ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 63

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1281000

МН-63

Задание 1

б Пусть число x - листы, из которых Вовочка вырезал снежинки, тогда y — листы, из которых снежинки вырезала Любочка. Аналогично с числами a и b в деле вырезания звёздочек.

Тогда:

$$\begin{cases} 2x+3y=20 & (1) \\ 3a+4b=26 & (2) \\ x+a=y+b & (3) \end{cases}$$

Ответ: ошиблись

Перепишем (1) ур-ние в виде: $3y=20-2x$

$3y=2(10-x)$

И т.к. y, x - целые неотриц. числа, то подберём подходящие:

при $x=1$ $y=(10-1)\cdot\frac{2}{3}=6$

при $x=4$ $y=(10-4)\cdot\frac{2}{3}=4$

при $x=7$ $y=(10-7)\cdot\frac{2}{3}=2$, а при $x=10$ $y=0$

Перепишем ур-ние (2) в виде: $3a=26-4b$

Т.к. y, x - целые неотриц. числа, то подберём подходящие:

при $b=2$ $a=6$

при $b=5$ $a=2$

Теперь подставим a и b в ур-ние (3):

	$x+6=y+2$ или	$x+2=y+5$
$x=1, y=6$	$7\neq 8$	$3\neq 11$
$x=4, y=4$	$10\neq 8$	$6\neq 9$
$x=7, y=2$	$13\neq 4$	$9\neq 7$
$x=10, y=0$	$16\neq 2$	$12\neq 5$

$\Rightarrow$ Таким образом ни одна пара x, y не подх. к полученным a, b $\Rightarrow$ Любочка и Вовочка ошиб

Задача 2   ММ-63 им, из... наложи... везде...

$$\sqrt{a-x} = x-b \Rightarrow \begin{cases} x \geq b \quad (2) \\ a-x = x^2-2b+b^2 \quad (1) \end{cases}$$

1) $a-x = x^2-2bx+b^2$

$x^2-2bx+x+b^2-a=0$

$x^2-(2b-1)x+b^2-a=0$

$D = (2b-1)^2-4(b^2-a) = \cancel{4b^2}-4b+1-\cancel{4b^2}+4a =$

$= 4(a-b)+1$

$x_1 = \dfrac{2b-1+\sqrt{4(a-b)+1}}{2} = b-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{4(a-b)+1}}{2}$

$x_2 = \dfrac{2b-1-\sqrt{4(a-b)+1}}{2} = b-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{4(a-b)+1}}{2}$

Сравним x_1 и x_2 с b (2):

$x_2 \geq b$

$\cancel{b}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{4(a-b)+1}}{2} \geq \cancel{b}$

$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{4(a-b)+1}}{2} \geq 0$

решений нет, т.к.

$\dfrac{\sqrt{4(a-b)+1}}{2} \geq 0$ всегда

$x_1 \geq b$

$\cancel{b}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{4(a-b)+1}}{2} \geq \cancel{b} \quad | \cdot 2$

$\sqrt{4(a-b)+1} \geq 1$

$4(a-b)+\cancel{1} \geq \cancel{1}$

$4a \geq 4b$

$a \geq b$

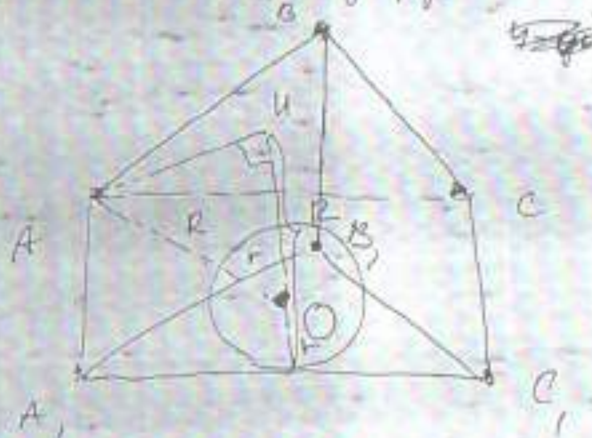
Ответ: при $a \geq b$

(1)
(2)
(3)
в
у.
обе...
б

МН-63

Задача 3

Построим треугольник ~~Ø~~ PQF, со стороной 2R и спроецируем его на пл-ть, построим ~~4-ый~~ 4-ый шар с центром в т. O с радиусом r.



Проведём AH – радиус оп. окр. $\triangle ABC$:

$$AH \overset{\text{по}}{\underset{\text{св-ву}}{=}} 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

$AO = R + r$, а $OH = R - r$

Тогда по т. Пиф. для $\triangle AHO$ ($AH \perp HO$):

$$AO^2 = HO^2 + AH^2$$

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \frac{4 \cdot 3}{9} R^2$$

$$\cancel{R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{4}{3} R^2}$$

$$\cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2} = \cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} + \frac{4}{3} R^2$$

$$4Rr = \frac{4}{3} R^2 \;\Big|\; : 4R$$

$$r = \frac{R}{3}$$

Ответ: $r = \frac{R}{3}$

МН-63

Задача 4

Вероятность, что ученик ответит правду:

$P = 1 \cdot P(\text{решил}) + P(\text{угад}) \cdot 0{,}25 = 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Вероятность лжи:

$P_1 = 1 - P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\ominus$

Ответ: $P_1 = 0{,}25$

Задача 5

а) Пусть $f(x) = p(x) - p(-x)$ — нечетная часть многочлена $p(x)$, тогда $x f'(x) = k(f(x+1) + f(x-1))$

Т.к. $f(x)$ — нечетный, то и его степень n нечетна

Почему? $\ominus$

$f(x) = a_n x^n + \dots$

$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots$

Тогда $f(x+1) + f(x-1)$ — сумма, в которой старший член сохранится, так как будет иметь нечетн. степень

$(x+1)^n + (x-1)^n = 2x^n + \dots$

$f(x+1) + f(x-1) = 2a_n x^n + \dots$

$x f'(x) = n a_n x^n + \dots$ $\qquad k \cdot 2a_n x^n + \dots$

Приравняем

$n \cdot a_n = 2 \cdot k \cdot a_n$

Если $a_n \neq 0$ то $2k = n$, что невозможно т.к. n — нечетн $\Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow p(x)$ — четная ч.т.д.

б) $p(x)$ - чётная
подставим $x=0$

$$0 = \cancel{x}(p(1)) + p(-1) \Rightarrow p(1) = -p(-1)$$

т.к. $p(x)$ чётн.

$$\Downarrow$$

$$p(1) = -p(1)$$

$$2 \cdot p(1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p(1) = 0$$

Ответ: б) 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

ШИФР	М11 -

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 класса
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника: 1272788

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	0	15	65 б.

N11-75

№2.

Если решать с сохранением ОДЗ, то выражение вида: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

$\sqrt{a-x} = x-b \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)=(x-b)^2 \\ x\ge b \end{cases}$ => если, как Вова, решить только квадратное уравнение, без условия $x\ge b$, то мы можем получить лишние корни, => если и нам нужно, чтобы ровно 1 корень был лишним нужно, чтобы один корень был больше или равен b, а другой меньше b =>

$x_1 < b \le x_2 \Leftrightarrow c\cdot f(b)\le 0$, где c – коэффициент перед x^2

найдём c: $x^2-2xb+b^2=a-x$

$x^2-x(2b-1)+b^2-a=0$

$c=1$

$f(b)\le 0$

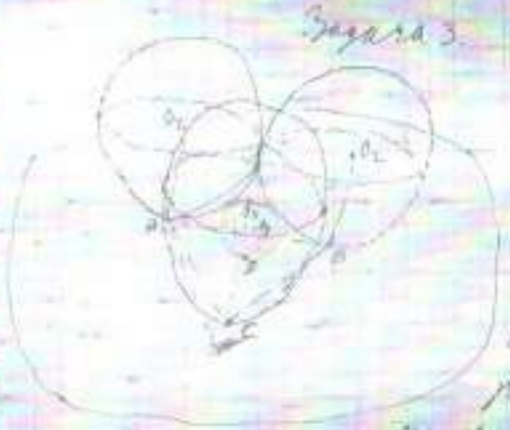
$b^2-b(2b-1)+b^2-a\le 0$

$b-a\le 0$

$b\le a$ => $\forall$ a и b таких что $b\le a$ у нас будет 1 лишний корень. Ответ: $b\le a$; $a,b\in\mathbb{R}$

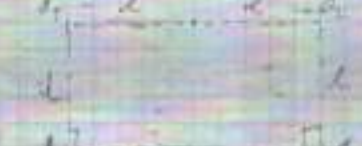
МН-75

Задача 3.



1) Очевидно, что сфера будет наибольшего радиуса, если касается 3 шаров и плоскости, потому что если она касается только 3 объектов (3 шаров или 2 шаров и плоскости), то мы можем просто расширять сферу до соприкосновения с 4 объектом из-за того что сфера задаётся 4 точками, а через 3 точки проходит бесконечно много сфер разного радиуса.

Пусть A, B, C — точки касания больших сфер с центрами в O_1, O_2, O_3 с плоскостью, D — точка касания малой сферы с плоскостью (её центр O_4). Тогда прямые AD, BD, CD — общие касательные к соответствующей большой и малой сфере. Тогда если r — радиус малой сферы, то длина общих касательных $AD = BD = CD = 2\sqrt{rR}$ (известный факт) $\Rightarrow D$ — центр опис. окр. около $\triangle ABC$.



В AO_1O_2B: $AO_1 = O_2B = R$, $AO_1 \perp AB$, $O_2B \perp AB \Rightarrow AO_1 \parallel O_2B \Rightarrow AO_1O_2B$ — параллелограмм.

Тогда $O_1O_2 = AB = 2R$. Аналогичные рассуждения для O_1ACO_3 и $O_3CBO_2 \Rightarrow \triangle ABC$ — правильный.

$BD = \frac{2}{3} BK = \frac{2}{3} R\sqrt{3} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{rR}$

$\frac{R^2}{3} = rR$, $r = \frac{R}{3}$. Ответ: $\frac{R}{3}$.

ММ-75

11.

Если наш житель — это рыцарь, то он не сможет соврать на 3-ий вопрос => нам нужно рассматривать только случай, когда наш житель это лжец. Вер-ть

$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{64}$

вероятность того, что лжец скажет правду. Он сделает это 2 раза => перемножаем вер-сти

вер-сть выбрать лжеца, т.к. $\frac{1}{3}$ жителей лжецы

$\frac{3}{4}$ — вер-сть того, что лжец соврал. Все 4 события произошли одновременно => мы перемножаем вероятности. Ответ: $\frac{1}{64}$

−

NH-75

Задача 1.

Пусть S – число мест, которое вызвали Вовочке и Любочке. x – кол-во мест, которое Вова потратил на снежинки, y – кол-во мест, которое Люба потратила на снежинки, тогда

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ 3(S-x) + 4(S-y) = 26 \\ S \geq x \\ S \geq y \end{cases}$$

выпишем все (x, y), которые удовлетворяют $2x+3y=20$ $(x, y \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{N})$

x	10	7	4	1
y	0	2	4	6

их можно получить из решения диофантового ур-я $2x+3y=20$: $x = 4-3k$, ~~$k \in \mathbb{Z}$~~

$y = 4+2k$.

подставим эти значения в систему

$x=10, y=0$: $7S-30=26$
$7S=56$
$S=8$, но $8 \leq 10$
$\Rightarrow S \neq 8$

$x=7, y=2$: $7S-21-8=26$
$7S=55$
$S \notin \mathbb{N}$
$\varnothing$

$x=4, y=4$:
$7S-12-16=26$
$7S=54$
$S \notin \mathbb{N}$
$\varnothing$

$x=1, y=6$: $7S-3-24=26$
$7S=53$
$S \notin \mathbb{N}$
$\varnothing$

т.к. других (x, y) нет $\Rightarrow$ у системы нет решений $\Rightarrow$ они ошиблись

Ответ: они ошиблись.

N11-5

№5.

Многочлен является четным тогда когда в нем только четные степени. Предположим противное, $P(x)$ — нечетная функция $\Rightarrow P(x)$ включает в себя x в нечетной степени, тогда

$P(x) = a_0 + a_1 x^2 \dots + a_{2m+1} x^{2m+1} \dots + a_n x^{2n}$

рассмотрим конкретно x в самой большой нечетной степени, пусть это x^{2m+1}, тогда

$x \cdot P'(x) = 2a_1 x^2 + \dots (2m+1) \cdot a_{2m+1} \cdot x^{2m+1} \dots + 2n\, a_n x^{2n}$

$P(x+1) = a_0 + a_1 (x+1)^2 \dots + a_{2m+1} (x+1)^{2m+1} \dots + a_n (x+1)^{2n}$

$P(x-1) = a_0 + a_1 (x-1)^2 \dots + a_{2m+1} (x-1)^{2m+1} \dots + a_n (x-1)^{2n}$

$P(x+1) + P(x-1) = 2a_0 + a_1((x+1)^2 + (x-1)^2) \dots + a_{2m+1}((x+1)^{2m+1} + (x-1)^{2m+1})$

$\dots + a_n((x+1)^{2n} + (x-1)^{2n})$

~~Выражение вида $((x+1)^{2n} + (x-1)^{2n})$~~

Если раскрыть $(x+1)^{2m+1}$ по биному Ньютона, то

$(x+1)^{2m+1} = x^{2m+1} + x^{2m} \cdot C^1_{2m+1} \dots + 1^{2m+1}$

$(x-1)^{2m+1} = x^{2m+1} - x^{2m} \cdot C^1_{2m+1} \dots - 1^{2m+1}$

$(x+1)^{2m+1} + (x-1)^{2m+1} = 2x^{2m+1} + \dots$

Нас не интересуют остальные слагаемые, рассмотрим только $2 \cdot x^{2m+1}$. Если подставить в $P(x+1) + P(x-1)$, то получим $\dots + a_{2m+1}(2x^{2m+1} + \dots) + \dots =$ Нет x^{2m+1}

$= \dots + a_{2m+1} \cdot 2 \cdot x^{2m+1} + \dots$, тогда коэффициент перед x^{2m+1} в $P(x+1) + P(x-1)$ — это $a_{2m+1} \cdot 2$. Тогда, если умножить $P(x+1) + P(x-1)$ на k то коэффициент будет $2k \cdot a_{2m+1}$. Поскольку $x \cdot P'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$, то коэф. при всех степенях равны $\Rightarrow (2m+1) \cdot a_{2m+1} = 2k \cdot a_{2m+1}$, где $(2m+1) \cdot a_{2m+1}$ — коэф. при x^{2m+1} в $P'(x) \cdot x$, тогда

$2m+1 = 2k$, $m, k \in \mathbb{N}$, — это невозможно $\Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow P(x)$ — четная функция.

может возникать и в других (k) слагаемых (почему бы и нет) ↑ из иных сумм вида $(x+1)^a + (x-1)^a$

МН-75

б) мы доказали, что $f(x)$ - четная $\Rightarrow$
$f(x) = f(-x)$

подставим ноль в x: $f'(x) = k(f(x+1) + f(x-1))$:
$0 = k \cdot (f(1) + f(-1))$
$0 = k \cdot (f(1) + f(1))$
$0 = 2k \cdot f(1)$
$2k > 0 \Rightarrow f(1) = 0$ Ответ: $f(1) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга

ШИФР	М11 - 116

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 класса,
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1267460
Фамилия Имя Отчество

М11-76

1	2	3	4	5	Σ
20	10	18	20	5	73

Задача 1

Ст. Вовы $x + y = n$ } Вместе выручали

Ст. Любы $a + b = n$

① Системка: $2x + 9b = 20$

② Вторая: $3y + 4a = 26$

$x + y = n$

$a + b = n$ $\Rightarrow x + y = a + b \Rightarrow y = n - x$, $a = n - b$

① $3(n - x) + 4(n - b) = 26$; ② $2x + 9b = 20$

$7n - 3x - 4b = 26$; $x = \frac{20 - 9b}{2}$

Подставим 2 в 1:

$7n - 3 \cdot \frac{20 - 9b}{2} - 4b = 26$

$14n - 60 + 27b - 8b = 52$

$14n + 19b = 112$

$0 \le x \le n$

Проверка $n = 8$ — больше?

$b = 112 - 14 \cdot 8 = 0$

$x = \frac{20 - 9 \cdot 0}{2} = 10$

$x \le n \Rightarrow 10 \le 8$ — ложь $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет целого решения $\Rightarrow$

Ответ: они ошиблись $\Rightarrow$ дети ошиблись

Задача 4

(X_1) рыцарь: $\frac{2}{3}$ — 100% правда

(X_2) лжецы: $\frac{1}{3}$ — 0,75 ложь, 0,25 правда

A — житель ответил правду на 1 и 2 вопросы, B — житель соврал на 3 вопр.

$P(A/X_1) = 1 \cdot 1 = 1$ (рыцарь всегда правду)

$P(A/X_2) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$

$P(A) = P(X_1)P(A/X_1) + P(X_2)P(A/X_2) =$

$P(A) = \frac{2}{3} + \frac{0,0625}{3} = \frac{2,0625}{3} = 0,6875$

$P(B/X_1) = 0$ (рыцарь не врёт)

$P(B/X_2) = 0,75$

$P(A \cap B/X_1) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$P(A \cap B/X_2) = 0,25^2 \cdot 0,75 = 0,125 \cdot 0,75 = 0,046875$

$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0,046875$

$P(A \cap B) = \frac{0,046875}{3} = 0,015625$

1

М11-76

$P(A|B) = \frac{0{,}015625}{0{,}6875}$ $\quad \frac{1}{64} : \frac{11}{16} = \frac{1}{44}$

$0{,}015625 = \frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$ (+)

Задача 2

$\sqrt{a-x} = x-b$ | ОДЗ: $a-x \geq 0$, $x-b \geq 0$

$a-x = (x-b)^2$ $\quad x \leq a$, $x \geq b$

$x^2 - 2bx + b^2 = a - x$ $\quad b \leq x \leq a$

$x^2 - 2bx + b^2 + x - a = 0$ $\quad a \geq b$

$x^2 + (1-2b)x + (b^2 - a) = 0$

$D = (1-2b)^2 - 4(b^2-a) = 1 - 4b + 4b^2 - 4b^2 + 4a$

$D = 4(a-b) + 1$

т.к. $a \geq b$, $D > 0$ +

$a - b \geq 0$, $D > 1$ при $a > b$; $D = 1$ при $a = b$

$x_{1,2} = \frac{-(1-2b) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{4(a-b)+1}}{2}$

$x - b = -\sqrt{a-x} \leq 0$

$a - x \geq 0$ $\quad x - b \leq 0$

$x = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{4(a-b)+1}}{2}$

$t = \sqrt{4(a-b)+1} \geq 1 \ (a \geq b)$

$x_1 = \frac{2b-1+t}{2}$, $x_2 = \frac{2b-1-t}{2}$

(1) $x_2 < b \leq x_1$

$\frac{2b-1-t}{2} < b$

$2b - 1 - t < 2b$

$a > b$ всегда x_2 — посторонний

(2) $x_1 \geq b$ $\quad x_1 \leq a$

$\frac{2b-1+t}{2} \geq b$ $\quad \frac{2b-1+t}{2} \leq a$

$-1 + t \geq 0$

$t \geq 1$

x_1 — решение

(3) $a < b \Rightarrow$ оба корня не в ОДЗ

или $x - b < 0 \Rightarrow$ 2 лишних | $\Rightarrow$ условие выполн. только при $a > b$

Ответ: $a > b$

Задача 3

$z=0$ (горизонтальная плоскость)

$A_1=(0;0;R)$, $A_2=(2R;0;R)$ $A_3=(R;\sqrt{3}R;R)$ — что это за точки? откуда взялись координаты?

Центр верхнего шара $C=(x;y;z)$

Условие касания

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-R)^2=(R+r)^2$ (для A_1,A_2,A_3)

Касание 4 шара с шарами A_1, A_2, A_3 на $z=R$ (высота)

Если 4 шар касается плоскости $z=0$ и [illegible]

центр координат $z=r$

Касание с A_1

$(x-0)^2+(y-0)^2+(r-R)^2=(R+r)^2$

$x^2+y^2+(r-R)^2=(R+r)^2$

$x^2+y^2-2rR=2rR$

$x^2+y^2=4rR$

То же самое для A_2, A_3

Из A_1 $x^2+y^2=4rR$

A_2 $(x-2R)^2+y^2=4rR$

Из 1 вычитаем 2

$(x-2R)^2-x^2=0$

$-4Rx+4R^2=0$

$x=R$

Из 1 уравнения

$R^2+y^2=4rR$

$y^2=4rR-R^2$

Третье ур. $(x-R)^2+(y-\sqrt{3}R)^2=4rR$

$0+(y-\sqrt{3}R)^2=4rR$

Т.к. $y^2=4rR-R^2 \longrightarrow y^2-2\sqrt{3}Ry+3R^2=4rR$

Подставим y^2 из первого $(4rR-R^2)-2\sqrt{3}Ry+3R^2=4rR$

$4rR+2R^2-2\sqrt{3}Ry=4rR$

$y=\frac{R}{\sqrt{3}}$

Из $y^2=4rR-R^2$

$\frac{4R^2}{3}=4rR$

$r=\frac{R}{3}$ — max r 4 шара, который можно поместить так, чтобы он касался [illegible] шаров

Ответ: $\frac{R}{3}$

3

M11-76

Черновик

Задача 5

а) $P(-x+1) = P(1-x)$

$P(-x-1) = P(-(x+1))$

$Q(x) = P(-x) \to Q(x) = -P(x)$

$R(x) = P(x) + P(-x)$ – чётная часть P

$S(x) = P(x) - P(-x)$ – нечётная часть

Дан $-x$: $-xP(-x) = k[P(-x+1) + P(-x-1)]$

$P(x) - P(-x) = \frac{[R(x) + S(x)]}{2} - [R(-x) + S(-x)] = R(x) + S(x)$ ... R чётн

$R(-x) = R(x)$ S нечётная $S(-x) = S(x)) = R(x) + S(x) + R(x) - S(x) = 2R(x)$

$R(-t) = R(t) \Rightarrow R(-x+1) = R(x-1)$ и $R(-x-1) = R(x+1)$, а S нечёт

$S(-x+1) = -S(x-1)$

$S(-x-1) = -S(x+1)$

$2xR(x) = 2k[R(x+1) + R(x-1)]$

$xR(x) = k[R(x+1) + R(x-1)]$

левая часть

$xP(x) - (-x)P(-x) = x[P(x) + P(-x)]$

правая часть

$k[P(x+1) + P(x-1) - P(-x+1) - P(-x-1)]$

Подставим $P = R + S$

$P(x-1) - P(-x-1) = [R(x-1) + S(x-1)] - [R(x+1) - S(x+1)] =$

$= R(x-1) - R(x+1) + S(x-1) + S(x+1)$

Сумма

$[R(x+1) - R(x-1) + R(x-1) - R(x+1)] + [S(x+1) + S(x-1) + S(x-1) +$

$+ S(x+1)]$

$x\,2S(x) = 2k[S(x+1) + S(x-1)]$

$xS(x) = k[S(x+1) + S(x-1)] \to R$

б) Рис

$P(1) + P(1) = 0$ если

$x = 0$, но $P(-1) = P(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(1) + P(1) = 0$

$2P(1) = 0$

$P(1) = 0$

Ответ: 0

Нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга

ШИФР	М11 - [illegible]

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов,
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1267347

1	2	3	4	5	Σ
20	10	18	20	10	78

МИ-77

лист 1

Задача 1

Обозначим сколько листов всего n

Вовочка на каждом листе делал либо 2 снежинки, либо 3 звездочек)

Пусть a листов со снежинками (тогда снежинок 2a)

Пусть b листов со звездочками (тогда звездочек 3b)

тогда $a+b=n$

Мишка на каждом листе делал либо 3 снежинки либо 4 звездочки

Пусть c листов со снежинками (тогда снежинок 3c)

Пусть d листов со звездочками (тогда звездочек 4d)

тогда $c+d=n$

По условию $2a+3c=20$ (1)

$3b+4d=26$ (2)

Пусть

$b=n-a,\ d=n-c$

Подставим это во (2)

$3(n-a)+4(n-c)=26$

$7n-3a-4c=26$ (3)

~~7n=3a+4c~~

(1):

$2a=20-3c \Rightarrow 20-3c$ - четно $\Rightarrow c$ четно

~~2a=20-3c →~~

Проверим возможные c (неотрицательные, чтобы a тоже было $a\geq 0$) $c=0 \Rightarrow a=10$

$c=2 \Rightarrow a=7$

$c=4 \Rightarrow a=4$

$c=6 \Rightarrow a=1$

Подставим в (3) и найдем n.

1. $a=10, c=0$:

$7n=26+3\cdot 10+4\cdot 0=56 \Rightarrow n=8$

Но тогда $b=n-a=8-10=-2$ - невозможно

2. $a=7, c=2$:

$7n=26+21+8=55 \Rightarrow n=\frac{55}{7}$ - не целое

3. $a=4, c=4$:

$7n=26+12+16=54 \Rightarrow n=\frac{54}{7}$ - не целое

4. $a=1, c=6$:

$7n=26+3+24=53 \Rightarrow n=\frac{53}{7}$ - не целое

Вывод: во всех случаях получается противоречие, значит таких

М11-77

лист 1 лист 2

подсчетов, при данных правилах быть не может

Ответ: да, они ошиблись в подсчетах, получить невоз-
можно 20 снежинок и 26 звездочек.

Задача 2.

$\sqrt{a-x} = x-b$

1 Когда Вовочка переписал его так $a-x=(x-b)^2$ он потерял условие знака правой части. В исходном уравнении обязательно
$x-b \geq 0 \Rightarrow x \geq b$, так как $\sqrt{a-x} \geq 0$.
При этом из $a-x=(x-b)^2$ автоматически следует $a-x \geq 0$, так что условие $a-x \geq 0$ не теряется, теряется только $x \geq b$.
Значит, ~~лишними~~ будут ровно те корни кв. ур-я, которые меньше b

2 $a-x=(x-b)^2$

$(x-b)^2+x-a=0$

~~$x^2+(1-2b)x$~~

$x^2+(1-2b)x+(b^2-a)=0$

$x_{1,2}=\frac{2b-1\mp\sqrt{4(a-b)+1}}{2}$

Относительно b: $x_{1,2}-b=\frac{-1\mp\sqrt{4(a-b)+1}}{2}$.

Для меньшего корня $x_1-b=\frac{-1-\sqrt{4(a-b)+1}}{2}<0$ всегда (если корни сущ.)
значит $x_1 > b$ всегда, т.е. он всегда лишний.

Для большего корня $x_2-b=\frac{-1+\sqrt{4(a-b)+1}}{2} \geq 0$, тогда и только тогда, когда $\sqrt{4(a-b)+1} \geq 1$.

$4(a-b)+1 \geq 1$.

$a-b \geq 0$.

$a \geq b$.

Ответ: ~~Вывод~~: чтобы ровно один корень был лишним: 1 корень меньше b (это всегда x_1), 2 корень больше либо равно b (x_2 действ. проходит условия исходного ур-я), это выполняется тогда и только тогда когда $a \geq b$ (при $a=b$: $x_1=b-1$ ~~лишний~~, при $a>b$ аналогично).

М11-77

лист 3

Задача 3

Пусть 3 одинаковых шара радиуса R лежат на плоскости z=0 и касаются ее, значит их центры на высоте R: z=R. Т.К. они попарно касаются расстояние между их центрами равно 2R, то в проекции на плоскость центры образуют р/с треугольник со стороной 2R 1

4 шар радиуса r лежит между ними и плоскостью. Чтобы его радиус был максимален, он должен касаться всех 3 шаров и плоскости, а его центр будет строго под центром треугольника (в силу симметрии), на высоте z=r

Расстояние от ~~цент~~ центра р/с треугольника до вершин (его описанный радиус $p=\frac{2R}{\sqrt{3}}$

Расстояние между центром малого шара и центром любого большого шара ~~будет~~ R+r, по теореме Пифагора

$p^2+(R-r)^2=(R+r)^2$

Подставим p: $\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2+(R-r)^2=(R+r)^2$ для какого треугольника?

$\frac{4R^2}{3}+(R^2-2Rr+r^2)=R^2+2Rr+r^2$

$\frac{4R^2}{3}-2Rr=2Rr$

$\frac{4R}{3}=4Rr$

$r=\frac{R}{3}$

Ответ: наибольший возможный радиус 4 шара $\frac{R}{3}$

Задача 4.

Пусть K - выбран рыцарь (доля $P(K)=\frac{2}{3}$), он всегда говорит правду

L выбран лжец (доля $P(L)=\frac{1}{3}$), он говорит правду вероятностью 0,25 и лжет с вероятностью 0,75.

A событие на первые 2 вопроса он ответил правду

По формуле Байеса: 1. вероятность события A

$P(A|K)=1$

М11-77

имеет

$P(A|L) = (0{,}25)^2 = \frac{1}{16}$

$P(A) = P(A|K)P(K) + P(A|L)P(L) = 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{33}{48}$

2 вероятность что он лжец при условии A

$P(L|A) = \frac{P(A|L)P(L)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{33}{48}} = \frac{1}{33}$

3 вероятность что на 3 вопрос он солжет

если это рыцарь то вероятность лжи 0

если это лжец то вероятность лжи $0{,}75 = \frac{3}{4}$

$P(\text{лжи на 3 вопрос}|A) = P(L|A)\frac{3}{4} = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$

+

~~Задача № 5~~

~~Пусть $P(x)$ это многочлен и для некоторого натур. K вып~~

~~колнено~~

~~$xP'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$~~

Задача 5

Многочлен $P(x)$ при некотором натур. k удовлетворяет

$xP'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$

~~Доказать~~

1. Доказать $P(x)$ — четная

Противное: $P(x)$ не явл-ся четной

Предположим противное пусть $P(x)$ — нечетная, тогда

с $P(x)$ есть ненулевая нечет. часть

Пусть ее степень равна n и старший член равен ax

и у x есть степень n, где n — нечет. число. Почему ст. член имеет нечет. степень?

Рассмотрим старшие члены обеих частей ур-я

Левая часть $xP'(x) \approx x(anx^{n-1}) = anx^n$

Правая часть: $P(x+1) + P(x-1) \approx a((x+1)^n + (x-1)^n) \approx 2ax^n$

Значит $k(P(x+1) + P(x-1)) \approx 2kax^n$

Этого достаточно?

М11-77

лист 5

$an = 2ka \Rightarrow n = 2k$ - чет., а n по предположению нечет $\Rightarrow$ противоречие

Сл-но нечет частей нет, $P(x)$ - четная функция - ч.т.д

2 Найдем $P(1)$

Подставим $x=0$ в исходное тождество:

$0P'(0) = k(P(1)+P(-1))$

$P(1)+P(-1)=0$

Но $P(x)$ четная $\Rightarrow P(-1)=P(1)$, тогда $2P(1)=0$

Ответ: $P(x)$ - четная функция, $P(1)=0$ $P(1)=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 49

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1266583

1	2	3	4	5	Σ
20	10	15	15	5	65

М11-79 (лист 1)

Задача 1

Пусть Вовочка потратил x листов на снежинки (по 2) и $n-x$ на звёздочки (по 3). $(x \le n)$

Любочка y листов на снежинки (по 3) и $n-y$ на звёздочки (по 4). $(y \le n)$

Зная, что они вырезали 20 снежинок и 26 звёздочек, составим систему

$$\begin{cases} 2x+3y=20 \ (1) \\ 7n-3x-4y=26 \ (2) \end{cases}$$

(1) $x=10-1{,}5y$; $10-1{,}5y \ge 0 \Rightarrow y \le 6{,}6\overline{6}$.

y должно быть чётным, чтобы x было целым, т.е. $y \in \{0; 2; 4; 6\}$

(2) подставим (1): $7n-3(10-1{,}5y)-4y=26$

$14n+y=112$

При $y=0$, $x=10$: $14n=112 \Rightarrow n=8 \Rightarrow x>n$ – не уд.

При $y=2$; $x=7$: $14n+2=112 \Rightarrow n=\frac{55}{7}$ – не целое – не уд.

При $y=4$; $x=4$: $14n+4=112 \Rightarrow n=\frac{54}{7}$ – не целое – не уд.

При $y=6$; $x=1$: $14n+6=112 \Rightarrow n=\frac{53}{7}$ – не уд.

Не существует целых неотр. x и y и натурального n, чтобы выполнялись все условия, значит ребята ошиблись.

Ответ: ребята ошиблись.

Задача 2.

$\sqrt{a-x}=x-b$ ОДЗ: $\begin{cases} a \ge x \\ b \le x \end{cases}$ | т.е. допустимые решения должны лежать на отрезке $b \le x \le a$

уравнение после возведения в квадрат: $a-x=x^2-2bx+b^2$

$x^2+(1-2b)x+(b^2-a)=0$

чтобы ур-е имело 2 корня $D=(1-2b)^2-4(b^2-a)=4a-4b+1>0 \Leftrightarrow a-b>-\frac{1}{4}$

$x=b-0{,}5\pm 0{,}5\sqrt{4a-4b+1}$

меньший корень всегда строго меньше b, а зн. не уд. $x \ge b$ и явл. лишним.

Больший корень уд. $x \ge b$ тогда и только тогда, когда $a \ge b$. В этом случае он автоматически уд. $x \le a$, т.е. явл. допустимым решением данного ур-я.

Ответ: $a \ge b$

(Лист 2) М11-79

Задача 3

Центры 3 соприкасающихся шаров составляют равносторонний треугольник со стороной $2R$, все центры на высоте R

Четвертый шар радиуса r касается:

касается их => центр на высоте r всех 3-х шаров => расстояние от каждого центра равно $R+r$

Центр 4-го шара находится над центром Δ. Расстояние от центра Δ до вершины $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

По теореме Пифагора:

для какого треугольника?

$$(R+r)^2=(R-r)^2+\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$r=R\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$$

?

Ответ: $r_{max}=R\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$

Задача 4.

$\frac{2}{3}$ – рыцари (только правда)

$\frac{1}{3}$ – лжецы (лгут с вероятностью 0,75)

Вероятность правдивых ответов на 2 вопроса

✓ для рыцаря – 1

✓ для лжеца – $(0,25)^2=\frac{1}{16}$

По формуле Байеса:

$$P(\text{рыцарь})=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}}=\frac{32}{33},\quad P(\text{лжец})=\frac{1}{33}$$

Вероятность правды на 3 вопрос

$$P=\frac{32}{33}\cdot 1+\frac{1}{33}\cdot 0,25=\frac{129}{132}$$

Ответ: $\frac{129}{132}=\frac{43}{44}$

Надо найти вероятность лжи $1-\frac{129}{132}=\frac{1}{44}$

Задача 5 (Лист 3) N11-79

$xP'(x) = k(P(x+1)+P(x-1))$

а) Правая часть - чётная функция (сумма значений в симметричных точках), т.к. при замене x на $-x$ значение $P(x+1)+P(x-1)$ не изм.
Левая часть содержит множитель x (т.к. x - нечетная функция), значит $P'(x)$ - нечетная, тогда $P(x)$ - четная;

изменится

ч.т.д

б) Подставим $x=0$ в исходное тождество.

$0 = k(P(1)+P(-1))$

Т.к. $P(x)$ четная, то $P(-1)=P(1) \Rightarrow 2kP(1)=0 \Rightarrow P(1)=0$

Ответ: б) $P(1)=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 115

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1263967

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	20	10	80

М11-115

Задача

№1

Задача №1

Пусть a – листов Вовочка потратил на снежинки, b листов на звёзды, а Любочка – x листов на снежинки и y листов на звёзды. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a+3x=20 \ (1) \\ 3b+4y=26 \ (2) \\ a+b=x+y \ (3) \end{cases}$$

(1)+(2): $2a+3b+3x+4y=$ [illegible]

$5x+6y$ [illegible]

$b=$ [illegible]

Подставим b в (2)

$138-15x-18y+4y=26$

$138-15x-14y=26$

$15x+14y=112$

Правая часть уравнения делится на 14, следовательно левая также должна делиться на 14

$15x+14y \equiv_{14} 0$

$x \equiv_{14} 0$

Значит $x=14k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

Подставим $k=1$ [illegible] и посмотрим на выражение (1) $2a+42=20$

$2a=-22$

$a=-11$ – противоречие, значит

$k \neq 1$

Так как функция [illegible] возрастающая, то при $k>1$ количество листов a также будет отрицательным, значит k может быть равен только нулю. Тогда $2a+0=20$ $a=10$ $x=0$

$$\begin{cases} a=10 \\ x=0 \\ 3b+4y=26 \\ a+b=x+y \end{cases} \quad \begin{cases} 3b+4y=26 \\ [illegible] \end{cases} \quad \begin{aligned} 3b+40+4b&=26 \\ 7b&=-14 \\ b&=-2 \end{aligned}$$

противоречие

Следовательно 20 снежинок и 26 звёздочек они получить не могли. Они ошиблись

Ответ: ошиблись

M11-115

Задача №2

$\sqrt{a-x} = x-b$

$a-x \geq 0$ $\qquad$ $x-b \geq 0$

$a-x=(x-b)^2 \geq 0$, так что фактически истинным лишним корнем — это нарушение условия $x-b \geq 0$, т.е. корни $x<b$

Решим ур-е.

$a-x=(x-b)^2 \iff x^2+(1-2b)x+b^2-a=0$

$D = 1-4b+4b^2-4b^2+4a = 4(a-b)+1$

$x_{1,2} = b-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(a-b)+1}$

Сравним с b

$x_1 = b-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4(a-b)+1} < b$

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4(a-b)+1} < 0$, значит x_1 не является корнем уравнения

Чтобы x_2 был корнем уравнения, нужно чтобы $x_2 \geq b$, т.е.

$\sqrt{4(a-b)+1} \geq 1 \iff 4(a-b)+1 \geq 1 \iff a \geq b$

При таком условии $D \geq 1 > 0$ значит уравнение имеет 2 корня и x_1 является лишним корнем.

Ответ: при $a \geq b$

М11-115

Задача №3

Пусть плоскость Oxy, C_1 C_2 C_3 - центры больших шаров $C_1(0,0,R)$ $C_2(2R,0,R)$ $C_3(R,\sqrt{3}R,R)$

3 одинаковых шара радиуса R лежат на плоскости и попарно соприкасаются, значит центры находятся на высоте R, $z=R$

Расстояния между центрами равно 2R

Следовательно проекции центров шаров на плоскость образуют вершины равностороннего треугольника со стороной 2R

4й шар лежит между 3мя большими шарами и плоскостью. Чтобы его радиус был минимальным, он должен касаться ~~трех~~ всех 3х шаров

Центр этого шара должен лежать в центре $\triangle C_1C_2C_3$ и перпендикулярно плоскости $z=0$

Координаты центра $(R, \frac{\sqrt{3}R}{3})$

Пусть r - радиус маленького шара, он касается плоскости $z=0$, тогда центр имеет координату $z=r$

S - центр малого шара

$S=(R, \frac{\sqrt{3}R}{3}, r)$

$SC_1=R+r$

$SC_1^2=\frac{4}{3}R^2+(R-r)^2$

$SC_1^2=(R+r)^2$

$SC_1^2=\frac{4}{3}R^2+(R-r)^2=(R+r)^2$

$r=\frac{R}{3}$

Ответ $\frac{R}{3}$

М 11-115

Задача №4

Пусть C - событие - „Рыцарь" $P(C)=\frac{2}{3}$

Пусть V - событие - „Лжец" $V(C)=\frac{1}{3}$

O - событие, что на первые 2 вопроса сказали правду

R - событие, что на третий вопрос нельзя солгать

1) Вероятность того, что выбран лжец при условии O

- Рыцарь всегда говорит правду $P(O|C)=1$
- Лжец говорит правду с вероятностью $\frac{1}{4}$ вне зависимости от вопросов $\Rightarrow P(O|V)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

По формуле Байеса

$$P(V|O)=\frac{P(V)\cdot P(O|V)}{P(C)\cdot P(O|C)+P(V)\cdot P(O|V)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}}{\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}}=\frac{1}{33}$$

2) Вероятность ~~того~~ лжи на 3-й вопрос

Для рыцаря она всегда равна 0

Для лжеца - $\frac{3}{4}$

Поэтому $P(R|O)=P(V|O)\cdot P(R|V)+P(R|C)\cdot P(C|O)=\frac{1}{33}\cdot\frac{3}{4}+\frac{32}{33}\cdot 0=\frac{3}{132}=\frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$ +

M11 - 115

Задача №5

а) $x \cdot P'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$

Заметим, что к равны многочлены при равных степенях аргумента равны. Рассмотрим старший коэффициент слева

$x \cdot a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = a_n \cdot n \cdot x^n$

1) Рассмотрим старший коэф справа:

$k \cdot (a_n x^n + a_n x^n) = 2k \cdot a_n x^n$ Откуда?

Тогда $a_n \cdot n \cdot x^n = 2k \cdot a_n x^n$, откуда $n = 2k$

$n = k \in \mathbb{Z}$, $n \equiv 0 \pmod 2$. Рассмотрим $P(x+1) + P(x-1)$

Так как коэф-ты при степенях знакочередующиеся, к $P(n)$ степени сокращаются и остаются только чётные степени.

Нет

Тогда $k(P(x+1) + P(x-1))$ - чётная функция, т.е. содержит только чётные степени. Тогда $P(x)$ - также чётная функция.

Заметим, что $y = x$ нечётная функция. Тогда $P'(x)$ также должна быть нечётной, а при умножении двух нечётных функций получается чётная функция.

Если $P'(x)$ - нечётная, то $P(x)$ - чётная, т.к. в производной все степени понижаются на единицу.

А если P(x) не явл-ся чётной или нечётной?

Доказано

б) Рассмотрим при $x = 0$

$0 \cdot P(0) = k \cdot (P(1) + P(-1))$

$0 = k \cdot (P(1) + P(-1))$

$P(1) + P(-1) = 0$

$2P(1) = 0 \quad (P(1) = P(-1))$

$P(1) = 0$

Ответ: 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 117

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов,
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1276443

M11-117

1	2	3	4	5	Σ
20	10	–	20	5	55

1) Введём обозначения:

	Любочка	Вовочка
звёздочки	d	b
снежинки	c	a

Тогда получим систему ур-ий:

$$\begin{cases} 2a+3c=20 \\ 3b+4d=26 \\ a+b=c+d \end{cases}$$

Проанализируем $2a+3c=20$. $2a=0 \pmod 2$, тогда значит $3c$ – чёт., c – чёт., не превосходящее $\frac{20}{3}$. Тогда $c\in\{0;2;4;6\}$, тогда $a=\frac{20-3c}{2}$ принимает значения $10, 7, 4, 1$.

Проанализируем $3b=26-4d$. Левая часть делится на 3, значит и правая тоже. Тогда $d=2 \pmod 3)$ т.к. $26\equiv 2 \pmod 3$. При этом $26-4d\geq 0$, значит $d\leq 6$. Тогда $d=2$ или $d=5$. Тогда $b=6$ или $b=2$.

Переберём 8 возможных вариантов.

a	b	c	d
10	6	0	2
10	6	0	2
7	6	2	2
7	6	2	2
4	2	4	5
4	2	4	5
1	2	6	5
1	2	6	5

Не при одной комбинации равенство $a+b=c+d$ не выполняется

Ответ: они ошиблись

M11 - 117

2) $\sqrt{a-x} = x-b$

$a-x \geq 0$, $x-b \geq 0$

$a-x = (x-b)^2 \geq 0$, так что единственный источник лишних корней – это нарушение условия $x-b \geq 0$, т. е. $x < b$

Решение ур-ия:

$a-x = (x-b)^2 \Leftrightarrow x^2+(1-2b)x-(b^2-a)=0$

$D = (1-2b)^2 - 4(b^2-a) = 4(a-b)+1$

$x_{1,2} = \dfrac{2b-1 \pm \sqrt{4(a-b)+1}}{2} = b - \frac{1}{2} \pm \sqrt{4(a-b)+1}$

Сравним с b

$x_1 = b - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4(a-b)+1} < b$, значит x_1 не является корнем ур-ия

Чтобы x_2 подходил, нужно $x_2 \geq b$

$\sqrt{4(a-b)+1} \geq 1 \Leftrightarrow 4(a-b)+1 \geq 1$, значит $a \geq b$

При таком условии $D \geq 1 \geq 0$, значит 2 корня и x_1 – не подходит

Ответ: $a \geq b$

M11 - 117

4) Пусть k – событие „житель-рыцарь" $P(k) = \frac{2}{3}$

L – событие „житель-лжец" $P(L) = \frac{1}{3}$

T – событие „на первые два вопроса был дан правильный ответ"

B – событие „на третий вопрос житель солжёт"

Вероятность того, что выбран лжец, учитывая событие T:

Рыцарь всегда говорит правду $P(T|k) = 1$.

Лжец говорит правду на первые два вопроса с вероятностью $\frac{1}{16}$, $P(T|L) = \frac{1}{16}$

По формуле Байеса $P(L|T) = \dfrac{P(L)\cdot P(T|L)}{P(k)\cdot P(T|k) + P(L)\cdot P(T|L)}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}}{\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}} = \frac{1}{33}$$

Отсюда $P(k|T) = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}$

Вероятность лжи на 3-ем вопросе:

Для рыцаря вероятность солгать равна 0, для лжеца – $\frac{3}{4}$, поэтому

$$P(B|T) = P(L|T)\,P(B|L) + P(k|T)\,P(B|k) = \frac{1}{33}\cdot\frac{3}{4} + \frac{32}{33}\cdot 0$$

$$= \frac{3}{132} = \frac{1}{44}$$

Ответ: $\frac{1}{44}$ (+)

M11 - 117

5) б) Т.к. функция чётная, то можно рассмотреть равенство при $x=0$

$0 \cdot P(0) = k(P(1) + P(-1)) \mid : k$

$P(1) + P(-1) = 0$, т.к. функция - чёт., то получим

$2P(1) = 0$, отсюда $P(1) = 0$

Ответ: 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 120

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов,
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1269391

М11-120

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	0	5	55

Д1

1. Заметим, что у Люби получается больше фигур с одного листа. Заметим, что она делает нечетное кол-во снежинок, а Вова - четное.
В итоге у них получилось 20 снежинок, 20 : 2 => Люба использовала четное количество листов, чтобы получить четное произведение. Рассмотрим возможные варианты:
Люба взяла:
① 2 листа - $2 \cdot 3 = \cancel{12}\ 6$
② 4 листа - $4 \cdot 3 = 12$
③ 6 листов - $6 \cdot 3 = 18$
④ 0 листов - $0 \cdot 3 = 0$

=> Вова взял
① $(20-6):2$ - 7 листов
② $(20-12):2$ - 4 листа
③ $(20-18):2$ - 1 лист
④ $(20-0):2 = 10$ листов

Больше взять не получится, получили перебор ~~звезд~~ снежинок.
Теперь перейдем к звездам:
В случае ④ Люба должна взять минимум 10 листов, получив $10 \cdot 4 = 40$ звезд, это слишком много.
В случае ① разница в кол-ве листов для звезд должна быть $7-2=5$ в пользу Люби. Возможные варианты:
5 и 0 : общее кол-во звезд: $5 \cdot 4 = 20$ - не хватает
6 и 1 : Если у Люби 6 листов, то звезд: $6 \cdot 4 = 24$, у Вовы 3, общ. кол-во $= 24+3=27$ перебор
7 и 2 : Если у Люби 7 листов, то звезд: $7 \cdot 4 = 28$ - перебор
Чем дальше продолжать, т.к. сумма будет еще больше
Случай ②. Кол-во листов должно быть одинаково, и при этом четно, т.к. кол-во фигур за один лист у Вовы нечетно.
2 и 2 кол-во звезд: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 8 + 6 = 14$ - мало
4 и 4 : кол-во звезд: $4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 16 + 12 = 28$ - много
6 и 6 : кол-во звезд: $6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 24 + 18 = 42$ - много
Чем дальше продолжать, т.к. сумма будет еще больше.
Случай ③. У Вовы должно быть на 5 листов больше. Рассмотрим варианты:

У Люби	У Вовы	
1	6	$1 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 4 + 18 = 22$ - мало
3	8	$3 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 12 + 24 = 36$ - много

Дальше нет смысла рассматривать, сумма будет увеличиваться. Можно сделать вывод, что ребята ошиблись в подсчетах.
Ответ: ошиблись

M11-120

2. $\sqrt{a-x}=x-b$

$\sqrt{a-x}\geq 0 \Rightarrow x-b\geq 0 \Leftrightarrow b\leq x$

$(x-b)^2=a-x$

$(x-b)^2\geq 0$ при $x\in R \Rightarrow a-x\geq 0 \Leftrightarrow a\geq x$

Объединяем:

$b\leq x\leq a$

$a-x=(x-b)^2$

$a-x=x^2-2bx+b^2$

$x^2-2bx+x+b^2-a=0$

$D=(2b-1)^2-4(b^2-a)=4b^2-4b+1-4b^2+4a=4a-4b+1$

$x_1=\frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2}$

$x_2=\frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2}$

Если не выполняется условие, что $b\leq x\leq a$, то корень подходить не будет

5. б) Предположим, что $P(x)$ - четная ф-ция

Рассмотрим $P(0)$:

$0=k(P(1)+P(-1))$

т.к. k - натур. число, то можно ~~пр~~ разделить обе части на него

$P(1)+P(-1)=0$

Зная, что $P(x)$ - четная ф-ия, можно сказать, что $P(x)=P(-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(1)=P(-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(1)+P(1)=0$

$2P(1)=0$

$P_1=\frac{0}{2}=0$

Ответ: 0

М11-120

4) ~~Рассмотрим вероятности~~

4. Т.к. рыцарей $\frac{2}{3}$ жителей, а лжецов – $\frac{1}{3}$, то P, что случайно выбранный житель лжец $= \frac{1}{3}$

Если житель соврет на 3 вопрос – значит, что он лжец, потому что рыцари не лгут.

Лжецы лгут с $P = 0,75 = \frac{3}{4}$, значит они говорят правду с $P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

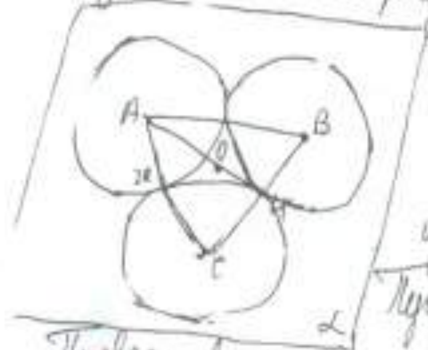
Используем произведение вероятностей, т.к. вероятности зависимы.

$$P = \underbrace{\frac{1}{3}}_{P_{\text{того, что случайно выбранный житель – лжец}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{P_{\text{правды с 1 вопроса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{P_{\text{правды с 2 вопроса}}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{P_{\text{вранья с 3 вопроса}}} = \frac{3}{3 \cdot 64} = \frac{1}{64}$$

Ответ: $\frac{1}{64}$ (–)

3. Рассмотрим наше построение сверху

Получается такой рисунок:



Если окружности ~~[illegible]~~ в одной ~~[illegible]~~ касаются друг друга, то радиусы, проведенные к т. касания лежат на одной прямой. Поэтому получился $\triangle ABC$ со стороной $= 2R$

Пусть O – центр искомой окр.

Проведу высоту, медиану и биссектрису из т. A $= AH$

По т. Пиф для $\triangle AHC$:

$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$

По свойству медианы $\frac{AO}{OH} = \frac{2}{1} \Rightarrow AO = \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Теперь рассмотрим шары с $R = O_1A$ и $r = O_2O$

AO – общая касательная касающихся шаров $\Rightarrow$

$\Rightarrow AO = ~~[illegible]~~\ 2\sqrt{O_1A \cdot O_2O} = 2\sqrt{Rr}$

$AO = 2\sqrt{Rr} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

$4Rr = \frac{4R^2}{3}$

$r = \frac{4R^2}{3 \cdot 4R} = \frac{R}{3}$

Ответ: $\frac{R}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 100

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1201500

Σ	1	2	3	4	5	
50	0	—	20	20	10	М11-100

№1 В = Вовочка Л = Любочка сн - снежинки зв - звездочки

Допустим они оба взяли по 1 месту ⇒ у В 2сн, а у Л 3сн → всего 6 сн - недобор. Надо 20 сн

Пусть по 2 места → 4сн + 6сн - недобор

Пусть по 3 места → 6сн + 9сн - недобор

Пусть по 4 места → 8сн + 12 сн - подойдет, но нужно посчитать звездочки, если по 4 место → 12 зв у В и 16 зв у Л = 28 зв перебор

Далее, чем больше они местов будут брать, тем больше будет ~~то~~ становиться кол-во сн и зв → Она ошиблась в подсчетах

ответ: ошиблась

М 11 - 100

Задача

На острове $\frac{2}{3}$ Рыцари → $\frac{1}{3}$ лжецы

Лжецы врут в 75% → говорят правду в 25%

Житель сказал Правда, Правда, ложь

Пусть R - рыцарь Λ - лжец A - на первые 2 вопроса отв правду

Дано $P(R) = \frac{2}{3}$ $P(\Lambda) = \frac{1}{3}$

$P(\text{правда} / R) = 1$ $P(\text{правда} / \Lambda) = \frac{1}{4}$ →

$P(A/R) = 1 \cdot 1 = 1$

$P(A/\Lambda) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Тогда $\frac{P(A/R) \cdot P(R)}{P(A/R) \cdot P(R) + P(A/\Lambda) \cdot P(\Lambda)} = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3}} =$

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{48}} = \frac{33}{48}$

Тогда $P(R/A) = \frac{32/48}{33/48} = \frac{32}{33}$, $P(\Lambda/A) = 1 - \frac{32}{33} = \frac{1}{33}$

Вер-ть соврать на 3 вопрос при условии A

$P(\text{врет} / A) = P(\text{врет} / R) \cdot P(R/A) + P(\text{врет} / \Lambda) \cdot P(\Lambda/A)$

$P(\text{врет}/R) = 0$, $P(\text{врет}/\Lambda) = \frac{3}{4}$

Представим

$P(\text{врет}/A) = 0 \cdot \frac{32}{33} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{44}$ +

Ответ: $\frac{1}{44}$

Лист 2/5

М11-100

№5

а) Предположим, что $P(x)$ - многочлен. Разложим его на четную и нечетную части

$$P(x) = E(x) + O(x)$$

где $E(-x) = E'(x) + O'(x)$

Представим тождество:

$$x(E'(x)+O'(x)) = k(E(x+1) + O(x+1) + E(x-1) + O(x-1))$$

Заметим что

1) $E(x+1)+E(x-1)$ - четная т.к. E четная

2) $O(x+1)+O(x-1)$ - нечетна т.к. O нечетная

с другой стороны $xE'(x)$ - нечетная, а $xO'(x)$ - четная.

$$\Rightarrow \begin{cases} xO'(x) = k(E(x+1)+E(x-1)) & \text{(четные части)} \\ xE'(x) = k(O(x+1)+O(x-1)) & \text{(нечетные части)} \end{cases}$$

Почему так можно делать

р/м ур-ие первое: слева - нечет, справа - чет.

Единственная ф-ия одновременно четна и нечетная = тождественная нуль

?

$xO'(x) \equiv 0 \Rightarrow O'(x) \equiv 0 \Rightarrow O(x) \equiv C$

Но $O(x)$ нечетная $\rightarrow O(0) = 0$ и $O(-x) = -O(x)$

Это возможно только если $C=0 \Rightarrow O(x) \equiv 0$, и

$P(x) = E(x)$ - четная чтд

Лист 3/5

№5 б) т.к. $P(x)$ четная, то $P(-x) = P(x)$

Подставим $x = 0$, в исходную

$$0 \cdot P(0) = k(P(1) + P(-1))$$

Но, $P(-1) = P(1)$ – получаем $\rightarrow 0 \cdot k(P(1) + P(-1)) = 2k(P(1))$

т.к. $k \in N$, то $k \neq 0 \rightarrow P(1) = 0$

Ответ: б) 0

Лист 4/5

M11-100

M11-100

с 3

При максимальновозможном радиусе малого круга он касается всех трех больших

$$4R^2 = x^2 + x^2 - 2\cos(120^\circ)x^2$$

$$4R^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

По т. Пифагора $(R+r)^2 = (R-r)^2 + x^2$

$(R+r-(R-r))(R+r+R-r) = x^2$

$2r \cdot 2R = x^2 \Rightarrow 4r = \frac{x^2}{R} \Rightarrow r = \frac{x^2}{4R} = \frac{\frac{4R^2}{3}}{4R} = \frac{R}{3}$

Ответ: $\frac{R}{3}$

Лист 5/5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	M11 - 103

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов,
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1181447

МФ-103

1	2	3	4	5	Σ
0	5	20	20	7	52

Задача 5

Почему так можно записать?

Откуда?

А так можно?

?

Задание 4)

$\frac{2}{3}$ x – рыцари (всегда говорят правду)

$\frac{1}{3}$ x – лжецы (в 75% врут)

R – житель рыцарь,

L – житель лжец

A – на 2 вопроса ответ правдивый

$P(R) = \frac{2}{3}$ $\quad P(L) = \frac{1}{3}$

$P(\text{правд} \mid R) = 1$ $\quad P(\text{правди} \mid L) = \frac{1}{4}$

$P(A \mid R) = 1 \cdot 1 = 1$

$P(A \mid L) = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$

$P(R|A) = \dfrac{P(A|R) \cdot P(R)}{P(A|R)\,P(R) + P(A|L)\,P(L)} = $ [illegible]

$=$ [illegible]

$P(R|A) =$ [illegible]

$P(L|A) = 1 -$ [illegible]

Вероятность, что житель ответит на 3-й вопрос

$P(\text{лжец} \mid A) =$ [illegible]

Ответ: [illegible]

МН-103

Задача 3

Три максимально возможных радиуса [illegible] касания всех окружн.

$4R^2 = r^2 + r^2 - r\cos \ldots$ [illegible]

$4R^2 = 3r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Теор. Пифагора

$(R+r)^2 = (R-r)^2 + r^2$

$R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + r^2$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow r = \frac{R^2}{4R} = \ldots = \frac{R}{3}$

Ответ: $\frac{R}{3}$

МН-103

Задача

ОДЗ: $a - x \geq 0 \Rightarrow x \leq a$

$x - b \geq 0 \Rightarrow b \leq x$

$a - x = x^2 - 2bx + b^2$

$x^2 + x(1 - 2b) + (b^2 - a) = 0$

$D = (1 - 2b)^2 - 4(b^2 - a) = 1 - 4b + 4b^2 - 4b^2 + 4a = 4a - 4b + 1 > 0$

$x_{1,2} = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{4a - 4b + 1}}{2}$

$\sqrt{a - a} = a - b = 0$

$(a - x) = (x - b)^2$

$x_1 = a \quad x_2 = a - 1$

$\frac{2b - 1 + \sqrt{4a - 4b + 1}}{2} \geq b$

$\frac{2b - 1 + \sqrt{4a - 4b + 1}}{2} \leq a$

$\sqrt{4a - 4b + 1} \leq 2a$

Итак: условие при котором ровно один корень совпадает [illegible]

[illegible] для которых $a = b$

ИИ-103

Задача

Нет, не ошиблась и вот пример

снежинки:

Петя: 3·6 } за снежинку потратили 2 р

Вова: 1·1

П-6 р

В-2 р

звездочки

Петя: 2·4

Вова: 6·3 } за звезд потратили 4 р

П-2

В-6

У обоих одинаковое количество монет

В-8 р П-8 р

Ответ нет не ошиблась. Вот пример

алабуга
особая экономическая зона

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 94

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1258880

Олимпиада КФУ профиль „Математика" №11-94

11 класс, заключительный этап

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	0	80

Задача 1.

Пусть кол-во листов, которые Вовочка потратил на вырезание снежинок x, а всего у него листов n, тогда листов, кот он потратил на вырезание звездочек $n-x$.

Пусть кол-во листов, которые Людочка потратила на вырезание снежинок y, тогда листов, кот. она потратила на звездочки $n-y$ (т.к. нат. кол-во листов у них одинак)

Составим систему ур-ний:

$$\begin{cases} 2x+3y=20 & (1) \\ 3(n-x)+4(n-y)=26 & (2) \end{cases}$$

Если эта система не имеет решений, значит они ошиблись в подсчетах.

1) $2x+3y=20$

Решаем в целых числах, где $x \geq 0$ и $y \geq 0$:

из ур-ния $\Rightarrow$ $x \leq 10$, $y \leq 6$.

Рассмотрим все возможн y:

$y=0$: $2x=20 \Rightarrow x=10$

$y=1$: $2x=17$ нет реш в $\mathbb{Z}$

$y=2$: $2x=14 \Rightarrow x=7$

$y=3$: $2x=11$ нет реш в $\mathbb{Z}$

$y=4$: $2x=8 \Rightarrow x=4$

$y=5$: $2x=5$ нет реш в $\mathbb{Z}$

$y=6$: $2x=2 \Rightarrow x=1$

Получили 4 возможн реш, подставим во (2):

1) $3(n-10)+4n=26$

$7n=56$ $n=8$

$n = 8$ не подход, т.к $n \geq x$, $n \geq y$, а $x = 10$ N11-94

2) $3(n-7) + 4(n-2) = 26$

$7n - 21 - 8 = 26$

$7n = 55$ нет реш в $\mathbb{Z}$

3) $3(n-4) + 4(n-4) = 26$

$7n - 12 - 16 = 26$

$7n = 54$ нет реш в $\mathbb{Z}$

4) $3(n-1) + 4(n-6) = 26$

$7n - 3 - 24 = 26$

$7n = 53$ нет реш в $\mathbb{Z}$

Получ, у системы нет реш в $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ они ошиблись

Ответ: ошиблись.

Задача 2.

$\sqrt{a-x} = x - b \iff \begin{cases} a - x = (x-b)^2 & (1) \\ x - b \geq 0 \end{cases}$

Решим (2): $x^2 - 2bx + b^2 = a - x$

$x^2 + x(1-2b) + b^2 - a = 0$

$D = (1-2b)^2 - 4(b^2 - a) = 1 - 4b + 4b^2 - 4b^2 + 4a =$

$= 1 - 4b + 4a$

если $D < 0$ - реш нет, лишних корней нет

если $D = 0$: $x = \frac{2b-1}{2}$, тогда $x - b = \frac{-1}{2} < 0$ - лишний корень

из 1 корня 1 явл лишним $\Rightarrow D = 0$ явл ответом

$1 - 4b + 4a = 0 \Rightarrow 4b = 1 + 4a$

если $D > 0$: $x_{12} = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{1-4b+4a}}{2}$ тогда

$x_{12} - b = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4b+4a}}{2}$ один из $x_{12} - b$ точно явл лишним

т.к. $\frac{-1 - \sqrt{1-4b+4a}}{2}$ всегда < 0

$\Rightarrow$ чтобы найти, при каких a и b ровно 1 корень лишний, нужно, чтобы $x_2 - b \geq 0$

Лист 2

N11:94

Найдем, когда $\frac{-1+\sqrt{1-4b+4a}}{2} \geq 0$:

$$-1+\sqrt{1-4b+4a} \geq 0$$

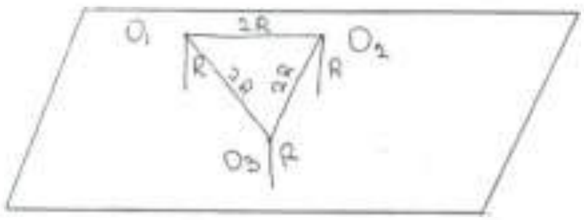
$$\sqrt{1-4b+4a} \geq 1$$

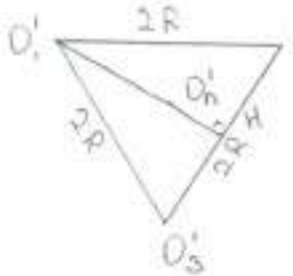
$$1-4b+4a \geq 1 \Rightarrow 4a-4b \geq 0$$ - при $\forall a, b$ $D>0$.

Ответ: $4b=1+4a$; $4a-4b \geq 0$ - при таких a и b

Задача 3.

На рисунке справа изображены центры шаров с рад R: O_1; O_2; O_3. Расст м/у ними $2R$, а от них до плоскости R.

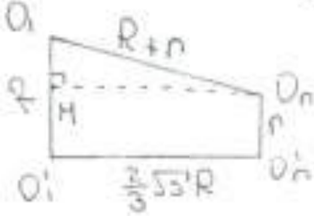




- Рассмотр. проекцию на плоскость горизонтальную. Проекция центра четвертого шара O_n' лежит в центре $\triangle O_1'O_2'O_3'$

Найдем $O_1'O_n'$: Пусть H - точка, в ком приходит высота из O_1', тогда по т. Пифагора $O_1'H=\sqrt{3}R$

$$O_1'O_n' = \frac{2}{3}O_1'H = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$$



- Рассмотрим такую картинку. тут r - радиус четвертого шара

По т. Пифагора для $\triangle O_nHO_1$:

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \frac{4}{3}R^2$$

$$\cancel{R^2}+2Rr+\cancel{r^2} = \cancel{R^2}-2Rr+\cancel{r^2}+\frac{4}{3}R^2$$

$$4Rr = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow r=\frac{1}{3}R$$ - max радиус четвертого шара

Ответ: $r=\frac{1}{3}R$

N11-94

Задача 4

Рыцари $-\frac{2}{3}$ лжецы $-\frac{1}{3}$

Р: Правда -1 Л: Правда: $\frac{1}{4}$

Ложь -0 Ложь: $\frac{3}{4}$

Найдем вероятность услышать правду в первый раз у случ. выбранного жителя:

$\frac{2}{3}$ (выбрали Р) $+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ (выбрали Л, сказал правду) $=\frac{9}{12}$

Если услышали правду, то $\frac{2}{3}:\frac{9}{12}=\frac{8}{9}$ - вероятность, что это Р и $\frac{1}{9}$ - что это Л.

Рассмотрим ситуацию, когда житель сказал 2 правды: вероятность сказать вторую правду после 1ой:

$\frac{8}{9}$ (это Р) $+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}$ (это Л, сказал правду) $=\frac{33}{36}$

при этом вероятность, что это Р: $\frac{8}{9}:\frac{33}{36}=\frac{32}{33}$

а вероятность, что это Л: $\frac{1}{33}$

На третий вопрос можно получить ложь, если это Л, и он скажет ложь: $\frac{1}{33}\cdot 3/4=\frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$ (7)

Задача 5

$x P'(x)=k(P(x+1)+P(x-1))$

а) $P(x)$ - четная ф-ция: по опр: если $(P(x))=(P(-x))$, то $P(x)$ - четная. Из этого следует, что, если $P'(x)=P'(-x)$, то $P(x)$ - четная (угол наклона касательной в каждой точке одинаковый) $(x^2+1)'=((-x)^2+1)'$ x^2+1 не яв-ся четной

Докажем это: $P'(x)=\dfrac{k(P(x+1)+P(x-1))}{x}$

$P'(-x)=\dfrac{k(P(-x+1)+P(-x-1))}{-x}=\dfrac{k(-P(x-1)-P(x+1))}{-x}=$?

$=\dfrac{k(P(x+1)+P(x-1))}{x}\Rightarrow P'(-x)=P'(x)$ ч.т.д.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 125

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов,
заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1180853

М11-125

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	20	5	75

№1

Пусть каждому выделят x листов

Вова:

a листов $\Rightarrow$ 2a снежинок

x - a листов $\Rightarrow$ 3(x-a) звездочек

Люба:

b листов $\Rightarrow$ 3b снежинок

x - b листов $\Rightarrow$ 4(x-b) звездочек

Итого

$\begin{cases} 2a+3b=20 \\ 3(x-a)+4(x-b)=26 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a+3b=20 \\ 7x-3a-4b=26 \end{cases}$ Из первого ур-я:

$a=\frac{20-3b}{2} \Rightarrow b$ - четное ; $b=0;2;4;6$, тогда $(a;b)$ -

$(a,b)=(10;0),(7;2),(4;4),(1;6)$.

Подставлем во второе ур-е

$x=\frac{26+3a+4b}{7}$, единственное целое $x=8$ получается при

$x=(10;0)$ но тогда $a>x$, что неверно $\Rightarrow$ подсчеты неверны

№2

$\sqrt{a-x}=x-b$, имеет смысл при $x\in[b-a]$, т.е. $a\geq b$

$a-x=(x-b)^2$; $a-x=x^2-2xb+b^2$; $x^2-2xb+x+b^2-a=0$

$D=4(a-b)+1>0$ при $a\geq b \Rightarrow$ оно всегда имеет 2 различных корня

. Меньший корень всегда строго меньше b и поэтому не удовлетворяет условию $x-b\geq0$,

. Больший корень лежит в промежутке $[b;a]$ и удовлетворяет исходному уравнению

$\Rightarrow$ Ровно 1 корень является лишним при только при $a\geq b$

1/3

М11-125

№3

3 шара попарно касаются друг друга ⇒ центры шаров образуют правильный треугольник со стороной $2R$, расположенный на высоте R над плоскостью.

Расстояние от центра треугольника до любой вершины

$\rho = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Пусть радиус маленького шара $= r$, его центр находится на высоте r над плоскостью и на расстоянии $R+r$ от вершин треугольника

$$(R+r)^2 = \rho^2 + (R-r)^2 = \frac{4R^2}{3} + (R-r)^2$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = \frac{4R^2}{3} + (R-r)^2 \Rightarrow 4Rr = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

Ответ: $\frac{R}{3}$

№4

Рыцари всегда говорят правду, их $\frac{2}{3}$ города.

Лжецы врут с вероятностью $\frac{3}{4}$, их $\frac{1}{3}$ города

Человек дважды сказал правду

$$P(\text{лжец} \mid 2 \text{ правды}) = \frac{0{,}25^2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + 0{,}25^2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1/48}{33/48} = \frac{1}{33}$$

Если он лжец, то он соврет с вероятностью $\frac{3}{4}$, если рыцарь то 0.

$$P = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{44}$$

Ответ: $\frac{1}{44}$ +

2/3

M11-125

№5

Дано:

$x \cdot P'(x) = k[P(x+1) + P(x-1)]$

а) Четность

Рассмотрим $Qx = P(-x)$. Тогда $xQ'(x) = -xP'(-x)$

Подставляя $-x$ в исходное тождество, получаем, что $Q(x)$ удовлетворяет тому же уравнению что и $P(x)$

$R(x) = P(x) - P(-x)$ удовлетворяет тому же однородному уравнению.

Функция $R(x)$ нечетная Откуда?

Подстановка мономов показывает, что уравнение недопускает ненулевых нечетных многочленов, значит $R(x) = 0 \Rightarrow P(-x) = P(x)$, и $P(x)$ - четный многочлен.

б) подставим $x = 0$; $0 = k[P(1) + P(-1)]$. Так как P - четный, $P(1) = P(-1)$, откуда $2kP(1) = 0 \Rightarrow P(1) = 0$

Ответ: б) $P(1) = 0$

3/3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 89

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1262442

Фамилия Имя Отчество

М11-89

1	2	3	4	5	Σ
20	10	0	20	5	55

№1

В = 2с или 3зв

Л = 3с или 4зв

x_1 и y_1 — количество шагов потраченных Вовочкой и Любочкой соответственно для снежинок.

x_2 и y_2 — количество шагов потраченных Вовочкой и Любочкой соответственно на звездочки.

~~Неравенство~~ $x_1+x_2=y_1+y_2$

$2x_1+3y_1=20$

Данная сумма при x_1 и $y_1 \in N$ возможна при:

1) $x_1=1$ $y_1=6$
2) $x_1=4$ $y_1=4$
3) $x_1=7$ $y_1=2$
4) 10 0

$3x_2+4y_2=26$

Данная сумма при x_2 и $y_2 \in N$ возможна при:

1) $x_2=2$ $y_2=6$
2) $x_2=5$ $y_2=2$.

Т.к. $x_1+x_2=y_1+y_2$, но ни при каких значениях этих переменных из данных случаев не дают равенство x_1+x_2 и y_1+y_2, то, это означает, что Любочка ошиблась в подсчетах.

Ответ: Ошиблась.

№2

M11-89

$\sqrt{a-x} = x - b$

ограничение $\begin{cases} a-x \geq 0 \\ x-b \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq x \\ b \leq x \end{cases} \Rightarrow x \in [b; a]$

$a - x = (x-b)^2$

$a - x = x^2 - 2xb + b^2$

$x^2 - 2xb + b^2 + x - a = 0$

$x^2 + x(1-2b) + (b^2 - a) = 0$

т.к. уравнение должно иметь два корня, один из которых будет лишним, значит $D > 0$

$D = (1-2b)^2 - 4(b^2 - a) = 1 - 4b + 4b^2 - 4b^2 + 4a = 4a - 4b + 1$

$4a - 4b + 1 > 0$

$\begin{cases} 4a - 4b + 1 > 0 \\ a \geq b \end{cases}$ +

Подберу значения a и b.

Пусть $a = 2$; $b = 0$

$\begin{cases} 2 \cdot 4 - 0 + 1 > 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 9 > 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases}$

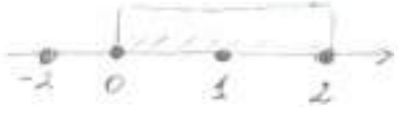
Подставлю в ~~исходное~~ уравнение $x^2 + x(1-2b) + (b^2 - a) = 0$

$x^2 + x(1-0) + (0-2) = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{array} \right.$



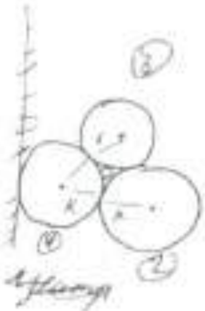
$x_1 = 1$ подходит

$x_2 = -2$ — посторонний корень

Ответ: при $a = 2$
$b = 0$.

-3

M11-89



Дано: 3 шара, R

шар r

Найти: r

Решение:

Пусть центр 1 шара в координатах $(0;0;R)$

Второго – $(2R;0;R)$

Третьего – $(R;\sqrt{3}R;R)$

Пусть центр четвертого шара в координатах $(x;y;r)$

Т.к. треугольник – равносторонний => центр треугольника будет иметь координаты x и y.

$x = \frac{0+2R+R}{3} = R$; $y = \frac{0+0+\sqrt{3}R}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}R$

Центр считается не так.

Расстояние от центра 4 шара до любого шара (горизонтальная)

$d = \sqrt{(R-0)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}R-0)^2} = \sqrt{R^2+\frac{R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

До третьего шара будет иное расстояние

(вертикальная): $R+r = \sqrt{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R-r)^2}$

Откуда ?

Из координат выше: $R - \frac{\sqrt{3}}{3}R$

$(R+r)^2 = \frac{4R}{3} + (R-r)^2$

$R^2+2Rr+r^2 = \frac{4R}{3} + R^2-2Rr+r^2$

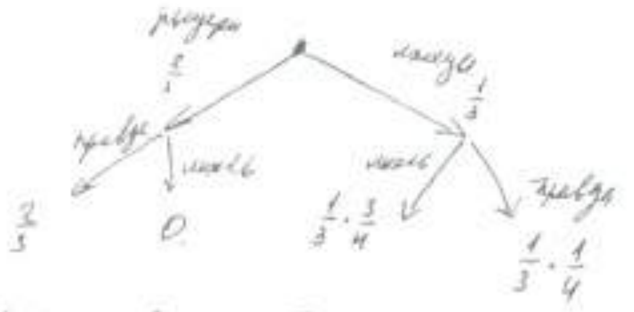
$4Rr = \frac{4R}{3}$

$r = \frac{R}{3}$

Ответ: $\frac{R}{3}$

М11-89

№4.



Вероятность что два раза будет правда $= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{2}{3} + \frac{1}{48} = \frac{32+1}{48} = \frac{33}{48}$

Вероятность, что случай житель - лжец $= \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{33}{48}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{48}{33} = \frac{1}{48}\cdot\frac{48}{33} = \frac{1}{33}$

Вероятность, что 3 ответ - ложь: $\frac{1}{33}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$

+

№5.

МН-89

а) $x p'(x) = K(P(x+1) + P(x-1))$ ①

Заменим x на $-x$:

$-x P'(-x) = K(P(1-x) + P(-1-x))$ $/\cdot(-1)$

$x P'(-x) = -K(P(1-x) + P(-1-x))$ ②

Сложим 1 и 2:

$x(P'(x) + P'(-x)) = K(-P(1+x) + P(-1+x) - P(1-x) - P(-1-x))$

~~$x(P'(x) + P'(-x)) = K(P(1+x) + P(-(x-1)) - P((x-1)+1)) - P$~~

$x(P'(x) + P'(-x)) = K(P(x+1) + P(x-1) - P(-(x-1)) - P(-(x+1)))$

$x(P'(x) + P'(-x)) = 0$?

$P'(x) + P'(-x) = 0$

$P'(x)$ - нечетная

$P(x)$ - четная

Не обязательно

б) $x P'(x) = K(p(x+1) + p(x-1))$

Пусть $x = 0$

$0 P'(0) = K(p(1) + p(-1))$

$p(1) + p(-1) = 0$

т.к. $p(x)$ - четная $(p(1) = p(-1))$

$2p(1) = 0$

$p(1) = 0$

Ответ: а) $p(x)$ - четная
б) $p(1) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 90

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1260449

1	2	3	4	5	Σ
20	0	–	20	18	58

М11-80

№1 Лист 1

Т.к. всего снежинок и звездочек четное число (26 : 2), Вовочка из одного листа вырезает 3 звездочки – н.ч. число, а Любочка 4 звездочки – чет. число, то всего Вовочка ~~–~~ вырезал четное число звездочек. Т.е. 6 или 12 или 18 или 24.

1) Если 6, то Любочка вырезала 20, т.е. потратила 20 : 4 = 5 листов, а Вовочка – 6 : 3 = 2 листа. Осталось вырезать снежинки. Вовочка ~~о~~ точно использует хотя бы 5 листов, поэтому 20 – (5 + 2) · 2 = 14 снежинок останется вырезать, причем Вовочка и Любочка потратили на них одинаковое кол-во листов, поэтому 14 ⋮ (2+3), но это не так. Противоречие!

2) Если 12, то Любочка вырезала 26 – 12 = ~~...~~ 14 звездочек, что невозможно, т.к. 14 ⋮̸ 4. Противоречие!

3) Если 18, то Любочка вырезала 26 – 18 = 8 звездочек, т.е. потратила 2 листа, а Вовочка – 18 : 3 = 6 листов. По аналогии с п.2, Любочка потратит хотя бы 4 листа на снежинки, останется вырезать: 20 – 4 · 3 = 8, но 8 ⋮̸ (2+3). Противоречие!

4) Если 24, то Любочка вырезала 26 – 24 = 2 звездочки, но 2 ⋮̸ 4 – противоречие!

Т.о. они ошиблись в подсчетах.

Ответ: да, ошиблись

№4

~~вероятность того, что человек – лжец (он должен быть лжецом, т.к. солгал далее)~~ ~~вероятность того, что лжец ответил правду на 2 вопроса~~ ~~вероятность того, что лжец солгал на 3-ий вопрос.~~

~~Ответ: [illegible]~~

М11-90

№2 Лист 2

$\sqrt{a-x} = x-b$ $\Rightarrow$ если корни есть, то $b \le x \le a$

$(x-b) + (-\sqrt{a-x}) = 0$

Эти функции монотонно возрастают на всей области определения. Их сумма равна константе, поэтому если данное уравнение имеет корень, то он единственный.

~~Рассм. $a-x=(x-b)^2$~~

• Пусть изначальное ур-ние не имеет корней. Тогда $a-x=(x-b)^2$ имеет один корень (подходящий).

$x^2-2bx+b^2-a+x=0$

$x^2-x(2b-1)+(b^2-a)=0$

$D = 4b^2-4b+1-4b^2+4a = 4a-4b+1 = 0$

$x = \frac{2b-1 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x = b-\frac{1}{2}$

~~$D=4a-4b+1>0$, то $x=b-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$, корень $x=b-\frac{1}{2}-\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$ — лишний, т.к. $x<b$. Т.к. $b \le x \le a$, то $a-b\ge0 \Rightarrow \sqrt{a-b+\frac{1}{4}} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow x=b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}} \ge b$.~~

Но $x-b = b-\frac{1}{2}-b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a-x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ корней у такого уравнения 0. Поэтому при $4a-4b=1$ усл. задачи выполняется.

• Если изнач. ур-ние имеет 1 корень, но у ур-ния $x^2-x(2b-1)+(b^2-a)=0$, $D=4a-4b+1$ больше 0.

Тогда $x=\frac{2b-1\pm\sqrt{4a-4b+1}}{2} \Rightarrow x=b-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$. Корень $x=b-\frac{1}{2}-\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$ не подходит, т.к. $x<b$. ~~$\Rightarrow$ подходящий корень $x=b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$, если $\sqrt{a-b+\frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$~~

в ~~таком~~ уравнение будет иметь не больше одного подходящего корня. ~~Это в этом случае усл. задачи не выполняется~~

~~Для того, чтобы тогда этого усл. задачи было выполнено необходимо, чтобы $x=b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}} > a$ $\Rightarrow \sqrt{a-b+\frac{1}{4}} > \frac{3}{4} \Rightarrow a-b > \frac{5}{16}$ $> b+\frac{1}{4}$ (из D) $\Rightarrow$ или, чтобы $b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}} < b \Rightarrow a-b+\frac{1}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow a<b$~~

$\Rightarrow \underbrace{b \le b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}}_{\text{верно при } a \ge b} \le a$ верно при $a \ge b$. $\Rightarrow \boxed{a \ge b}$

Ответ: $4a-4b=1$

МН-90

Лист 3.

4.

Если человек рыцарь, то вероятность правильно ответить на первые два вопроса равна $1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

вероятность того, что человек рыцарь

Если лжец, то $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$

вероятность того, что лжец скажет правду

вероятность того, что человек — лжец

~~Теперь~~ Теперь мы знаем, что человек — лжец, т.к. он солжет на 3-ий вопрос. Вероятность того, что он лжец равна $\frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{48}+\frac{2}{3}} = \frac{1 \cdot 48}{48 \cdot 33} = \frac{1}{33}$.

То вероятность того, что человек-лжец равна $\frac{1}{33}$ => вероятность того, что он солжет равна $\frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \cancel{\frac{1}{44}}$ $\frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$

(+)

N11-90

№5 Лист 4

а) $x \cdot P'(x) = k \cdot (P(x+1) + P(x-1))$ $k \in \mathbb{N}$

Пусть $P(x)$ – многочлен степени n со старшим коэф $= a_n$.

Тогда старший коэф при $(x \cdot P'(x))$ равен $n \cdot a_n$, степень ~~$x \cdot P(x)$ равна~~ равна n-ой.

Старший коэф у $k \cdot (P(x+1) + P(x-1))$ равен $2 \cdot a_n \cdot k$, степень также равна n-ой $\Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot a_n = 2 \cdot a_n \cdot k \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n$ – чётно.

~~Заметим~~ Рассмотрим некоторый ~~[illegible]~~ b-ый одночлен многочленов $P(x+1)$ и $P(x-1)$:

$a_b \cdot (x+1)^b$ и ~~a_b~~ $a_b \cdot (x-1)^b \Rightarrow a_b \cdot (x+1)^b + a_b \cdot (x-1)^b$ – многочлен, у которого все ~~[illegible]~~ коэф при чётных степенях удвоились, а при нечётных – сократились (при b – чётном) и наоборот, если b – нечётно.

Тогда ~~при [illegible]~~ все коэф многочлена $P(x+1) + P(x-1)$ будут чётные. $\Rightarrow$ все коэф многочлена $x \cdot P'(x)$ тоже будут чётными. Тогда, по той же логике, что и в начале задачи, мы получим, что все степени многочлена $P(x)$ чётные $\Rightarrow P(x) = P(-x) \Rightarrow$ многочлен $P(x)$ – чётный.

(А как же k? Он влияет ли на чётность?)

б) Пусть $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot P'(0) = k \cdot (P(1) + P(-1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (P(1) = P(-1)$ (т.к. $P(x)$ чётная$)) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = k \cdot 2 \cdot P(1) \Rightarrow P(1) = 0$, т.к. $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \neq 0$

Ответ: $P(1) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга

особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 91

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1260064

1	2	3	4	5	Σ
20	10	–	20	–	50

Нам рассматривать количество звезд: всего 2 случая, как могло было получится 26 звезд:

1. Вовочка вырезал 6 звезд, а Люба – 20 (2л; 5л)

2. Вова вырезал 18 звезд, а Люба – 8 (6л; 2л)

Рассмотрим, как могло получится 20 снежинок:

1. Люба вырезала 6 снеж., а Вова – 14 (2л; 7л)

2. Люба вырезала 12 снеж., а Вова – 8 (4л; 4л)

3. Люба вырезала 18 снеж, а Вова – 2 (6л; 1л) нельзя вырезать только ...

4. Люба вырезала 0 снеж, а Вова – 20 (0л; 10л)

Для других случаев там получается нечётное число листов

Рассмотрим сколько листов потратил каждый для звездочек:

1. Люба – 5 листов, Вова – 2 листа

2. Люба – 2 листа, Вова – 6 листов

для снежинок:

1. Люба – 2 листа, Вова – 7 листов

2. Люба – 4 листа, Вова – 4 листа

3. Люба – 6 листов, Вова – 1 лист

4. Люба – 0 листов, Вова – 10 листов

Нам нужно, чтобы кол-во листов Вовы и Любы равнялись:

Рассмотрим случай 1 для звездочек и все 4 для снежинок.

№11-91

Люба Вова

$5+2=7 \neq 2+7=9$

$5+4=9 \neq 2+4=6$

$5+6=11 \neq 2+1=3$

$5+0=5 \neq 2+10=12$

Теперь рассмотрим количество листов для 2 случая звездочек и всех 4 для снежинок

Люба Вова

$2+2=4 \neq 6+7=13$

$2+4=6 \neq 6+4=10$

$2+6=8 \neq 6+1=7$

$2+0=2 \neq 6+10=16$

Ничего не совпадает, а значит они ошиблись в вычислениях.

(При других случаях звездочек и снежинок количество снежинок, звездочек либо проходит/не доходит до нужных значений)

Ответ: Они ошиблись в вычислениях.

$\sqrt{a-x} = x-b$

Ограничения
$\left.\begin{matrix} a \geq x \\ b \leq x \end{matrix}\right] \Rightarrow b \leq x \leq a$

N11-9-1

$a-x=(x-b)^2$

$a-x = x^2-2bx+b^2$

$x^2-2bx+b^2+x-a=0$

$x^2-x(2b-1)+(b^2-a)=0$

$D=(2b-1)^2-4(b^2-a)=4b^2-4b+1-4b^2+4a=$
$=1-4b+4a$

$x_1=\dfrac{(2b-1)+\sqrt{1-4b+4a}}{2}$ (больший корень)

$x_2=\dfrac{(2b-1)-\sqrt{1-4b+4a}}{2}$ (меньший корень)

Чтобы x_1 удовл. ОДЗ нужно, чтобы
$x_1 \geq b \Rightarrow (2b-1)+\sqrt{1-4b+4a} \geq 2b$

$\sqrt{1-4b+4a} \geq 1$

$1-4b+4a \geq 1$

$b \leq a$ +

Чтобы x_2 удовл. ОДЗ нужно, чтобы $x_2 < b \Rightarrow$
$\Rightarrow (2b-1)-\sqrt{1-4b+4a} < 2b$

$-\sqrt{1-4b+4a} < 1$

$1-4b+4a > 1$

$b < a$

А значит, что при $b < a$ должно решаться уравн.

Ответ: при $b < a$.

M11-91

№4

Вер, что лжец 2 раза скажет правду: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

↙ ↘

25% 75%

Вер., что рыцарь и 2 правды: $\dfrac{1\cdot\frac{2}{3}}{1\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}} =$

$= \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{16}} = \dfrac{32}{33} \longrightarrow \dfrac{1}{33}$, что лжец.

Вер, что 3 вранье:

$\frac{1}{33}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{44}$

Ответ: $\frac{1}{44}$

⊕

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 88

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1263161

1	2	3	4	5	Σ
20	10	20	20	5	75

М11-88

№1

Пусть всего Любе и Вове было выдано x листов.
Тогда Вова на снежинки потратил k листов, а на звезды $(x-k)$ листов, а Люба на снежинки y листов, а на звезды $(x-y)$ листов.

Всего было вырезано 20 снежинок - четное число.
Рассмотрим несколько случаев: 1. Вырезала снежинки только Вова.

$2k=20$

$k=10$

2. Вырезала снежинки только Люба:

$3y=20$

нет решений, т.к. $20/3$ нацело

3. Они вырезали вместе, но у каждого было разное количество листов:

$2k+3y=20$

4. Они вырезали вместе и у них было одинаковое количество листов.

$$\begin{cases} 3y+2k=20 \\ k=y \end{cases}$$

$k=y=4$

Всего было 26 звездочек - четное число.
Рассмотрим несколько случаев аналогично снежинок:

1. Вырезал звезды только Вова:

$3(x-k)=26$

решений нет, т.к. $26/3$ нацело

2. Вырезала звезды только Люба:

$4(x-y)=26$

нет решений, т.к. $26/4$ нацело

3. Они вырезали вместе, но у них было разное количество листов:

$3(x-k)+4(x-y)=26$

4. Они вырезали вместе и у них было одинаковое количество листов:

$$\begin{cases} 3(x-k)+4(x-y)=26 \\ k=y \end{cases}$$

$7(x-y)=26$

нет решений, т.к. $26/7$ нацело

1

№11-88

Рассмотрев все случаи, можно сделать вывод, что $k \neq y$, то есть на вырезание одинаковых фигур они тратили разное количество листов. Составим систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} 2k+3y=20 \\ 3(x-k)+4(x-y)=26 \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{20-3y}{2} \\ 3x-3k+4x-4y=26 \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{20-3y}{2} \\ 7x-\frac{60-9y}{2}-4y=26 \end{cases} \Big| \cdot 2$$

$$\begin{cases} k=\frac{20-3y}{2} \\ 14x-60+9y-8y=52 \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{20-3y}{2} \\ 14x=112-y \end{cases}$$

Переберём значения y: $14x \leq 112$

чтобы правая часть делилась на 14, нужно, чтобы $y \vdots 14$, и $y \leq 112$

У нас получились такие пары $(y;x)$:

$(0;8)$
$(14;7)$
$(28;6)$
$(42;5)$
$(56;4)$
$(70;3)$
$(84;2)$
$(98;1)$

Как не подходят все случаи, т.к. во всех случаях кроме первого $y>x$, что не соответствует задаче, а в первом случае $y=0$, тогда снежинки вырезал только Вова и ему понадобится 10 листов, но если $y=0$, то $x=8$, опять не соответствует задаче.

Ответ: Они ошиблись

M11-88

№2

$\sqrt{a-x} = x-b$

$a-x=(x-b)^2$ $\qquad \begin{cases} a-x \geq 0 \\ x-b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b \leq x \leq a,\ b \leq a$

$a-x=x^2-2bx+b^2$

$x^2+(1-2b)x+(b^2-a)=0$

Корень является лишним, если он $\notin [b;a]$

Замена $x-b=y$, при этом $x-b \geq 0$

$x=b+y$ $\qquad y \geq 0$

$a-b-y=y^2$

$y^2+y+(b-a)=0$

$D=1-4(b-a)$

$y_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-4(b-a)}}{2}$ $\qquad y_2 \leq 0$ - не подходит под условие

$y_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-4(b-a)}}{2}$

Рассмотрим $y_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-4(b-a)}}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{1-4(b-a)}}{2} \geq 0$

$-1+\sqrt{1-4(b-a)} \geq 0$

$\sqrt{1-4(b-a)} \geq 1$

$1-4(b-a) \geq 1$

$-4(b-a) \geq 0$

$4(a-b) \geq 0$

$a \geq b$

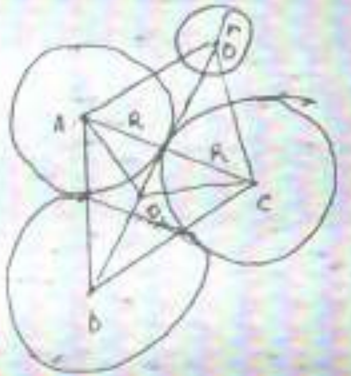
Ответ: $a \geq b$

3

М11-88

№3

Точка O_1 – это проекция центра малого шара на плоскость, в которой лежат все центры остальных трех окружностей.



$\triangle ABC$ – равносторонний со стороной $2R$

Точка O_1 проецируется в центр равностороннего $\triangle ABC$ =>

$$O_1A = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Рассмотрим $\triangle AO_1O$:

если представлять ~~одна~~ шары окружности, то малый шар как лежит на трех шарах и соприкосается с ними. Например, вид сбоку:

По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AO_1^2 + OO_1^2$$

$$(R+r)^2 = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R-r)^2$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = \frac{4R^2}{3} + R^2 - 2Rr + r^2$$

$$4Rr = \frac{4R^2}{3}$$

$$r = \frac{R}{3}$$

Ответ: $\frac{R}{3}$

М11-88

№4

Вероятность того, что случайно выбранный житель является рыцарем равна $\frac{2}{3}$, а что является лжецом $\frac{1}{3}$

Вероятность того, что житель ответит на 2 вопроса правду равна:

$= 1$ - для рыцаря

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ - для лжеца

Теперь рассмотрим вероятность, что такое событие могло произойти с лжецом: пусть $P(C/Л) = \frac{1}{16}$ - вероятность, что лжец ответит на 2 вопроса правдую, а $P(C/Р)$ - для рыцаря

$$P(Л/C) = \frac{P(Л) \cdot P(C/Л)}{P(Л) \cdot P(C/Л) + P(Р) \cdot P(C/Р)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{48} + \frac{32}{48}} = \frac{1}{33}$$

Тогда вероятность, что житель ответит на 3 вопрос ложью:

$$P = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{44}$$

Я сразу же не учитывал вероятность, что рыцарь соврет, потому что они никогда не врут.

Ответ: $\frac{1}{44}$ (+)

M11-88

№5

а) ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

б) Подставим $x=0$

$$0 \cdot P'(0) = k(P(1) + P(-1))$$

$$0 = k(P(1) + P(-1))$$

т.к. k - натуральное число, то

$$P(1) + P(-1) = 0$$

$$P(1) = -P(-1)$$

Функция $P(x)$ - четная, значит $P(-1) = P(1)$

$$2P(1) = 0$$

$$P(1) = 0$$

Ответ: б)0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга

(заполняется организатором)

ШИФР	М11 - 85

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 11 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1264745

$\frac{1}{20}\Big|\frac{2}{15}\Big|\frac{3}{5}\Big|\frac{4}{0}\Big|\frac{5}{0}\Big|\frac{\Sigma}{40}$

M11-85

№1. Пусть Вовочка из a листов вырезал по 2 снежинки, из b — звёздочки по 3, а Машенька из c листов вырезала по 3 снежинки, из d — по 4 звёздочки.

$a+b=c+d$

$2a+3c=20$ (1)
$3b+4d=26$ (2)

Заметим, что $3c\equiv 0 \bmod 3$, $20\equiv 2 \bmod 3 \Rightarrow 2a\equiv 2 \bmod 3$

$a\equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow a\equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=1,4,7,10,13,16,19\ldots$

Также т.к. $20\equiv 0 \bmod 2$, $2a\equiv 0 \bmod 2$, то $3c\equiv 0 \bmod 2 \Rightarrow c\equiv 0 \bmod 2$

Т.к. $26\equiv 0 \bmod 2$, $4d\equiv 0 \bmod 2$, то $3b\equiv 0 \bmod 2 \Rightarrow b\equiv 0 \bmod 2$

Т.к. $26\equiv 2 \bmod 3$, $3b\equiv 0 \bmod 3$, то $4d\equiv 2 \bmod 3 \Rightarrow$ т.к. $4\equiv 1 \bmod 3$, то $d\equiv 2 \bmod 3$

$a+b=c+d \Leftrightarrow$ отсюда $d-a=b-c$

(2)−(1): $3b+4d-2a-3c=6$

$3(b-c)+4d-2a=6$

$3(d-a)+4d-2a=6$

$3d-3a+4d-2a=6$

$7d-5a=6$

Можно ли подобрать такие числа? Начнём перебирать $a=1$, с шагом 3.

$a=1$: $7d=5+6=11 \Rightarrow d=\frac{11}{7} \rightarrow \varnothing$ не целое

$a=4$: $7d=20+6=26 \Rightarrow d=\frac{26}{7} \rightarrow \varnothing$

$a=7$: $7d=35+6=41 \Rightarrow d=\frac{41}{7} \rightarrow \varnothing$

$a=10$: $7d=50+6=56 \Rightarrow d=8\equiv 2 \bmod 3$ Тогда $3c=20-2a=20-20=0 \Rightarrow c=0\equiv 0 \bmod 2$

$3b=26-4d=26-32=-6 \Rightarrow b=-2 \rightarrow \varnothing$ не может быть отриц. числа.

$a=13$: ~~2a=26~~ $3c=20-2a=20-26<0$

Т.к. ~~иначе~~ $3c=20-2a$, то $20-2a\geq 0 \Rightarrow a\leq 10 \Rightarrow$ перебрали все возможные a.

Получается, что решений для такой системы, которые не отрицательные и целые, не существует, а значит, что дети ошиблись в подсчётах.

Ответ: ошиблись

МИ-85

№2 $\sqrt{a-x}=x-b$ ОГР: $\begin{cases} a-x\geq 0 \\ x-b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq a \\ x\geq b \end{cases}$

$a-x=(x-b)^2$

$a-x=x^2-2bx+b^2$

$x^2+x(1-2b)-a+b^2=0$

$D=(1-2b)^2-4(-a+b^2)=1+4b^2-4b+4a-4b^2=4a-4b+1$

• При $D=0$ будет 1 корень, который должен не удовлетворять ОГР.

• При $D>0$ будет 2 корня, один из которых должен не удовлетворять ОГР.

$D=0$: $4a-4b+1=0$

$(a-b)\cdot 4=-1$

$\boxed{a-b=-\frac{1}{4}} \Rightarrow b>a$

$x=\frac{2b-1}{2}$

нет решений $\Rightarrow$ корень лишний

ОГР: 

$D>0$: $4a-4b+1>0$

$a-b>-\frac{1}{4}$

$x_1=\frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}}{2}$

$x_2=\frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}}{2}$

Проверим ОГР

$x_1\leq a \Leftrightarrow \frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}-2a}{2}\leq 0$

$\sqrt{4a-4b+1}\leq 2a-2b+1$

$4a-4b+1\geq 0$ $2a-2b+1\geq 0$

$a-b\geq -\frac{1}{4}$ $a-b\geq -\frac{1}{2}$ $\rightarrow a-b\geq -\frac{1}{4}$

$4a-4b+1\leq 4a^2+4b^2+1-8ab+4a-4b$

$a^2+b^2-2ab\geq 0$

$(a-b)^2\geq 0$

всегда верно при $a-b\geq -\frac{1}{4}$

$x_1\geq b \Leftrightarrow \frac{2b-1+\sqrt{4a-4b+1}-2b}{2}\geq 0$

$\sqrt{4a-4b+1}\geq 1$

$4a-4b+1\geq 0$

$a-b\geq -\frac{1}{4}$

$4a-4b+1\geq 1$

$4(a-b)\geq 0$

$a-b\geq 0$

$a\geq b$

$\Leftrightarrow$ 

при $a-b\geq 0$ выполняется ОГР

$x_2\leq a \Leftrightarrow \frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}-2a}{2}\leq 0$

$\sqrt{4a-4b+1}\geq 2b-2a-1$

$4a-4b+1\geq 0$

$a-b\geq -\frac{1}{4}$

$4a-4b+1\geq 4b^2+4a^2+1-8ab-4b+4a$

$a^2+b^2-2ab\leq 0$

$(a-b)^2\leq 0$

$a-b=0$

$x_2\geq b$

$\frac{2b-1-\sqrt{4a-4b+1}-2b}{2}\geq 0$

$\sqrt{4a-4b+1}\leq -1$

$\varnothing \Rightarrow$ нет решений для остальн $\Rightarrow$ x_2 — лишний корень

Ответ: при $(a-b)\in[0;+\infty)\cup\{-\frac{1}{4}\}$ выполняется условие

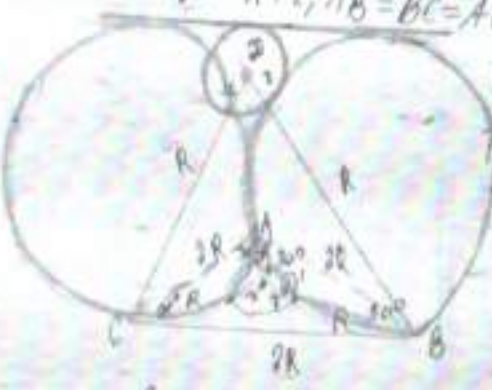
МН-85

№3.

вид сверху

Рассмотрим ~~правильный~~ тетраэдр $ABCD$

$AD = R+r$, $AB = BC = AC = 2R$



$DA \perp (ABC)$

Пусть D' - проекция D на (ABC)

т.к. ABC - равностор. Δ, то

$AD' = D'B = D'C$, AD' - биссектр $\angle CAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle D'AB = 30°, = \angle ABD' \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AD'B = 180° - 60° = 120°$

По т. косинусов для $\Delta AD'B$

$AB^2 = AD'^2 + D'B^2 - 2 \cdot AD' \cdot D'B \cdot \cos 120°$

$4R^2 = (R+r)^2 + (R+r)^2 + 2 \cdot (R+r)(R+r) \cdot \frac{1}{2}$

$4R^2 = 3(R+r)^2$

$4R^2 = 3R^2 + 3r^2 + 6Rr$

$3r^2 + 6Rr - R^2 = 0$

$D = 36R^2 + 12R^2 = 48R^2$

$r_1 = \dfrac{-6R + 4\sqrt{3}R}{6} = \dfrac{-3R + 2\sqrt{3}R}{3} = \dfrac{R(2\sqrt{3}-3)}{3}$

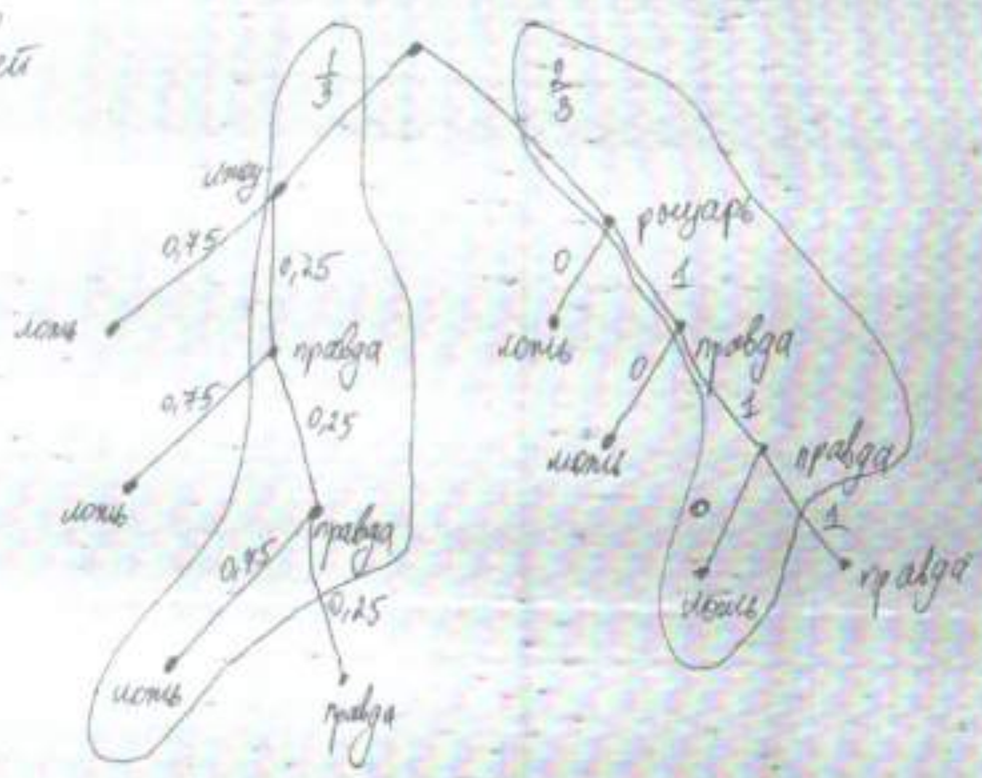
$r_2 = \dfrac{-6R - 4\sqrt{3}R}{6} < 0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $\dfrac{R(2\sqrt{3}-3)}{3}$

М11-85

№4. ~~Враг~~

Составим дерево вероятностей



Наш результат – это сумма двух вероятностей

$$\frac{1}{3}\cdot 0{,}25\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75+\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot \overset{0}{0}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{64}$$

Ответ: $\frac{1}{64}$

−

M11-85

№5. $x \cdot P'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$

а) $P(x) = P(-x)$ - ?

при $-x$: $-x \cdot P'(-x) = k(P(1-x) + P(-1-x))$

$-x \cdot P'(-x) = k(-P(x-1) - P(x+1))$

$\cancel{-}x \cdot P'(-x) = \cancel{-}k(P(x-1) + P(x+1))$

т.е. $k(P(x-1) + P(x+1)) = x \cdot P'(-x)$

Изначально:

$k(P(x-1) + P(x+1)) = x \cdot P'(x)$ $\Rightarrow P'(x) = P'(-x)$. ч.т.д.

б) $x \cdot P'(1) = k(P(2) + P(0))$, где $P'(1) = 0$

$k(P(2) + P(0)) = 0$

$k \neq 0$ $P(2) + P(0) = 0$

Тогда $P(2): 2a + b$

$P(0): b$

$\begin{cases} 2a + b + b = 0 \\ a + b = 0 \\ a = -b \end{cases}$

$P'(1) = 0$ т.к. все $x = 1$, останутся только коэффициенты, а это числа, которые уйдут

$P'(1) = 0 \Rightarrow P(1)$ - прямая вид $ax + b$

$ax + b = -b \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow P(1) = 0$

Ответ: 0

[illegible] Задача 1.

алабуга

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

[illegible] №11-[illegible]

[illegible]
[illegible] 2023-2024 учебный год

Данные участника

[illegible] [illegible]

1	2	3	4	5	Σ
0	10	—	20	5	35

M 11-139

Задача 5.

$x\cdot P'(x) = k(P(x+1)+P(x-1))$

Заметим, что слева и справа стоят коэффициенты при равных степенях равны, рассмотрим тогда $x\cdot P'(x) = x\cdot a_n\cdot x^{n-1}\cdot n$, ?
~~а коэф. $k(P(x+1)+P(x-1)) = k$~~ тогда коэф. старшего коэф. равен $a_n\cdot n\cdot x^n$ а справа $k\cdot 2\cdot a_n\cdot x^n$, получаем, что $a_n\cdot n\cdot x^n = k\cdot 2\cdot a_n\cdot x^n$,
откуда
$n = 2k$, т.к. $k \neq 0$, то $n \equiv 0 \pmod 2$. Рассмотрим $P(x+1)+P(x-1)$. Заметим, что т.к. знак перед „1" чередуется, то все нечётные степени сократятся и останутся только чётные, тогда $k(P(x+1)+P(x-1))$ — чётная функция, тогда и $x\cdot P'(x)$ — чётная функция.

не обязательно

Рассмотрим $f(x) = x$ — н/ч функцию, тогда и $P'(x)$ — тоже должна быть н/ч, а т.к. при перемножении 2-ух нечётных функций получается чётная функция. А если $P'(x)$ — н/ч функция, то первообразная $P(x)$ была чётной, т.к. степени в $P'(x)$ понизились на „1". Доказано.

Если $P(x)$ не явл-ся четной или нечетной

М11-139

Класс 3 Задача 4

[illegible]

[illegible]

Ответ: [illegible]

F

M11-139

М11-139

Лист 1 Задача 1.

[illegible]

Ответ: [illegible]