 30

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 916067

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М 11-30 (заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	0	15	20	5											60
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика (профиль олимпиады) 11 (класс участия)

Задача 4:

$\frac{2}{3}$ - рыцари $\frac{1}{3}$ - лжецы

лжецы говорят правду с $1-0,75=0,25$ вероятностью

Тогда $=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0,25=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

Событие A - правда на первые 2 вопроса

$P(A)=\underset{\uparrow\text{ рыцарь}}{\frac{2}{3}}\cdot 1+\underset{\uparrow\text{ лжец}}{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{48}=\frac{11}{16}$

Событие B - лжец, правда на 2 вопроса

$P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{1}{64}$

событие C - лжец говорит правду на 2 вопроса, и врет на 3

$P(C)=\frac{1}{64}:\frac{11}{16}=\frac{1}{\cancel{64}_4}\cdot\frac{\cancel{16}}{11}=\frac{1}{44}$ +

Ответ: $\frac{1}{44}$

Задача 3:

центры шаров лежат в 1 плоскости и образуют правильный тр-к со стороной $2R$, на высоте $Z=R$. Их центр в плоскости $Z=R$: $(R;\frac{R}{\sqrt{3}})$

центр 4 шара радиусом r находится под этим центром на высоте r.

Лист №1

Расстояние между центрами

$$\sqrt{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2+(R-r)^2}=R+r$$ Откуда?

$$\frac{4R^2}{3}+(R-r)^2=(R+r)^2$$

$$\frac{4R^2}{3}-2Rr=2Rr$$

$$r=\frac{R}{3}$$

Максимальный радиус маленького шара в 3 раза меньше радиусов больших шаров

Задание 1:

Вовочка: v_1 - кол-во снежинок (по 2)
v_2 - кол-во звездочек (по 3)

Любочка: l_1 - кол-во снежинок (по 3)
l_2 - кол-во звездочек (по 4)

X - кол-во листов всего

Система уравнений:

$$v_1=\frac{20-3l_1}{2} \leftarrow \begin{cases} 2v_1+3l_1=20 \\ 3v_2+4l_2=26 \\ v_1+v_2=l_1+l_2=X \end{cases}$$

$v_2=x-v_1$, $l_2=x-l_1$

$$3(x-v_1)+4(x-l_1)=26$$

$$3\left(x-\frac{20-3l_1}{2}\right)+4(x-l_1)=26$$

$$3x-\frac{60-9l_1}{2}+4x-4l_1=26$$

$$7x-\frac{60-l_1}{2}=26$$

$$14x-60+l_1=52$$

$$14x+l_1=112$$

$$x=\frac{112-l_1}{14}$$

~~Также есть условие, что $0\le v_1\le x$ дает, что $l_1\ge 4$, но тогда x целое только при $l_1=0, 7, 14$.~~

~~При $l_1=0$ получим $v_1=10$, $x=16$, но тогда $v_1>x$ — противоречие. Других целых чисел на этом отрезке нет => система не имеет решений.~~

~~Ответ: да, они ошиблись~~

оговый балл ________ ______________
(подпись председателя жюри)

Шифр М 11-30
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «________________________________», ______ класс,

Также есть условие x и l_1 - целые положительные числа

$v_2 = \frac{20-3l_1}{2} \geq 0 \Rightarrow l_1 \leq 6$

$x = \frac{112-l_1}{14}$ Для $0 \leq l_1 \leq 6$. Проверим x - целое число?

$l=0 \Rightarrow x = \frac{112}{14} = 8$, а $v_1 = 10$, но $v_1 \leq x$

а $10 \not\leq 8$. ~~Значит (x- невозможно~~

$\frac{20-3l_1}{2} \leq \frac{112-l_2}{14}$

$7(20-3l_1) \leq 112 - l_1$

$28 \leq 20l_1 \Rightarrow l_1 \geq 1,4$

Также $v_1 \geq 0 \Rightarrow 20-3l_1 \geq 0$, $l_1 \leq 6$ и x целое

$x = \frac{112-l_1}{14}$ — целое, значит число кратно 14 наверн (т.к. только целые числа)

но $l_1 \leq 6$ (максимум 6), значит единственное подходящее целое число ~~возможное максимум~~ 0

$x = \frac{112-0}{14} = 8$ но тогда $v_1 = 10$. Значит ни одного решения нет, т.к. $10 \not\leq 8$.

О: они ошиблись.

Задача 2:

$\sqrt{a-x} = x-b$

~~…~~ $a-x = (x-b)^2$

$a-x=b$

$x = a-b$

$b = (a-2b)^2$

$a-2b = \pm\sqrt{b}$

$a = 2b \cancel{+1} \pm \sqrt{b}$

по условию 1 корень подходит, а второй нет

$a - r_2 \neq b = a \neq 2b + 0,5$

при $a = 2b+\sqrt{b}$ это дает $b \neq \frac{1}{4}$

при $a = 2b - \sqrt{b}$ - условие выполняется всегда

Ответ: $a = 2b \mp \sqrt{b}$, $b \geq 0$, при $a = 2b+\sqrt{b}$ $(b \neq \frac{1}{4})$

Лист № 2

Задача 5

а) $xP'(x) = k(P(+x+1) + P(x-1))$ (1)

$x \to -y$

$(-x)P'(-x) = k(P(-x+1) + P(-x-1)) \cdot -1$

$+ xP'(-x) = -k(P(1-x) + P(-1-x))$ (3)

Правые части (1) и (3); но добавим к (1)

Куда пропали $P'(x)$ и $P'(-x)$?

$k(P(-(x+1)) + P(-(x-1)) = k(P(1-x) + P(-1-x))$

$Q(x) = P(x) - P(-x)$, то из равенства (1) и (3) следует что $xQ'(x) = 0$ для всех $x \Rightarrow$

Почему?

$Q'(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = C$, где C - константа

но $Q(x) = P(x) - P(-x)$ - нечетная функция, а постоянная функция нечетной быть не может кроме 0. Значит $C = 0 \Rightarrow$

$P(x) = P(-x)$ - функция четная

б) Подставим $x = 0$ в исходное тождество

$0 \cdot P(0) = k(P(1) + P(-1))$

Левая часть равна $0 \Rightarrow$

$k(P(1) + P(-1)) = 0$

т.к. k - натуральное число $k \neq 0 \Rightarrow$

$P(1) + P(-1) = 0$

Но мы уже доказали, что функция чётная, значит $P(-1) = P(1)$

тогда $2P(1) = 0$; $P(1) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 9

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1013433

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Шифр М 11-9
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	10	—	20	0											50
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

11
(класс участия)

№1 26 звезд можно получить только 2 способами, 1 способ: из 2 листов звезды Вова и из 5 листов – Люба $(2\cdot3+4\cdot5=6+20=26)$ => у них разница в 3 листа, причем у Любы больше. 2 способ: из 6 листов Вова делает звезды и из 2 листов Люба $(6\cdot3+2\cdot4=18+8=26)$ => разница в 4 листа, причём у Вовы больше.

20 снежинок можно получить только 3 способами; 1 способ: из 1 листа Вова и из 6 Люба $(2+3\cdot6=20)$ => разница в 5 листов, причём у Любы больше

2способ: из 4 листов Вова и из 4 Люба $(4\cdot2+4\cdot3=8+12=20)$ => разница 0

3 способ: из 7 листов Вова и из 2 Люба $(7\cdot2+2\cdot3=14+6=20)$ => разница в 5, причем у Вовы больше. Заметим, что, чтобы листов было поровну, разница между листами у Вовы и Любы ~~со звездами и снежинками~~ в звездах и в снежинках должны совпадать, но в снежинках у них разница равна либо 5, либо 0, а в звездах либо 3, либо 4. Совпадений нет => они ошиблись.

Ответ: ошиблись

№4 Заметим, что, чтобы на 3 вопрос солгали, житель должен быть лжецом и солгал. Посчитаем вероятность этого события ~~этот~~: $\frac{1}{3}\cdot\frac{25}{100}\cdot\frac{25}{100}\cdot\frac{75}{100}=\frac{1}{64}$ ($\frac{1}{3}$ -вероятность лжеца

Сдано _____ листов

подпись участника подпись наблюдателя в аудитории

Лист №1

$\frac{25}{100} \cdot \frac{25}{100}$ – вероятность правды на первые 2 вопроса. $\frac{75}{100}$ – вероятность лж

3 вопрос). Теперь посчитаем вероятность услышать правду на первые 2 вопроса. Это возможно при рыцаре с вероятностью $\frac{2}{3}$ и при лжеце с вероятностью: $\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$. Теперь посчитаем вероятность задачи

$$\frac{\frac{1}{64}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{48}} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{33}{48}} = \frac{48}{33 \cdot 64} = \frac{1}{44}$$ (+)

Ответ: $\frac{1}{44}$.

№2 Заметим, что: $\begin{cases} a-x = (x-b)^2 \\ x-b \geq 0 \\ a-x \geq 0 \end{cases}$ – эта система есть решение уравнения $\sqrt{a-x} = x-b$, попробуем решить эту систему.

Сначала решим: $a-x = (x-b)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2bx + x + b^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2b-1)x + b^2 - a = 0$

$D = (2b-1)^2 - 4(b^2-a) = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 + 4a = 4a - 4b + 1$, Заметим, что $x \geq b$ и $x \leq a \Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow 4a - 4b + 1 > 0 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ 2 корня у уравнения, $2a - 2b + 1 > 0$ (из условия $a \geq b$)

$x_1 = \frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2}$ сравним с a и с b

$\frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2} \leq a \Leftrightarrow 2b - 1 + \sqrt{4a-4b+1} \leq 2a \Leftrightarrow \sqrt{4a-4b+1} \leq 2a - 2b + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a - 4b + 1 \leq 4a^2 + 4b^2 + 1 - 8ab + 4a - 4b \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 - 8ab \geq 0 \Leftrightarrow 4(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ при любом значении $a-b$

$\frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2} \geq b \Leftrightarrow 2b - 1 + \sqrt{4a-4b+1} \geq 2b \Leftrightarrow \sqrt{4a-4b+1} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a - 4b + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 4(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow a - b \geq 0$

При $a - b \geq 0$ x_1 – является корнем изначального уравнения

$x_2 = \frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2} \geq b \Leftrightarrow 2b - 1 - \sqrt{4a-4b+1} \geq 2b \Leftrightarrow -1 - \sqrt{4a-4b+1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ нет таких a и b, чтобы выполнялось $\Rightarrow x_2 < b \Rightarrow x_2$ – не является корнем изначального уравнения. $\Rightarrow x_1$ должно быть корнем изначального уравнения $\Rightarrow a - b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b$

Ответ: $a \geq b$.

Нет

№5 Заметим, что, если $P(x)$ – четная, то $P(x+1) = P(-x+1)$ и $P(x-1) =$
$= P(-x-1) \Rightarrow P(x+1) + P(x-1) = P(-x+1) + P(-x-1) \Rightarrow k(P(x+1) + P(x-1)) = k(P(-x+1) +$

[redacted]ый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр Н 11-9

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «________________________», ______ класс,

вариант ________

$+P(-x-1)) \Leftrightarrow xP'(x) = -xP'(-x) \Leftrightarrow P'(x) = -P'(-x)$ - если это доказать, то задача будет решена

Лист № 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	**M11** 25

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1179532

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место шифра

Дата "____" ______________ 20____ г.

Шифр М 11-25
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	[illegible]	20	20	—											80
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

МАТЕМАТИКА
(профиль олимпиады)

11
(класс участия)

(1) ПУСТЬ РЕБЯТАМ ДАЛИ ПО N ЛИСТОВ, ИЗ a ЛИСТОВ ВОВОЧКА СДЕЛАЛ СНЕЖКИ, А ЛЮБОЧКА ИЗ b ЛИСТОВ; ТОГДА $(N, a, b \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 20 \\ 3(N-a) + 4(N-b) = 26 \end{cases} \Rightarrow 7N - 3a - 4b = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7N - a - b - (2a + 3b) = 26 \Rightarrow 7N - a - b = 46$$

ПАРЫ ЧИСЕЛ $2a$ и $3b$, ДАЮЩИЕ В СУММЕ 20: 2 и 18; 8 и 12; 14 и 6; 20 и 0
(1-ОЕ ЧИСЛО $\vdots 2$, 2-ОЕ $\vdots 3$) (a и b: 1 и 6; 4 и 4; 7 и 2; 10 и 0) ПОДСТАВЛЯЯ ПОЛУЧИМ:

$$\left[\begin{aligned} 7N - 1 - 6 &= 46 \\ 7N - 4 - 4 &= 46 \\ 7N - 7 - 2 &= 46 \\ 7N - 10 - 0 &= 46 \end{aligned}\right. \Rightarrow 7N = \left[\begin{aligned} &53 \\ &54 \\ &55 \\ &56 \;\vdots 7 \end{aligned}\right. \Rightarrow N = 8$$

НО ТАКОЕ ЗНАЧЕНИЕ N БУДЕТ ПРИ $a = 10$ и $b = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 20 \\ 3(8-10) + 4(8-0) = -6 + 32 = 26 \end{pmatrix}$$

ЗНАЧИТ $\boxed{\text{РЕБЯТА ОШИБЛИСЬ В ПОДЧЁТАХ}}$

3

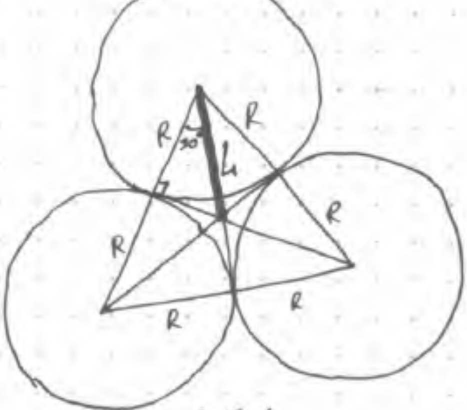


РИС. 1

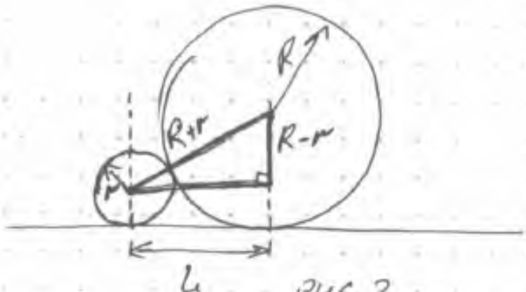


РИС. 2

НАИБОЛЬШИЙ РАДИУС 4-ГО ШАРА БУДЕТ, КОГДА ОН КАСАЕТСЯ 3ЁХ ШАРОВ И ПЛОСКОСТИ ТОГДА РАССТОЯНИЕ ОТ ЦЕНТРОВ 4-ГО ШАРА И ЛЮБОГО ДРУГОГО БУДЕТ РАВНО $R+r$

(r - РАДИУС 4-ГО ШАРА)

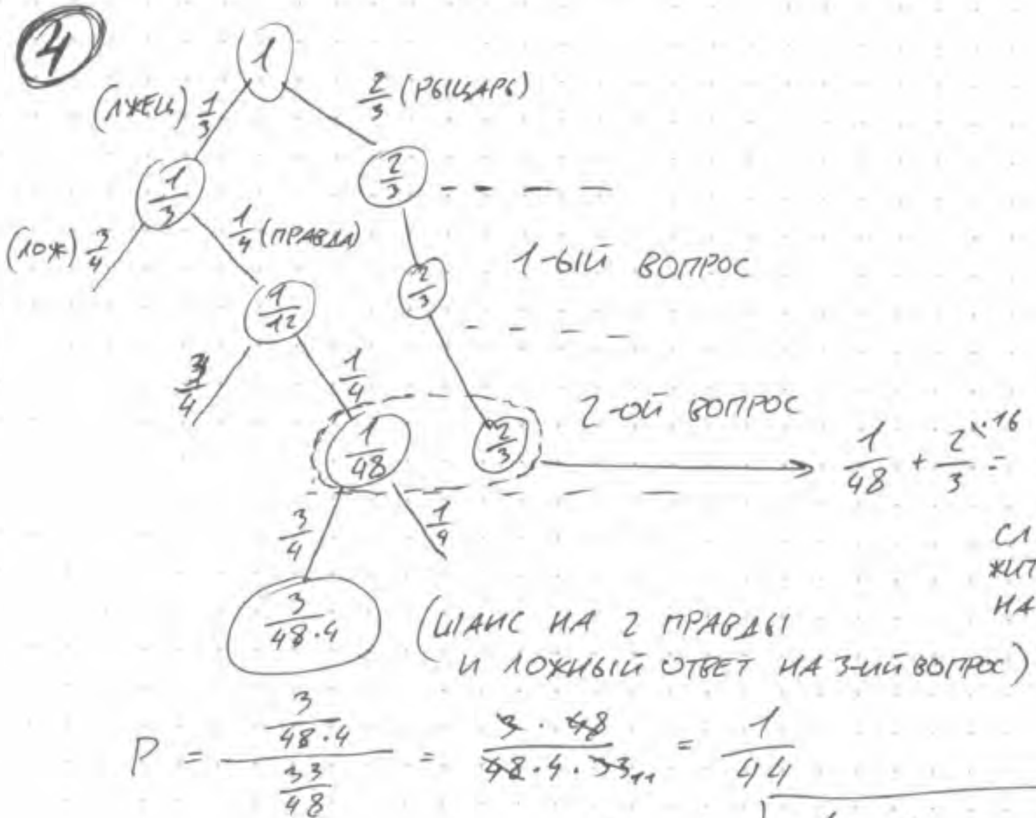
$$L = \frac{R}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \quad (\text{РИС. 1})$$

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + L^2 \quad (\text{РИС. 2})$$

$$\cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2} = \cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} + \frac{4}{3} R^2$$

$$4Rr = \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{R}{3}}$$

4



$\frac{1}{48} + \frac{2^{\cdot 16}}{3} = \frac{33}{48}$ (- ШАНС, ЧТО СЛУЧАЙНО ВЫБРАННЫЙ ЖИТЕЛЬ ОТВЕТИТ ПРАВДУ НА 2 ВОПРОСА)

$$P = \frac{\frac{3}{48 \cdot 4}}{\frac{33}{48}} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{48}}{\cancel{48} \cdot 4 \cdot \cancel{33}_{11}} = \frac{1}{44}$$

ОТВЕТ: $\boxed{\frac{1}{44} \ (\approx 0{,}023)}$

+

~~вый балл~~ ______ ______
(подпись председателя жюри)

Шифр М 11-25
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 11 класс,

(2) $\sqrt{a-x} = x-b$

$a - x = (x-b)^2 = x^2 - 2xb + b^2 \Rightarrow x^2 - (2b-1)x + b^2 - a = 0$

$D\ (= b^2 - 4ac) = (-(2b-1))^2 - 4\cdot(b^2-a) = \cancel{4b^2} - 4b + 1 - \cancel{4b^2} + 4a$

$= 4a - 4b + 1 \geq 0$

$x\left(= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{4a-4b+1}}{2}$ $\quad x =$

$x - b \geq 0 \Rightarrow \frac{2b-1 \pm \sqrt{4a-4b+1}}{2} - b \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2} \geq 0 \\ \frac{-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2} \geq 0 \end{array}\right.$

$\sqrt{4a-4b+1} \geq 1$

$\sqrt{4a-4b+1} \leq -1 \quad \varnothing$ Т.Е. ВСЕГДА ХОТЯ БЫ 1 ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ БУДЕТ ЛИШНИМ

$\begin{cases} 4a - 4b + 1 \geq 1 \\ 4a - 4b + 1 > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow 4a - 4b \geq 0 \Rightarrow a - b \geq 0$

2 РЕШЕНИЯ, 1 ИЗ КОТОРЫХ ЛИШНЕЕ И 1 ПРАВИЛЬНОЕ

$4a - 4b + 1 = 0$ 1 РЕШЕНИЕ, КОТОРОЕ ЛИШНЕЕ $\left(\begin{array}{l} x = \frac{2b-1}{2} = b - \frac{1}{2} \\ x - b = b - \frac{1}{2} - b = -\frac{1}{2} < 0 \end{array}\right)$

$\Updownarrow$

$4a - 4b = -1 \Rightarrow a - b = -\frac{1}{4}$ (2-ГО ЛИШНЕГО НЕТ)

Ответ $\boxed{a - b \geq 0 \text{ или } a - b = -\frac{1}{4}}$

5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 13

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1201000

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

[redacted]ата "16" января 2026

Шифр М 11-13
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	10	—	20	0											50
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика (профиль олимпиады)

11 (класс участия)

Задача 2.

Решая ур-е вида $\sqrt{a-x} = x-b$ часто применяют равносильный переход:

$$\sqrt{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = (f(x))^2 \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Идём от обратного: $x - b > 0 \Rightarrow x - b < 0$
$x < b$.

~~[illegible]~~

$a - x = (x-b)^2$

$a - x = x^2 - 2bx + b^2$

$x^2 + x\cdot(1-2b) + (b^2 - a)$

$D = (1-2b)^2 - 4\cdot(b^2 - a) = 1 - 4b \cancel{+4b^2} - \cancel{4b^2} + 4a = 1 - 4b + 4a.$

$$x = \frac{-1 + 2b \pm \sqrt{1-4b+4a}}{2}$$

~~Итак~~

① $\frac{-1+2b-\sqrt{1-4b+4a}}{2}<b$

$-1+\cancel{2b}-\sqrt{1-4b+4a}<\cancel{2b}$

$\sqrt{1-4a+4b}>-1$

$\varnothing$

② $\frac{-1+2b+\sqrt{1-4b+4a}}{2}<b$

$-1+\cancel{2b}+\sqrt{1-4b+4a}<\cancel{2b}$

$\cancel{1}-4b+4a<\cancel{1}$

$4a<4b$

$a<b$ => т.е. в этом случае оба корня отпадают, тогда при $a\geq b$ остаётся один

Ответ: при $a\geq b$.

Задание 4.

Жители

рыцари

$\frac{2}{3}$ населения

0 – ложь

1 – правда

остальные

$\frac{1}{3}$ населения

0,25 – правда

0,75 – ложь

I случай: перед нами рыцарь:

$P_1=\frac{2}{3}$

II случай: перед нами не рыцарь, но сказал правду:

$P_2=\frac{1}{3}\cdot 0,25\cdot 0,25\cdot 0,25=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{192}$.

III случай: перед нами не рыцарь, и он соврал:

$P_3=\frac{1}{3}\cdot 0,25\cdot 0,25\cdot 0,75=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\cancel{3}}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр N 11-13

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 11 класс,

Искомая вероятность:

$$p = \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3} = \frac{1}{64} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{192} + \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64} \cdot \frac{192}{132} = \frac{3}{132} = \frac{1}{44}$$

Ответ: $p = \frac{1}{44}$ (+)

Задание 1

Пусть на Вовочку и Любочку приходится n-ое кол-во листов. Если у них 20 снежинок, то над ними работали оба (т.к. число чет, $2 \cdot 10 = 20$ также не получится, поскольку на Любочку придётся аж $40 \neq 26$ звездочек). Итого:

1 случ.) $20 = 3+3+3+3+3+3+2$

2 случ.) $20 = 3+3+3+3+2+2+2+2$

3 случ.) $20 = 3+3+2+2+2+2+2+2+2$ 4 случ. 10+0

Первый случ. можно откинуть, т.к. если Любочка потратила $n=6$, то на Вовочку остаётся $n = 6-1 = 5$: $5 \cdot 4 = 20$ звездочек, которых нельзя добрать до 26 равномерно даже при $n=7$.
Второй случ. не подходит, оба использовали $n=4$, однако добрать равномерно до 26 не получится.

Третий случ. также не подходит: на Вовочку $n=7$, тогда на Любочку $n = 7-2 = 5$: $5 \cdot 4 = 20$ звездочек, 6 недостающих тоже не получится восполнить.

Ответ: ошиблись.

Задание 5

$P(x)$ - чёт

$x\cdot P'(x) = k\cdot(P(x+1)+P(x-1))$

$xP'(x) = kP(x+1) + kP(x-1)$

Тогда при минусе ф-ия останется в том же виде ?

$P(-x) = P(x)$

$P(-(x+1)) = P(x+1)$

Выполняется рав-о:

$kP(-(x+1)) + kP(-(x-1)) = kP(x+1) + kP(x-1)$

$kP(-x-1) + kP(-x+1) = kP(x+1) + kP(x-1)$

Пусть $x = 1$

$kP(-2) + \cancel{kP(0)} = kP(2) + \cancel{kP(0)}$

$kP(-2) = kP(2)$

$kP(2) = kP(2)$

балл ______ ______________
(подпись председателя жюри)

Шифр М11-13
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 11 класс,

① $\frac{-1+2b-\sqrt{1-4b+4a}}{2}<b.$

$-1+\cancel{2b}-\sqrt{1-4b+4a}<\cancel{2b}$

$\sqrt{1-4a+4b}>-1$

$\varnothing$

② $\frac{-1+2b+\sqrt{1-4b+4a}}{2}<b$

$-1+\cancel{2b}+\sqrt{1-4b+4a}<\cancel{2b}$

$\cancel{1}-4b+4a<\cancel{1}$

$4a<4b$

$a<b \Rightarrow$ т.е. в этом случае $x_{1,2}$ отпадают ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Ответ: Тогда пост. корень есть при $a \geq b$. Например

$\sqrt{1-x}=x-1.$

$\cancel{1}-x=x^2-2x+\cancel{1}$

$x^2-x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \text{ — пост.} \\ x=1 \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 -2

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1265720

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА Кремлевская ул., д. 18, Казань, 420008 Тел./факс: 8(843) 292-53-63

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М11-2
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	10	20	0	0											50
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

11
(класс участия)

№1 Пусть x – листы, которые потратил Вова на снежинки, тогда $m-x$ – на зв.

y – листы, которые потратила Лиза на снежинки. и $m-y$ – на зв.

$$\begin{cases} 2x+3y=20 \\ 3(m-x)+4(m-y)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=20 \\ 7m-3x-4y=26 \end{cases} \Rightarrow$$

Сложим ① и ② равенства:

$7m-x-y=46$

Из ① равенства: $x=10-1{,}5y$

$7m-(10-1{,}5y)-y=46$

~~$7m-10+0{,}5y=\cancel{66}\ 92$~~

~~$14m+y=\cancel{66}\ 112$~~

$7m-10+0{,}5y=46 \quad |\cdot 2$

$14m-20+y=92$

$14m+y=112$

Т.к. $y\geq 0 \Rightarrow 8-m\geq 0 \Rightarrow$ $y=112-14m=14(8-m)$

$m\leq 8$

Сдано 3 листов

подпись участника подпись наблюдателя в аудитории

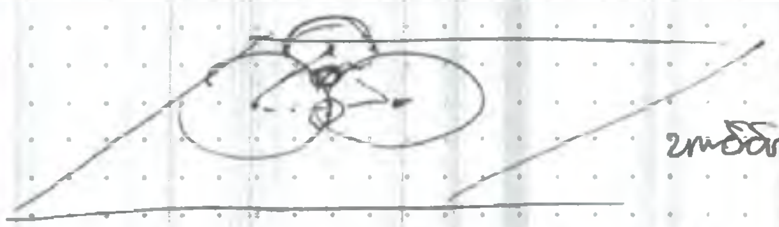
Лист №1

т.е. Вове и Любе дали не больше 8 листов
Рассмотрим разные варианты получения 20 снеж. и 26 зв.
~~20:~~ Снежин: ~~$2\cdot\underline{10}+3\cdot\underline{0}=20$~~ — не подходит, т.к. $10 > 8$
звезд: ~~$2\cdot 7+3\cdot 2=20$~~
↓
~~зв: 3.~~

Без учета равенства кол-ва листов $m_1 = x$, $m_2 = y$

1). снеж: $2\cdot\underline{10}+3\cdot\underline{0}=20$ зв: — — уже не подходит
2). снеж: ~~$3\cdot 2+$~~
$2\cdot\underline{7}+3\cdot\underline{2}=20$ зв: $3\cdot\underline{2}+4\cdot\underline{5}$ — $m_1=9$ — не подходит
3) снеж: $2\cdot\underline{4}+3\cdot\underline{4}=20$ зв: $3\cdot\underline{2}+4\cdot\underline{5}$ - $m_2=9$ - не подходит
4) снеж: $2\cdot\underline{4}+3\cdot\underline{4}=20$ зв: $3\cdot 6+4\cdot 2$ - $m_1=10$ - не подходит
~~Таким образом даже без учета равенства бумаг~~
из трата у каждого в разных способах вырезание превышает
5) Снеж: $2\cdot\underline{1}+3\cdot\underline{6}=20$ зв: $3\cdot\underline{6}+4\cdot\underline{2}$ — $m_2=8$, ~~но~~
Единственный способ который удовлетворяет $m_1 \geq 8$ или $m_2 \geq 8$ - 5), но и учета $m_1=m_2$ - таких способов деления больше нет
Ответ: ошиблись.
Было бы правильно, если бы вместо 20 снеж. послали 22

№3



~~Сб Сбоку~~ мал. шар должен касаться больших 3 шаров, чтобы его радиус был максимальным

Нарисуем изображение видом сбоку и сверху,

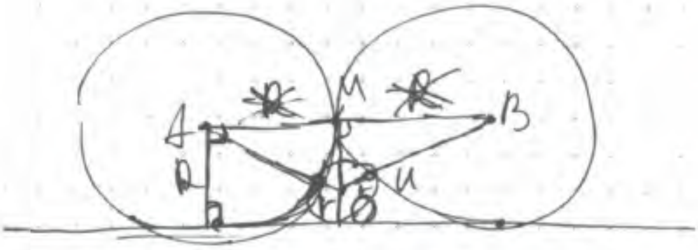
Итоговый балл ________ ______________
(подпись председателя жюри)

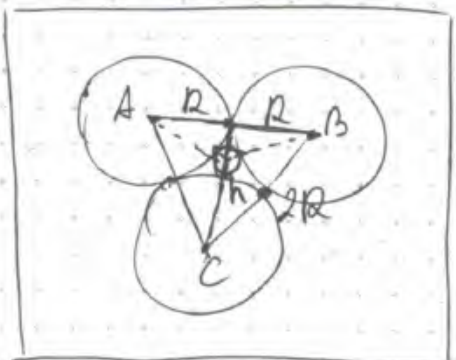
Шифр М 11-2
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике **»,** 11 **класс,**

вариант ________



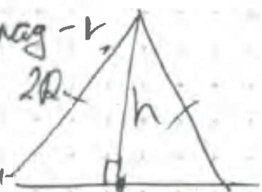


Пусть центры шаров A, B, C - соответственно

Рассмотрим △ABC — равн. со стороной 2R

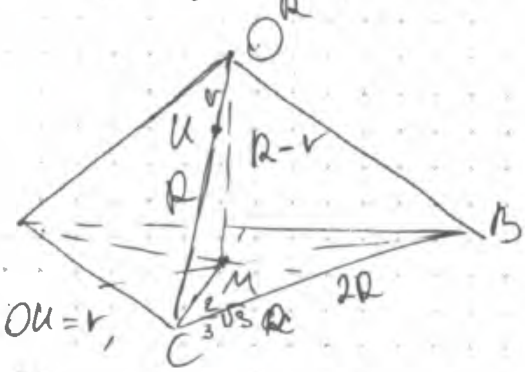
Все его высоты равны и равны: $4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}R$

Пусть ц. маленького шара - O, а его рад - r,



Пересечение всех высот △ABC — M, т.к. высота — это медиана, то по св-ву медиан:

$CM = BM = AM = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$



Рассмотрим △MOC

Пусть касание шара с ц. C и △ ш. с ц. O будет т. K, тогда OK = r,

CK = R

~~OM=~~ $R = r + MO \Rightarrow MO = R - r$

По т. Пифагора: $CO^2 = OM^2 + CM^2$: $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2$

$R^2 + 2rR + r^2 = R^2 - 2rR + r^2 + \frac{12}{9}R^2$

$4rR = \frac{12}{9}R^2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{3}R}$ Ответ: $r = \frac{1}{3}R$

Лист № 2

№2 $\sqrt{a-x} = x-b \iff$

$$\begin{cases} a-x=(x-b)^2 \\ a-x\geq 0 \\ x-b\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-x=(x-b)^2 \\ x\leq a \\ \cancel{b\geq}\, x\geq b \end{cases} \Rightarrow a\geq b \text{ т.к. иначе тогда корней нет}$$

Рассмотрим $a-x=(x-b)^2$

$a-x=(x-b)^2$

$x^2-2xb+b^2-a+x=0$

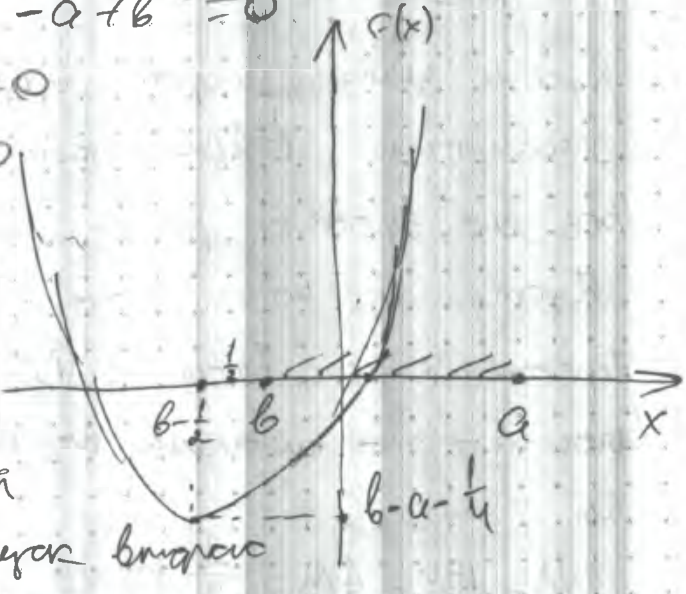
$x^2-x(2b-1)+(b-\frac{1}{2})^2-(b-\frac{1}{2})^2-a+\cancel{x}+b^2=0$

$(x-b+\frac{1}{2})^2-(b^2-b+\frac{1}{4})-a+b^2=0$

$(x-b+\frac{1}{2})^2-b^2+b-\frac{1}{4}-a+b^2=0$

$(x-b+\frac{1}{2})^2+b-a-\frac{1}{4}=0$

$f(x)=(x-b+\frac{1}{2})^2+b-a-\frac{1}{4}=0$



Т.к. $x_0=b-\frac{1}{2}$, находится левее b, то, один из корней не попадёт в отрезок $[b;a]$ всегда, а для попадания в отрезок второго корня нужно, чтобы выполнялось:

$$\begin{cases} f(b)\leq 0 & (1) \\ \cancel{f(a)\geq 0} & (2) \end{cases}$$

(1) $f(b)=(b-b+\frac{1}{2})^2+b-a-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+b-a-\frac{1}{4}=$
$=b-a\leq 0 \Rightarrow a\geq b$

(2) $\cancel{f(a)=(a-b+\frac{1}{2})^2+b-a-\frac{1}{4}=a^2-a(2b-1)+}$
$\cancel{+(b-\frac{1}{2})^2+b-a-\frac{1}{4}=a^2-2ab-a+b^2-b+\frac{1}{4}+}$
$\cancel{+b-a-\frac{1}{4}=a^2-2ab-2a+b^2=a^2-2a(b+1)+b^2\geq 0}$
$\cancel{D=b=a^2-2a(b+1)+(b+1)^2-2b-1\geq 0}$
$\cancel{(a-b-1)^2\geq 2b-1}$

Итоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М11-2

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

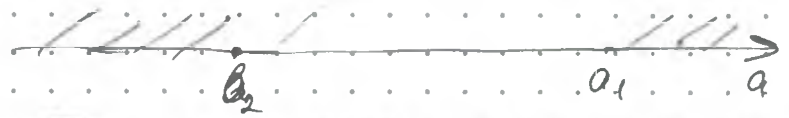
по «математике», 11 класс,

$a^2-2a(b+1)+b^2\geq 0$

$D=4(b+1)^2-4b^2=4((b+1)^2-b^2)=4((b+1-b)(b+1+b))=$

$=4(2b+1)$

$a_{1,2}=\frac{2(b+1)\pm 2\sqrt{2b+1}}{2}=b+1\pm\sqrt{2b+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=b+1+\sqrt{2b+1} \\ a_2=b+1-\sqrt{2b+1}\end{array}\right.$



Т.к. $a-x=(x-b)^2\geq 0 \Rightarrow a-x\geq 0$ - ...

Ответ: $a\geq b$

№4 ~~Если~~ Вероятность, что это рыцарь $\frac{2}{3} \Rightarrow$

$\cancel{\frac{2}{3}+P(\lambda)}$ $\boxed{P(\lambda)=\frac{1}{3}\cdot\cancel{\frac{1}{4}}\,\frac{3}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}}$ лжец $-\frac{1}{3}$

$P(\lambda)=$ Если это лжец, то вероятность лжи при каждом отдельном вопросе $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{64}+\frac{1}{64}=\frac{4}{16}$ $P(A)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{12}$

$\frac{3}{64}\cdot\frac{64}{4}=\frac{3}{4}$

$P(\lambda)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$P(A)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$

Ответ: $\frac{1}{8}$ $=\cancel{25}\ \frac{2}{10}$

№5

$x P'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$

если $P(x)$ чет., то $xP'(x) \geq 0$ всегда

$x \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = k(P(x+1) + P(x-1))$

$\frac{x}{k} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = P(x+1) + P(x-1)$

$x \to -x$

$\cancel{-\frac{x}{k} \frac{\Delta P(-x)}{}}$ $-\frac{x}{k} P'(-x) = P(-x-1) + P(-x+1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 4

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1268477

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ ... ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА ... Казань, 420008 Тел./Факс: 8(843) ...

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М11-7
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	8	5	20	5											58
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[подпись]
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

11
(класс участия)

Задача 1.

~~x - кол-во листов, разрезанных на снежинки у Любы; y - кол-во листов, разрезанных на снежинки у Вовы~~

x, a - кол-во листов, разрезанных на звездочки и снежинки у Вова соответственно.
y, в - кол-во листов, разрезанных на звездочки и снежинки у Люба соответственно.
x, y, a, в - целые неотр. числа

звездочки: $3x+4y=26$. $26 \vdots 2$, $4y \vdots 2 \Rightarrow 3x \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2$. x может быть 0, 2, 4, 6, 8.
$10 \cdot 3 = 30 > 26 \Rightarrow$ x не может быть больше 8. Переберем все варианты:
$x=0 \Rightarrow y=26 \not\vdots 4$ ✗; $x=2 \Rightarrow y=(26-6):4=5$ ✓; $x=4 \Rightarrow y=(26-12)\not\vdots 4$ ✗; $x=6 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=(26-18):4=4$ ✓; $x=8 \Rightarrow y=(26-24)\not\vdots 4$

снежинки: $2a+3в=20$. $20 \vdots 2$, $2a \vdots 2 \Rightarrow 3в \vdots 2 \Rightarrow в \vdots 2$. в может быть 0, 2, 4, 6.
$8 \cdot 3 = 24 > 20 \Rightarrow$ x не может быть 8 и больше. Перебираем все варианты:
$в=0 \Rightarrow a=10$; $в=2 \Rightarrow a=14:2=7$; $в=4 \Rightarrow a=8:2=4$; $в=6 \Rightarrow a=2:2=1$

	звезда		снежинки			
номер пары	1	2	3	4	5	6
Вова	x=2	x=6	a=10	a=7	a=4	a=1
Люба	y=5	y=4	в=0	в=2	в=4	в=6

Далее нам нужно выбрать одну пару из 1 и 2, и из с 3 по 6. Нужно, чтобы выполнялось $x+a=y+в$ (т.к. у них одинаковое кол-во листов).

1 с 3-6:
$2+10 \neq 5+0$
$2+7 \neq 5+2$
$2+4 \neq 5+4$
$2+1 \neq 5+6$

2 с 3-6:
$6+10 \neq 4+0$
$6+7 \neq 4+2$
$6+4 \neq 4+4$
$6+1 \neq 4+6$

Ни одно равенство не выполняется $\Rightarrow$ они ошиблись.

Задача 4

Всего x жителей, $\frac{2}{3}$ - рыцари, $\frac{1}{3}$ лжецы.

вероятность 1 — правда, 0 — ложь; 0,75 — ложь, 0,25 — правда

Сдано ____ листов

подпись участника

подпись наблюдателя в аудитории

Лист №1

нам нужно найти вероятность того, что человек скажет подряд 3 раза правду
Если он рыцарь, то $\frac{2}{3} \cdot 1 = A$

Если он лжец, то либо $B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4}$ (лжец, 3 раза правда), либо

$C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3}{4}$ (лжец, 2 раза правда, 3й раз ложь). Из всех под усл

нам подходит 3 вар. Тогда вероятность: $\frac{C}{A+B+C}$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{32}{48} + \frac{1}{48}} = \frac{1}{44}$$

Ответ: $\frac{1}{44}$. +

~~Задача 2~~ Задача 2

Найдём ОДЗ $\sqrt{a-x} = x - b$
$a - x \geq 0 \Rightarrow x \leq a$
$x - b \geq 0 \Rightarrow x \geq b$ $\Rightarrow a \geq b$ (иначе x не существует) $b \quad x \quad a \rightarrow x$

Возведем обе части уравн. в квадрат, не забудем про ОДЗ:

$a - x = (x-b)^2 \Rightarrow x^2 - (2b-1)x + (b^2 - a) = 0 \quad D = (2b-1)^2 - 4(b^2-a) = 4b^2 - 4b + 1 -$

$- 4b^2 + 4a = 4a - 4b + 1$ в ОДЗ $a \geq b$, значит $D > 0$ (хотя бы 1)

$x_1 = \frac{2b - 1 + \sqrt{4a-4b+1}}{2}$ $\qquad x_2 = \frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2}$

1. Подставим x_1 в ОДЗ: $\frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2} \geq b \Rightarrow \sqrt{4a-4b+1} \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 4b + 1 \geq 1 \Rightarrow a - b \geq 0$ ✓

$\frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2} \leq a \Rightarrow \sqrt{4a-4b+1} \leq 2a - 2b + 1$ (обе части неотр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 4b - 1 \leq 4a^2 + 4b^2 - 8ab + 1 - 4a - 4b \Rightarrow (a+b)^2 \geq 0$ всегда ✓

Значит, корень x_1 всегда является решением $\sqrt{a-x} = x - b$

2. Подставим x_2 в ОДЗ: $\frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2} \geq b \Rightarrow \sqrt{4a-4b+1} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 4b + 1 \leq 1 \Rightarrow a \leq b$. Это противоречие к ОДЗ, в ОДЗ

подходит только $a = b$, но мы это исключаем, чтобы остался 1 корень.

$\frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2} \leq a \Rightarrow -\sqrt{4a-4b+1} \leq 2a - 2b + 1$ всегда (т.к. левая

часть ≤ 0, а правая по ОДЗ хотя бы 1). $\Rightarrow$ Чтобы второго

корня не было, $a > b$.

Ответ: при $a > b$

тоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М 11-7

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 11 класс,

вариант ________

Задача 5

б) Подставим под x 0. Тогда $0 = k(P(1)+P(-1))$ => $P(1)=-P(-1)$. В пункте а) мы доказали, что функция четная => $P(x)=P(-x)$ => $P(1)=P(-1)=-P(-1)$ => $P(1)=P(-1)=0$

Ответ: б) 0

Задача 3

Больше два на рисунке, третий спереди, но он не нарисован

AB = R

C – центр маленького шара

Что r маленького шара был наим r, то он находится на пересеч. биссектр. Δ MKN

$r \cancel{R_4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} R$?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 20

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1274758

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М 11-20
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	10	10	5	20	5											50
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

11
(класс участия)

Задание №4

Решение:

$P(K)=\frac{2}{3}$ $P(L)=\frac{1}{3}$

$P(\neg A_3/A_1\cap A_2)$

Пусть $Q=A_1\cap A_2$ Нам нужно: $P(\neg A_3/Q)=1-P(A_3/Q)$

Найдем: $P(Q)$

$P(Q)=P(Q/K)P(K)+P(Q/L)P(L)$

Если рыцарь (K) всегда правда: $P(Q/K)=1\cdot 1=1$

$P(Q/L)=(0,25)^2=0,0625$

$P(Q)=1\cdot\frac{2}{3}+0,0625\cdot\frac{1}{3}$

$P(Q)=\frac{2}{3}+\frac{0,0625}{3}$

$0,0625=\frac{1}{16}$

$P(Q)=\frac{2}{3}+\frac{1}{48}$

$\frac{2}{3}=\frac{32}{48}$, $\frac{32}{48}+\frac{1}{48}=\frac{33}{48}=\frac{11}{16}$

$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1\cap A_2\cap A_3/K)P(K)+P(A_1\cap A_2\cap A_3/L)P(L)$

Для лжеца: $P(3\text{ правды}/L)=(0,25)^3=\frac{1}{64}$

Для рыцаря $P(3\text{ правды}/K)=1$

Сдано 2 листов

подпись участника

подпись наблюдателя в аудитории

Лист №1

Значит: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) < 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{192}$

$\frac{2}{3} = \frac{128}{192}$

$\frac{128}{192} + \frac{1}{192} = \frac{129}{192} = \frac{43}{64}$

$$P(A_3/Q) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(Q)}$$

$$P(A_3/Q) = \frac{43/64}{11/16} = \frac{43}{64} \cdot \frac{16}{11} = \frac{43 \cdot 16}{64 \cdot 11}$$

$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} = \frac{43}{44}$

$P(\neg A_3/Q) = 1 - \frac{43}{44} = \frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$ −

Задание №1

Решение:

~~Вовочка~~: x - листы Вовочки со снеж.

a - листы Любочки со снеж.

Всего снеж:

$2x + 3a = 20$

n - листов.

$3(n-x) + 4(n-a) = 26$

$x = \frac{20-3a}{2}$

— решение?

Проверка всех возможных значений $a = 0, 1, 2, \ldots, 6$ показ, что ни при одном варианте не получается целое число листов n удовлетворяющих всем условиям задачи. Следовательно, не существует способа распределить листы так, чтобы получилось ровно 20 снеж. и 26 звёзд.

Ответ: да, Вовочка, и Любочка ошиблись в подсчётах.

Задача №2

$\sqrt{a-x} = x - b$ имеет общ. условие: 1) $a - x \geq 0$ (подкоренное)

2) $a - x = (x-b)^2$

и тут автоматически $a - x = (x-b)^2 \geq 0$, ~~так~~ что

$a - x = (x-b)^2$

$x^2 + (1-2b)x + (b^2 - a) = 0$

$D = (1-2b)^2 - 4(b^2 - a) = 4(a-b) + 1$

$$x_{1,2} = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{4(a-b)+1}}{2} = b - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(a-b)+1}$$

Чтобы x_2 был не лишним, нужно $x_2 \geq b$, то есть

$\sqrt{4(a-b)+1} \geq 1$

$4(a-b) + 1 \geq 1$

$a \geq b$

При $a \geq b$ $D \geq 1 > 0$, квадратное даёт два корня, и ровно один из них (меньший) лишний. Ответ: $a \geq b$

ый балл ________ ____________

(подпись председателя жюри)

Шифр М 11-20

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «______________________», ______ класс,

вариант ________

Задание №3

Решение:

$2R$

$\frac{2R}{\sqrt{3}}$

Что здесь происходит?

2) Положение малого шара:

Пусть радиус малого шара R.

$R+r$

3) Составим уравнение:

$R-r \quad \frac{2R}{\sqrt{3}}$

По теореме Пифагора:

$(R+r)^2=(R-r)^2+\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2$

$R^2+2Rr+r^2=R^2-2Rr+r^2+\frac{4R^2}{3}$

$4Rr=\frac{4R^2}{3}$ отсюда: $r=\frac{R}{3}$

Ответ: Наибольший возможный радиус четвёртого шара равен $\frac{R}{3}$.

Задание №5

Дано:

$xP'(x)=k(P(x+1)+P(x-1)),\ k\in N.$

а) Докажем, что $P(x)$ - четная функция.

Заменим x на $-x$

$(-x)P'(-x)=k(P(1-x)+P(-1-x)).$

Умножим на -1. $xP'(-x)=k(P(x-1)+P(x+1)).$

?

$xP'(x)=xP'(-x)\Rightarrow P'(x)=P'(-x)$

Значит производная чётная, следовательно $P(x)$ - чётная функция.

б) Найдём $P(1)$

Подставим $x=0$

Лист № 2

$0 \cdot P'(0) = k(P(1) + P(-1))$

Так как $P(x)$ чётные.

$P(-1) = P(1)$

$0 = 2kP(1)$

т.к. $k \neq 0$

$P(1) = 0$

Ответ: а) $P(x)$ - чётные

б) $P(1) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 11

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1278932

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ОГРН 1021602841391 МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА Кремлевская ул., д. 18, Казань, 420008 Тел./факс: 8(843) 292-83-63

Дата "16" января 2025 г.

Шифр М 11-11
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	0	15	20	5											60
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика — 11
(профиль олимпиады) (класс участия)

№4
Пусть количество всех жителей города – N человек.
То рыцарей $\frac{2}{3}N$, а лжецов $\frac{1}{3}N$, которые лгут с вероятностью $\frac{3}{4}$, а говорят правду 0,25. Пусть A – рыцарь, B – лжец.
Вероятность, что случайно выбранный житель.
$P(A)=\frac{2}{3}$; $P(B)=\frac{1}{3}$
Если рыцарь, то вероятность, что ответит правдой на любой вопрос =1. Если лжец, то вероятность то, что ответит правдой на 1 вопрос = 0,25, на 2 - вопрос = 0,0625, т.к $(0,25)^2 = 0,0625$.
Вероятность, что житель ответит на 2 вопроса правдой:
$P=\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}0625=\frac{2+0{,}0625}{3}=\frac{2{,}0625}{3}=\frac{11}{16}$,
тогда $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{33}{16}}=\frac{1}{33}$. Значит, после двух правд вероятность рыцарь – $\frac{32}{33}$, лжец – $\frac{1}{33}$.

Вероятность, что рыцарь солжет =0, лжец = $\frac{3}{4}$.

Тогда вероятность, что случайно выбранный житель солжет на 3 вопрос:

$P=0\cdot\frac{32}{33}+\frac{1}{33}\cdot 0{,}75=\frac{0{,}75}{33}=\frac{\frac{3}{4}}{33}=\frac{1}{44}$ (+)

Ответ: ~~что,~~ и вероятность, что случайно выбранный житель солжет на 3 вопрос равна $\frac{1}{44}$

№1
~~Пусть x – кол-во листов с которых вовочка вы~~
Пусть каждый из них получил n – листов.
Пусть x – кол-во листов с которых вовочка вырезал снежинки (2 шт)

Лист №1

тогда
$n - x$ – кол-во листов с звездочками (3 шт)
Также самое с ...
y – снежинки (3 шт)
$n - y$ – звездочки (4 шт)

Тогда снежинки –
(1) $2x+3y=20$.

$x = \frac{20-3y}{2}$.

звездочки
$3(n-x)+4(n-y)=26$.
$3n-3x+4n-4y=26$.
$7n-3x-4y=26$
подставим x из снежинок

$7n-3\left(\frac{20-3y}{2}\right)-4y=26 \;|\cdot 2$

$14n-60+9y-8y=52$.
$14n+y=112$.
Выражаем $y=112-14n$
т.к. $y \geq 0$ и целое, то
$112-14n \geq 0$.
$n \leq 8$.
также $x = \frac{20-3y}{2} \geq 0$ и целое.
$\Rightarrow 20-3y \geq 0$ и четное.

Подберем возможные n
$n=8$.
$y=112-14\cdot 8=0 \Rightarrow$
$x=\frac{20}{2}=10$, но $x>10>n=8$.
попробуем $n=7$
$y=112-98=14$ $y>7$.
не подходит

$n=6$,
$112-84=28$. >7
не подходит

$n=5$.
$y=112-70=42$

- Чем меньше n, тем больше y – не подходит
- Если $n>8$, то тоже не подходит, что $y<0$

Значит нет такого натурального условия, чтобы условия выполнялись, значит ребята ошиблись.

Ответ: да, ребята ошиблись в подсчетах

№3
Центры шаров, лежащие в 1 плоскости, образуют правильный треугольник, где сторона 2a на высоте $z=R$.
Их центр в плоскости $z=R \cdot \left(R; \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$
Центр четвертого шара радиуса r находится под этим центром на высоте $z=r$.
Максимальный радиус получается, когда центр шара находится в центре этого треугольника

$$\sqrt{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2+(R-r)^2}=R+r$$ Откуда?

$$\frac{4R^2}{3}+(R-r)^2=(R+r)^2$$

$$\frac{4R^2}{3}-2Rr=2Rr$$

$$\Rightarrow r=\frac{R}{3}$$

ответ: $\Rightarrow$ максимальный радиус такого шара $\frac{R}{3}$

Итоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М 11-11

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 11 класс,

№2

$\sqrt{a-x} = x - b$.

$a - x = (x-b)^2$.

$a - x = b$.

$x = a - b$.

$b = (a-2b)^2 \Rightarrow a - 2b = \pm\sqrt{b}$.

$\Rightarrow a = 2b \pm \sqrt{b}$, $b > 0$.

2 корень не подходит по условиям.

$a - r_2 \neq b$ $:\Rightarrow a \neq 2b + 0,5$.

при $a = 2b + \sqrt{b}$ это выдает нам $b \neq \frac{1}{4}$.

при $a = 2b + \sqrt{b}$ условие выполняется ~~всегда~~

~~Тогда~~ Ответ.

$a = 2b \pm \sqrt{b}$, $b \geq 0$

при $a = 2b + \sqrt{b}$ $(b \neq \frac{1}{4})$

~~ответ~~

№5.

$xP' = k(P(x+1) + P(x-1))$

а) доказательство:

$(-x) P'(-x) = k(P(-x+1) + F(-x-1))$

Кто такой F ?

Замена $\varphi(x) = F(-x) \Rightarrow Q(x) = -P'(-x)$

Попробуем доказать что $R(x) = F(x) - F(-x) = 0$.

Подставим в уравнение

Пусть $g(x) = F(x) - F(-x) \Rightarrow g(-x) = -g(x)$ — нечетная функция

Подставим x и $-x$ в исходное.

1) $xP'(x) = k(F(x+1) + F(x-1))$

2) $-xP^x(-x) = k(F(-x+1) + F(-x-1))$.

Возьмем нечетную часть уравнения

Пусть P — конст. Уравнение линейное, можно найти полиномиальное решение.

Пусть степень $P = n \Rightarrow$ слева степень n и справа степень n

Подставим $x = 0$

$0 = k(F(1) + F(-1))$

$F(1) + F(-1) = 0$.

Подставим тогда $x = 1$

$1F'(1) = k(F(2) + F(0))$ — не дает четность

Лист № 2

~~Пусть~~ Заметим, что если $F(X)$ решение, то $F(-X)$ тоже решение.
Т.к. уравнение линейное и старший коэффициент определяется однозначно, то $F(X)=F(-X)$
(иначе два разных решения при заданном старшем коэффициенте, что противоречит единственности полинома, заданной степени, удовлетворяющего рекуррентным соотношениям коэффициентов) $\Rightarrow F(X)$ — четная функция

б) из пункта а) P — четная, поэтому $F(-1)=F(1)$

$\Rightarrow F(1)+F(-1)=0$

$2F(1)=0.$

$P_1=0.$

Ответ: а) четная
б) 0

Откуда взялось рекуррентное соотношение?