ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 61

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	998098

М8·61

№1

$n=400$

$S(n)=4$

$5S(n)=20$

$(5S(n))^2=400$

Значит $n=400$ нам подходит.

Ответ: $n=400$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

М8·61

№2

Посмотрим, что каждый может о себе сказать.

Рыцарь: • рыцарь • не лжец • не хитрец

Лжец: • рыцарь • хитрец • не лжец

Заметим, что ~~фраз~~ фразы „лжец" и „не рыцарь" ни рыцарь ни лжец не могли сказать => эти ~~фразы~~ фразы сказали хитрецы => 2 и 4 - хитрецы.

Фразу „не хитрец" лжец сказать не мог ~~фраз~~ ", а 2 хитреца мы определили => 6 - рыцарь.

1, 3, 5 - лжецы (методом исключения)

Ответ: сможет

1 - „рыцарь" 3 - „хитрец" 5 - „не лжец" - противоречий нет.

20

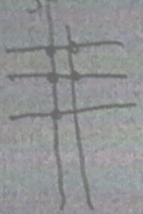
M8-61

1 – „рыцарь

№3

Пусть наибольшее кол-во покрашеных клеток $5n = 25$ (т.к. всех клеток поровну)

$5n = 25 \Rightarrow$ всех клеток по 5. 5 клеток минимум занимают 5 полос (полоса – горизонталь или вертикаль) т.к. ~~меньше~~ более компактно они не ставятся

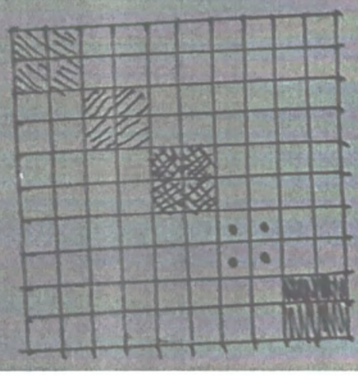


всего в квадрате 10x10

20 полос = 7

5 (цветов) · 5 (полос занимает каждый цвет) > 20

А на 20 клеток (но и на каждый цвет – есть)



– I цвет

– II цвет

– III цвет

– IV цвет

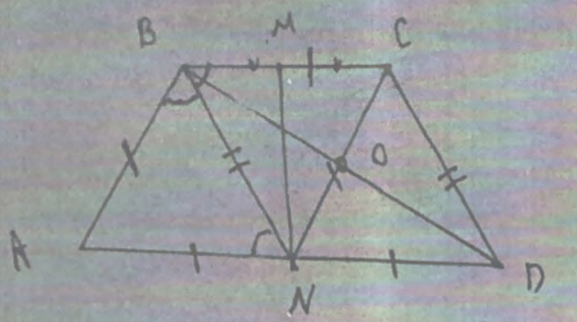
– V цвет

Ответ: 20

20

м 8-61

№4



BC ∥ AD ⇒

∠NBC = ∠ANB ⇒

△ABN - р/б ⇒ AB = AN

~~AN = ND ⇒ ND = AN~~

BC ∥ ND BC = ND ⇒ BCDN - параллелограмм ⇒ CD = BN

BC ∥ AN BC = AN ⇒ ABCN - параллелограмм ⇒ AB = CN

~~△ABN = △NCD (по 3 сторонам)~~

Значит △BCN - р/б BC = CN. ~~NB~~ NM - медиана к боковой стороне BD - диагональ параллелограмма ⇒ CN делит BD пополам и ON = OC ⇒ BO = $\frac{1}{2}$ BD - медиана к боковой стороне. А медианы к боковым сторонам треугольника равны ⇒

NM = $\frac{1}{2}$ BD - $\frac{BD}{MN} = \frac{2}{1}$

Ответ: $\frac{2}{1}$

20

Н8-61

15

поймем, что если $n \neq x^2$, то точно не получится.
ряд выглядит так: $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1}$

~~то~~ чтобы произведение числителей стало равно произведению знаменателей кол-во простых и их степеней должно совпадать. $\frac{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}}$ ← вот так.

~~до n все числа сократятся => у n все~~

степень каждого простого α (в сумме) должна быть четной ~~так~~ чтобы мы смогли разбить ее на числитель и знаменатель поровну($\alpha_1 = \alpha_2$) значит, то что у каждого простого в n степень четна => n - квадрат

Алгоритм для квадратов:
пусть $n = x^2$ найдем в цепочке такое место

$\ldots \frac{x}{x-1} \Big| \frac{x+1}{x} \ldots$

↑ перевернем все эти дроби

$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{x}$

↑ все сократится и останется $\frac{1}{x}$

$\frac{\cancel{x+1}}{x} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+1}} \cdots \frac{x^2}{\cancel{x^2-1}}$

все сократится кроме $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{1}$

и того $\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1} = 1$

Ответ: если $n = x^2$

20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 63

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1003899

M8-63

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

№1

Ответ: 2025

Проверка: сум. ц. 2025 = 9 $9 \cdot 5 = 45$ $45^2 = 2025$

№2

~~Ответ: нет, так как есть как минимум 2 возможных вариантов произнесения фраз:~~

~~1. рыц. | рыц.~~
~~2. лж. | хит.~~
~~3. хит. | лж.~~
~~4. не рыц.~~
~~5. не лж.~~
~~6. не хит.~~

Ответ: да.

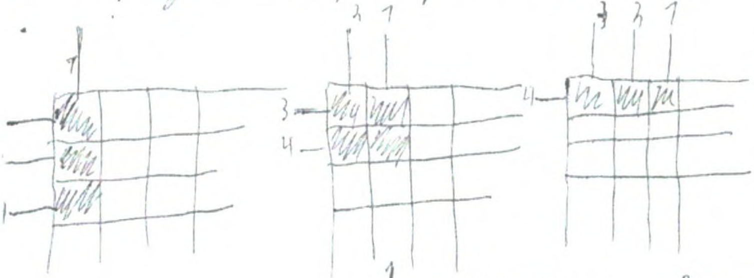
Решение: заметим, что ни рыцарь, ни лжец не могли сказать я лжец или я не рыцарь — тогда это сказали хитрецы. На утверждение я не хитрец лжецы не могли ответить, а хитрецы кончились — это сказал рыцарь, а оставшиеся 3 утверждения (я рыц., я хит., я не лж.) сказали лжецы. 20

№3

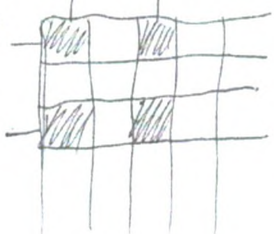
Заметим, что когда мы окрашиваем первую клетку какого-то цвета она как бы занимает строку и столбец только под свой цвет, а все последующие как минимум 1 строку или столбец.

Суммарно $10 + 10 = 20$ строк и столбцов — $\frac{20}{5} = 4$ на каждый цвет т.к. их равное кол-во.

3 различные раскраски занимающие 4 столбца или строки:

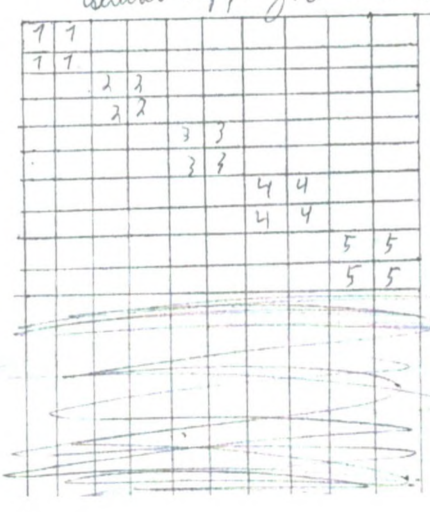


если не красить кл. одинак. цв. в одной строке или столбце то они просто расширят эти 3 варианта и ничего по кол-ву задействованных ст. и стр. не изменится:



самая эфф. значит всего $4 \cdot 5 = 20$ раск. кл.

Пример: (одинак. цифр — одинак. цвет)



Ответ: 20

20

М8-63

№5

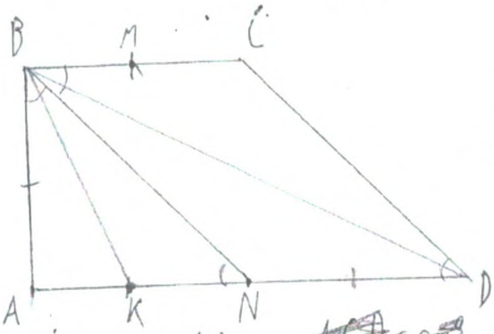
Заметим, чтобы получилось 1 нужно чтобы произведение числителей равнялось произведению знаменателей – произведение всех чисел на доске было квадратом. Тогда $m^2 = (2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)) = (n-1)!\cdot n\cdot(n-1)! = (n-1)!^2\cdot n \Rightarrow n$ – квадрат. А для любого квадрата есть алгоритм переворота: нужно перевернуть первые $\sqrt{n}-1$ дробей. ~~Т~~ Потому, что получится:

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(\sqrt{n}-1)}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(\sqrt{n}-1)\cdot\sqrt{n}}\cdot\frac{(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(\sqrt{n}+2)}{(\sqrt{n}+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{(\sqrt{n}-1)!}{(\sqrt{n}-1)!\cdot\sqrt{n}}\cdot\frac{(\sqrt{n}+1)\cdot(\sqrt{n}+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n}+1)\cdot(\sqrt{n}+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)}=\frac{n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\frac{n}{n}=1$$

Ответ: n может быть любым нат. кв. ≥ 4.

20

№4



$BC \parallel AD \Rightarrow \angle CBN = \angle BNA$ (сек. парал.) $\Rightarrow \triangle BNA$ равно[бедренный] $\Rightarrow BA = AN = ND \Rightarrow$

на середине AN поставим точку $K \Rightarrow \triangle BNK = \triangle NBM$ (т.к. $BM = NK$ и $\angle BNK = \angle NBM$) $\Rightarrow BK = MN \Rightarrow \triangle ABD$ подобен $\triangle ABK$ т.к. $\angle BAD = \angle BAK$, $\frac{BA}{AK} = 2$, $\frac{AD}{BA} = 2$ (по отношению 2 сторон и углу между ними) $\Rightarrow \frac{BD}{BK} = \frac{BA}{AK} = 2 \Rightarrow \frac{BD}{MN} = 2$

Ответ: 2.

20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 68

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1094788

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

М8-68

№1

Пусть данное число 400, значит его сумма цифр это 4+0+0=4.

$\Rightarrow 5 \cdot S(x) = 20$, где $S(x)=4$ - сумма цифр числа Артура

$\Rightarrow (5 \cdot S(x))^2 = 20^2 = 400$

Значит число 400 подходит

№2

Заметим, что лжец никогда не скажет, что он не рыцарь или что он не хитрец, т.к. будет говорить правду.

Значит четвёртый не лжец и не рыцарь (иначе бы он лгал), значит он хитрец

Аналогично со 2 (лжец сказал бы правду, а рыцарь ложь)

$\Rightarrow$ 2 - тоже хитрец

МВ-68

№2 (прод.)

Значит все остальные - рыцарь и лжецы
3-ий не рыцарь, значит лжец (он в любом случае врал, т.к. хитрецы это 2 и 4) => рыцарь среди 1, 5, 6
~~5 ий~~ 6 сказал только правду, т.к. хитрецы это 2 и 4 => 6 - рыцарь,
1 и 5 - лжецы

Ответ: да; сможет; ~~1 лжец~~ 1, 3, 5 - лжецы, 2, 4 - хитрецы, 6 - рыцарь 20

№ 5

Заметим, что изначальное произведение чисел - n, при замене дроби $\frac{a}{a-1}$ на $\frac{a-1}{a}$ для $a \in \{2, \dots, n\}$ все произведение увел. в ~~(1)~~ $\left(\frac{a-1}{a}\right)^2$ раз и уменьш. в $\left(\frac{a}{a-1}\right)^2$ раз

следов. $\frac{n}{\underbrace{\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{b-1}\right)^2 \cdot \ldots}_{\text{все замен. дроби}}} = 1$.

№5 (прод.)

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\ldots\right)^2 = n$$

$\Rightarrow$ т.к. $\frac{a}{a-1}, \frac{b}{b-1}, \ldots > 1$

$$\Rightarrow \frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\ldots = \sqrt{n}$$

т.к. все ~~х~~ дроби $\in Q \Rightarrow \sqrt{n} \in Q$ (рацион. числа) $\Rightarrow n = k^2$, где k – какое-то натуральное число, $k \geq 2$ (ведь $n \geq 4$, а $4 = 2^2$), ведь если $n \neq k^2$, то $\sqrt{n} \notin Q$

$\Rightarrow n$ – ~~это~~ квадрат натур. числа, большего 1

Теперь докажем, что для $n = k^2$ работает: Вася заменяет все дроби от $\frac{2}{1}$ до $\frac{k}{k-1}$ ($k < n \Rightarrow \frac{k}{k-1}$ точно есть на доске)

$\Rightarrow$ произв. замен. дробей – k, его кв. – $k^2 = n$

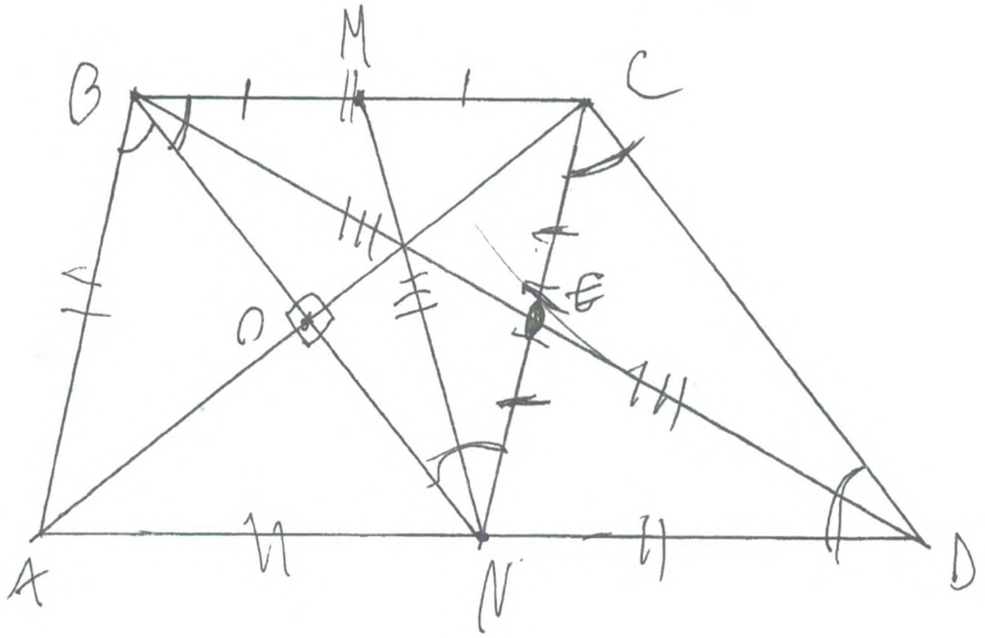
$$\Rightarrow \frac{n}{n} = 1$$

Ответ: для всех $n = k^2$, $k \in N$, $k \geq 2$

20

№ 4

МЪ 68



Т.к. AB = BC ⇒ △BAC – р/б (равнобедр. осн. AC)

т.к. ∠ABN = ∠CBN ⇒ BN – биссектриса угла ∠ABC ⇒ BN ⊥ AC (перпендикул., т.к. бисс. угла в р/б треуг. (△) это и медиана и высота (угла напротив осн.)

⇒ т.к. AO = OC, ∠AON = ∠CON = 90°

⇒ ON – высота и медиана ⇒ △NAC – р/б

⇒ AN = NC

т.к. ~~угл.~~ BC || AD ⇒ ∠ANB = ∠NBC (накрест леж. при секущей BN)

⇒

№4 (прод.) МЗ 68

$\Rightarrow \angle ABN = \angle ANB \Rightarrow \triangle ABN$ - р/б

$\Rightarrow AB = BC = CN = AN$

$\Rightarrow ABCN$ - ромб.

Т.к. $AN = ND$ (N - ~~ср. AD~~ середина (ср.) AD)

$\Rightarrow ND = BC$

$\Rightarrow$ т.к. $ND = BC$ и $BC \parallel ND \Rightarrow BCDN$ - параллелограмм

$\Rightarrow BE = ED$, $CE = EN$

т.к. $BM = MC = CE = EN$ ($BE = CN$, M - ср. BC)

$\Rightarrow$ по 2 пр. рав. $\triangle$:

$\triangle BMN = \triangle NEB$ ($BN = BN$, $\angle CBN = \angle CNB$ ($BC = CN \Rightarrow \triangle CBN$ - р/б), $BM = EN$) $\Rightarrow MN = BE = ED$

$\Rightarrow BD = BE + ED = MN + MN = 2MN$

$\Rightarrow \frac{BD}{MN} = \frac{2MN}{MN} = 2$

Ответ: $BD/MN = 2$.

20

№3 МВ-68

Пусть в 1 строке x клеток 1 цвета. Т.к. на оставшихся $(10-x)$ столбцах и $10-1=9$ строках надо разместить $4x$ клеток оставшихся цветов, то ~~10≥x~~ т.к. $9(10-x) \geq 4x$, то $90>13x$

$\Rightarrow x < \left[\frac{90}{13}\right]=6 \Rightarrow x \leq 5$ ($\left[\frac{a}{x}\right]$ — число b, что $b\in N$ и $b \leq \frac{a}{x}$, но $b+1 \geq \frac{a}{x}$; $\left\lceil\frac{a}{x}\right\rceil$ — b такое, что $b\in N$, $b \geq \frac{a}{x}$, но $b-1 \leq \frac{a}{x}$)

~~Если~~ пусть столбцов 2 цвета — a, 3 цвета b, 4 цвета c и 5 цвета d

$\Rightarrow a+b+c+d \leq 10-x$

Тогда в ~~каждом~~ каком-то столбце клеток 2 цвета $\geq \left\lceil\frac{x}{a}\right\rceil$, 3 цвета $\geq \left\lceil\frac{x}{b}\right\rceil$ и т.д.

$\Rightarrow \left\lceil\frac{x}{a}\right\rceil + \left\lceil\frac{x}{b}\right\rceil + \left\lceil\frac{x}{c}\right\rceil + \left\lceil\frac{x}{d}\right\rceil \leq 10-1=9$

$\Rightarrow$ если $x=5$, то $a+b+c+d \leq 5$, $a,b,c,d \geq 1$

$\Rightarrow$ пусть $a \leq b \leq c \leq d$ без ОО $\Rightarrow d=2$. $a=b=c=1$

$\Rightarrow 3x + \left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil \leq 9 \Rightarrow x \leq 2$

если $x=4$, то $a+b+c+d \leq 6$ либо $d=3$ $a=b=c=1$, либо $d=2$ $c=2$ $a=b=1$

№3 (прод.) М8-68

$\Rightarrow$ либо ~~$3x+(x+1)$~~ $3x+\lceil \frac{x}{3}\rceil \le 9 \Rightarrow x \le 2$

$\Rightarrow$ либо $2x+\lceil \frac{x}{2}\rceil+\lceil \frac{x}{2}\rceil \le 9 \Rightarrow x \le 2$

если $x=3$!

$\Rightarrow a+b+c+d \le 7$

$\Rightarrow$ либо $d=4$ $a=b=c=1$, либо $d=3$ $b=2$ $a=b=1$, либо $d=2$, $c=2$ $b=2$ $a=1$

$\Rightarrow$ либо $3x+\lceil \frac{x}{4}\rceil \le 9 \Rightarrow x \le 2$

либо $2x+\lceil \frac{x}{2}\rceil+\lceil \frac{x}{3}\rceil \le 9 \Rightarrow x \le 3$

либо $x+3\cdot\lceil \frac{x}{2}\rceil \le 9 \Rightarrow x \le 3$

или $x<3$, то уже $x \le 2$

$\Rightarrow$ максим. возможное x: это 3

Но при нём у 2 цветов по 1 столбцу

у ~~2-го цвета~~ ~~1 ст~~ одного цвета 2 стол.

у ~~посл~~ 2 послед. цвета 3 столбца

$\Rightarrow$ пусть клеток каждого цвета a

$\Rightarrow \underbrace{(a-1)}_{1\text{ цвет}}+\underbrace{(a-1)}_{2\text{ цвет}}+\underbrace{\lceil \frac{a}{2}\rceil}_{3\text{ цвет}}+\underbrace{\lceil \frac{a}{3}\rceil}_{4\text{ цвет}}+\underbrace{\lceil \frac{a}{3}\rceil}_{5\text{ цвет}} \le 9$

M 8-68

$\Rightarrow 2a+\lceil \frac{a}{2}\rceil + 2\lceil \frac{a}{3}\rceil \le 11 \Rightarrow a \le 3.$

$\Rightarrow 4a \le 12.$

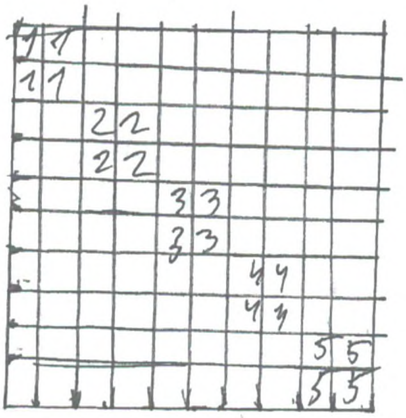
Но если $x = 2$, то клеток не больше $5\cdot x^2 \le 5\cdot 4 = 20$ (ведь со строками аналогично)

$\Rightarrow x = 2,\ a = b = c = d = 2$

$\Rightarrow$ каждый цвет — кв. 2×2

$\Rightarrow$ клеток $4\cdot 5 = 20$

Пример:



1 — 1ый цвет
2 — 2ый цвет
3 — 3ый цвет
4 — 4ый цвет
5 — 5ый цвет

Ответ: 20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 70

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1102230

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

М8-70

N1

Ответ: 400

$4+0+0=4$; $4\cdot5=20$; $20^2=400$.

М 8-70

№2

Рассмотрим 2-ого: (х – хитрец; л – лжец; р – рыцарь)

рыцарь не скажет, что он лжец

лжец не скажет, что он лжец => $\boxed{2 - x}$

Рассмотрим 4-ого:

рыцарь не скажет, что он не рыцарь => $\boxed{4 - x}$

лжец не скажет, что он не рыцарь (т.к. это правда)

Таким образом среди 1; 3; 5; 6 3л и 1р

Фразы 1, 3 и 5 могут быть произнесены как р, так и л

Рассмотрим 6-ого:

лжец не скажет, что он не хитрец (т.к. это правда)

$\boxed{6 - р}$

По методу исключения

$\boxed{1 - л}$

$\boxed{3 - л}$

$\boxed{5 - л}$

Ответ: да; л: 1; 3; 5

х: 2; 4

р: 6

70

M8-70

№3

Д-ть, что не получится закрасить больше 20.

I Д-ть, что если будет ≥3 колонок/строк одного цвета, не получится закрасить больше 20.

Предположим обратное: у одного цвета (как минимум) есть 3 колонки и у каждого цвета закрашено 5 клеток ($5\cdot5=25$ следующее число $\vdots 5$ после 20).

Вычеркнем эти 3 колонки (их расположение не имеет значения). Т.к. у этого цвета есть 5 клеток, ему принадлежат и $5:3\approx2$ строки. Вычеркнем и их.
Так. на 4 цвета осталась таблица 7×8.
По принципу Дирихле есть хотя бы 1 цвет, которому досталась 1 колонка. Вычеркнем её. Т.к. у этого цвета должно быть ≥5 клеток, ему принадлежит $5:1=5$ строк. Вычеркнем и их.
Так на 3 цвета осталась таблица 6×3
Чтоби каждому цвету принадлежало хоть сколько-то, у каждого должна быть ровно 1 строка. Рассмотрим любой из оставшихся цветов. Вычеркнем его строку. И аналогично $5:1=5$ столбцом
Так на 2 цвета осталась таблица 1×2

исходное утв. ложно

ч.т.д.

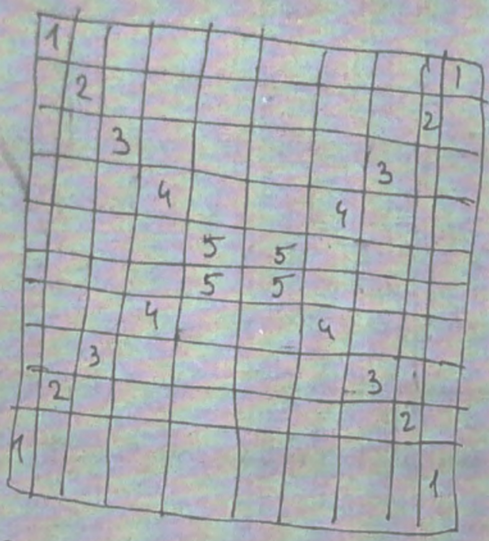
II Д-ть, что если у каждого цвета будет 2стр и 2кол., не получится закрасить больше 20.
В каждой строке цвета ≤2 закрашенных клетки, т.к. иначе цвет завладеет >2 колонками.
Итого: у каждого цвета 2 кол. в каждой ≤2 закр клетки.
Максимум закрашенных: $2\cdot2\cdot5=20$

ч.т.д.

Из I и II следует, что не получится закрасить >20.

M 8-70

Пример на 20



Ответ: 20

М8-70

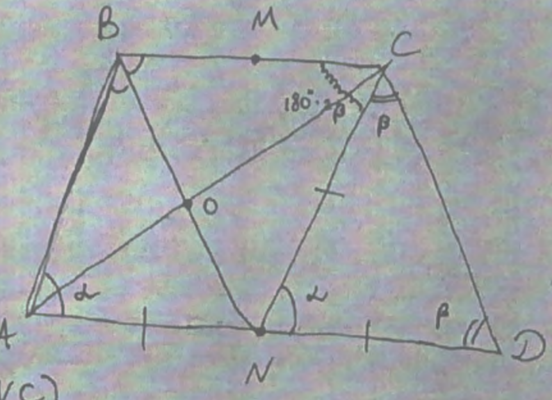
№4

1) Доп. постр. $AC \cap BN = O$

$\triangle ABC$ – р/б ($AB = BC$)

BO – l => BO – m; h

$BN \perp AC$; $AO = OC$



2) Доп. постр. CN

$\begin{cases} BN \perp AC \\ AO = OC \end{cases}$ => $\triangle ANC$ – р/б ($AN = NC$)

т.к. N – середина AD, $AN = ND = NC$

3) Пусть $\angle A = \alpha$; $\angle D = \beta$

$CN = ND$ => $\triangle NCD$ – р/б $\angle NCD = \angle D = \beta$

$\begin{cases} \angle C = 180° - \beta \text{ (трапеция)} \\ \angle NCD = \beta \end{cases}$ => $\angle BCN = 180° - 2\beta$

4) $\begin{cases} \angle BCN = \angle BCA + \angle ACN \\ \angle BAN = \angle BAC + \angle CAN \end{cases}$ т.к. $\angle BAC = \angle BCA$ (р/б), $\angle CAN = \angle ACN$ (р/б), $\angle BCN = \angle BAN$, $\alpha = 180° - 2\beta$

5) По с.у. $\triangle CND$ $\angle CND = 180° - 2\beta = \alpha$

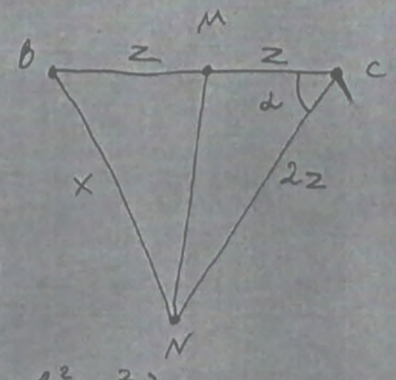
BA и CN сек AD $\angle CND = \angle BAN$ => $AB \parallel CN$

т.к $BC \parallel AN$ (по усл) $ABCN$ – пр-м $\begin{cases} AB = CN \\ AN = BC \end{cases}$

Пусть $AN = ND = AB = CN = BC = 2z$

$BN = x$

6) Выносной чертёж



т.к. M – центр BC, $BM = MC = z$

По Т cos:

$x^2 = (2z)^2 + (2z)^2 - 2(2z)(2z)\cos\alpha =$

$= 8z^2 - 8z^2 \cdot \cos\alpha$

По формуле медианы ($4m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$)

$4MN^2 = 2(2z)^2 + 2x^2 - (2z)^2 = 4z^2 + 16z^2 - 16z^2 \cdot \cos\alpha$

$MN^2 = 5z^2 - 4z^2\cos\alpha$

$MN = \sqrt{5z^2 - 4z^2\cos\alpha} = z\sqrt{5 - 4\cos\alpha}$

M 8-70

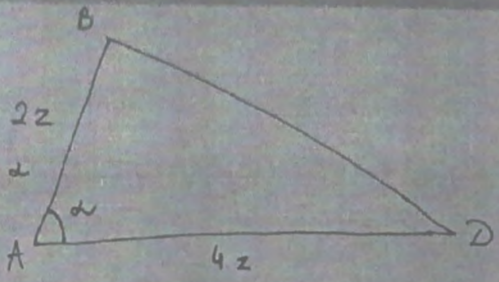
7) Выносной чертёж

По Т. cos:

$BD^2 = (2z)^2 + (4z)^2 - 2(2z)(4z)\cos\alpha$

$BD^2 = 20z^2 - 16z^2\cos\alpha$

$BD = \sqrt{20z^2 - 16z^2\cos\alpha} = 2z\sqrt{5-4\cos\alpha}$



8) $\frac{BD}{MN} = \frac{2z\sqrt{5-4\cos\alpha}}{z\sqrt{5-4\cos\alpha}} = \frac{2}{1}$

20

Ответ: $\frac{2}{1}$

М 8-70

N5

I Д-ть, что n — обязательно квадрат. (для вып. усл.)

Забудем о числителях и знаменателях и просто запишем произведение всех чисел.

Оно должно быть квадратом, т.к. потом мы разделим это произведение на 2 равные части (числ и зн)

Среди всех чисел не повторяется 2 раза только 1 и n:

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n = k^2 \quad \text{т.к} \in N \ \sqrt{}$$

$$\underbrace{\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2}}_{\in R(N)} \cdot \sqrt{n} = \underbrace{k}_{\in R(N)} \Rightarrow \sqrt{n} \in R(N)$$

n — квадрат

ч.т.д.

II Д-ть, что любой квадрат подойдёт.

Опишем методику переворачивания дробей.

$\sqrt{n} \in [1; n]$ т.к. $\sqrt{n} \in N$ и $\sqrt{n} < n$

Найдём дробь, где $\sqrt{n}$ в ~~знам~~ числителе и все до и включая её перевернём.

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1}$$

В группе перевёрнутых произведение равно $\frac{1}{\sqrt{n}}$, т.к. остальные повторяются и в числ, и в зн.

(т.е. берётся числитель первой и знаменатель посл)

А в группе не перевёрнутых ~~$\sqrt{n}$~~ $\frac{n}{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} = 1$$

ч.т.д.

Ответ: все квадраты N чисел ≥ 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 79

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1187273

М8-79

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

№1

400

1) $4+0+0=4$

2) $4 \cdot 5 = 20$

3) $20^2 = 20 \cdot 20 = 400$

Ответ: 400.

№2

Да, сможет. Лжецы: первый, третий и пятый. Хитрецы: второй и четвёртый. Рыцари: шестой. 20

Обоснование:

1) первый - рыцарь => это может быть Р, Λ и Х.

2) второй - лжец => это не Λ, ведь если это он, то он сказал правду, а они всегда лгут. Это не Р, ведь они всегда говорят только правду => это ХИТРЕЦ

3) третий - хитрец => это не Р, ведь они говорят только правду => это ЛЖЕЦ или ХИТРЕЦ

4) четвёртый - не рыцарь => это не Р, ведь они говорят только правду. Это не Λ, ведь если это он, то он сказал правду => это ХИТРЕЦ.

5) пятый - не лжец => это может быть Р, Λ и Х.

6) шестой - не хитрец => это не Λ, ведь если это он, то он сказал правду, а они только лгут => это РЫЦАРЬ или ХИТРЕЦ

Получается 2 и 4 - это точно хитрецы, а их как раз двое, значит остальные рыцари и лжецы.

Лжецами могут быть 1, 3 и 5, а их как раз трое, значит 1, 3 и 5 - это лжецы.

Остаётся 6 - это рыцарь.

Ответ: 1, 3 и 5 - лжецы; 2 и 4 - хитрецы; 6 - рыцарь.

1

№3 М8-79

1) $10 : 5 = 2$ (раза) – встречается каждый цвет ~~[illegible]~~ в строке.

2) $10 : 5 = 2$ (раза) – встречается каждый цвет ~~[illegible]~~ в столбце.

3) $2 \cdot 2 = 4$ (раза) – встречается каждый цвет в квадрате

4) $4 \cdot 5 = 20$ (кл.) – наибольшее кол-во закрашенных клеток.

1					1				
	2					2			
		3					3		
			4					4	
				5					5
1					1				
	2					2			
		3					3		
			4					4	
				5					5

Ответ: 20 клеток.   20

№45

$n > 3$

Нужно работать с числами вначале и в конце, ведь те, что по середине сокращаются друг с другом. Нужно, чтобы числительное было равно знаменателю.

Если перевернуть дробь, то останутся 2 несокращённых числа и при умножении друг на друга получится число x^2. Значит $n = x^2$.

Пример:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\ \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{7}} \cdot \frac{9}{\cancel{8}} = \frac{9}{3 \cdot 3} = 1.$$

$n = x^2$

$x > 2.$

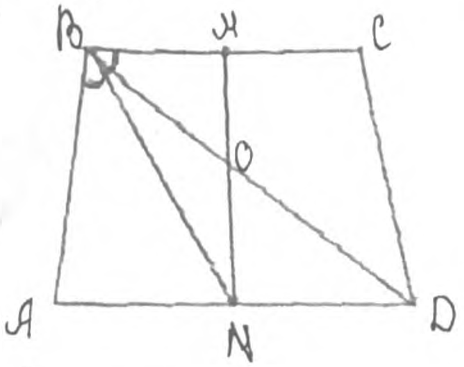
$n = 9, 16, 25, 36, 49 \ldots$

Ответ: $n = x^2$.   20

№4

М8-79

№4



Дано: $ABCD$ - трапеция, $BC=AB$, M,N - середины BC и AD, $BM=MC$, $AN=ND$, $\angle ABN=\angle CBN$, $BC \parallel AD$

Найти: $\frac{BD}{MN}$

Решение:

Рассмотрим $\triangle BOM$ и $\triangle OND$

1) $\angle BOM=\angle NOD$ (вертик. $\angle$).

2) $\angle BMN=\angle OND$ (накрест лежащие $\angle$)

$\}$ $\triangle BOM \sim \triangle NOD$ (по 1 призн).

3) $\cancel{\frac{BD}{MN}}$ $\frac{OD}{OB}=\frac{ON}{OM}$

4) $ON=\frac{OD\cdot OM}{OB}$

5) $OD=\frac{ON\cdot OB}{OM}$

6) $OM=\frac{OB\cdot ON}{OD}$

7) $ODB=\frac{OD\cdot OM}{ON}$

8) $BD=BO+OD=\frac{OD\cdot OM}{ON}+\frac{ON\cdot OB}{OM}=OD\cdot OM+ON\cdot OB$

9) $MN=MO+ON=\frac{OB\cdot ON}{OD}+\frac{OD\cdot OM}{OB}=OB\cdot ON+OD\cdot OM$

10) $\frac{BD}{MN}=\frac{OD\cdot OM+ON\cdot OB}{OB\cdot ON+OD\cdot OM}=\frac{OD\cdot OM+ON\cdot OB}{OD\cdot OM+ON\cdot OB}=1$

Ответ: $\frac{BD}{MN}=1$.

20

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 86

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1190243

1	2	3	4	5	Σ
20	4	20	20	20	84

Д.   М8-86

1

№1.

Пример:

Сумма цифр числа 400 равна 4. При умножении на 5, получается 20, а $20^2=400$ - значит подходит.

Ответ: он мог ~~за~~ написать число 400.

№2.

Заметим, что сказать о себе „я лжец" может только хитрец, если рыцарь то он соврёт, если лжец, то скажет правду. Сказать „я не рыцарь" и „я не хитрец" лжец не может ибо тогда он скажет правду, а раз эти 3 высказывания из 6 сказали точно не лжецы, то они сказали оставшиеся высказывания:

М8-8Б

2

„я рыцарь"; „я хитрец"; я не лжец. Они подходят. Осталось два высказывания „я не рыцарь" и „я не хитрец". Заметим, что рыцарь не мог сказать „я не рыцарь" он бы соврал ⇒ он сказал „я не хитрец", а „я не рыцарь" - сказал хитрец.

По приведённой выше цепочке все фразы, а точнее, кто их сказал определяются однозначно и путешественник мог определить, кто есть кто.

Ответ: да сможет.

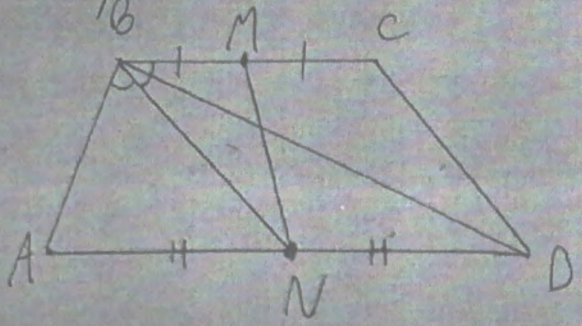
4

М8-86

№4.

3

Чертёж:



Обозначим BM т.е. $\frac{BC}{2}$ за a, тогда $BC=AB=2a$; а $MC=a$.

$BC \parallel AD$ т.к. основания трапеции $\Rightarrow \angle BNA=\angle CBN$ как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей BN. $\Rightarrow AN=AB=2a=ND=\frac{AD}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC=ND \Rightarrow NBCD$ - параллелограм т.к. стороны BC и ND равны и параллельны. $\Rightarrow$ если O - точка пересечения диагоналей параллелограмма NBCD, то $BO=\frac{BD}{2}=OD$.

Заметим, что $\triangle ABN$ и $\triangle CBN$ равны

М 8-36

по 1 признаку($AB = BC$ по условию; $\angle ABN = \angle CBN$ по условую; BN - общая) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CN = AN$ как соответственные $\Rightarrow$

$\Rightarrow CN = BC \Rightarrow \triangle CBN$ - равнобедренный.

Заметим, что $CD = \frac{CN}{2} = DN = a$ ~~т.к.~~ т.к. O - точка пересечения диагоналей параллерограма $NBCD$, и $BM = MC = a$ по условию $\Rightarrow NM$ и BD - медианы треугольника $\triangle CBN$, проведёные ~~от~~ из вершин прилежащих к его основанию, а раз он равнобедренный, то они равны из симметрии. Заметим, что $BD = BO + OD$ а раз $BO = OD$; $BD = 2BO$, в задаче требуется узнать отношение $\frac{BD}{MN}$, а раз $BD = 2BO$, а $NM = BO$, то $\frac{BD}{MN} = \frac{2BO}{BO}$, а раз $BD > 0$, то $\frac{BD}{MN} = 2$.

Ответ: 2.

20 4

М8-86

№5. 5

Заметим, что чтобы произведение было равно 1, суммарно во всех числах, что есть в числителе и знаменателе, должно быть чётное кол-во каждого простого множителя иначе как не переворачивай дроби какой, то множитель не сократится. Суммарно ~~во~~ все числа кроме 1 и n входящие в дроби встречаются по два раза т.е. числа от 2 до n-1 ⇒ в них чётное кол-во каждого простого множителя суммарно, значит, чтобы эта

М8-86

6

чётность сохранялась и раз 1-не влияет на неё в числе n должно быть чётное кол-во каждого простого множителя т.е. каждый множитель должен входить в чётной степени, а значит число n - должно быть квадратом. Заметим, что при всех n вида K^2, где K - натуральное, а $n > 3$, можно получить единицу следующим способом:
если $n = K^2$, то нам нужно перевернуть первые $K-1$ дроби, тогда итоговое произведение будет вида:

$$\frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K-1}^{\text{перевернули}} \cdot (K+1) \cdot (K+2) \cdot \ldots \cdot n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot K \cdot K \cdot (K+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)}$$

Заметим, что все числа здесь от $K+1$ до $n-1$ есть

М 8-86

и в числителе и знаменателе $\Rightarrow$ они сократятся, также все числа от 2 до $k-1$, также и в числителе и в знаменателе и сократятся, и если сократить выше описанные числа получится $\frac{1\cdot n}{k\cdot k}=\frac{n}{k^2}=1$ ибо $k^2=n$, а раз этот метод работает в общем виде, то сработает и для всех $n>3$; $n=k^2$, где k - натуральное.

Ответ: ~~для всех n~~ n могло быть равно любому квадрату ~~на~~ натурального числа кроме 1 $(1^2<3)$.

20

7

М 3-86

№3. 8

* Давайте назовём столбец, столбцом цвета i, если в нём есть хотя бы одна клетка цвета i (аналогично со строками цвета i).

Давайте заметим, что ~~если~~ ~~есть~~ клетка цвета i (i число от 1 до 5) т.е. рандомный цвет), может быть таковой только если она ~~находи~~ не находится в столбце или строке другого цвета, а если все столбцы и строки имеют свой цвет, то только если находится на пересечении ~~своего~~ строки и столбца цветов i. Заметим, что если мы начинаем закрашивать клетки по правилам из условия

М3-86

то первая клетка каждого 9
цвета (закрашиваем по одной
клетке из одного цвета т.е. циклом
одна клетка ~~перв~~ 1; одна клетка 2.....
...вторая клетка 1; вторая клетка 2
и т.д.) будет красить в свой
цвет ~~два~~ столбец и строку
(т.е. две линии клеток); вторая
клетка каждого цвета добав-
ляет либо 1 либо 2 линии своего
цвета (1 если она находится на
линии закрашенной первой клет-
кой), 2 если на пустой). Если
После второй клетки у каж-
дого цвета по 4 строки/столбца
то раз всего их 10+10=20, а закра-
шено 4·5=20, то все закрашены.
Если какие то клетки зак-

М 8-86

Юрасим 1 столбец/строку, то всего не закрашенных столбцов/строк ~~[illegible]~~ от 5 до 1. Давайте заметим, что ~~если каким, то ходом мы~~ чем больше закрашенных столбцов и строк тем больше закрашенных клеток и если мы не закрашиваем все столбцы и строки, то клетки у нас могут стоять ~~в~~ только в пересечениях тех столбцов и строк, которые есть, ведь больше мы не добавляем, и давайте заметим, что если наша цель большее кол-во закрашенных клеток, то нам нужно закрасить все столбцы и строки ибо тогда их можно

М8-86

Достиг максимума. Выше было сказано, что на 3 цикл ходов остаётся от 1 до 5 незакрашенных столбцов. Если в предыдущий ход клетка закрасила 1 столбец/строку, то в этот закрасит 1 или 2, и тем самым достигнет 4 столбцов/строк своего цвета, если же клетка закрасила 2 столбца/строки, то в этот ход уже закрашено 4 столбца, строки. Тем самым мы доказали, что к 3 ходу в у всех уже 4 мини своего цвета ⇒ ситуация или:

1) мини-столбцы и строки

М 8-86

12

Или:

2)  Во втором случае пересечений больше → 4 ⇒ макс. клеток $5 \cdot 4 = 20$

Ответ: 20.

20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 87

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1270998

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

М8-87

Задача №2.

Решение: У нас дано, что в компании из 6 человек 1 рыцарь, 2 хитреца и 3 лжеца. Их опросили. 1 сказал, что он рыцарь, 2 – он лжец, 3 – он хитрец, 4 – он не рыцарь, 5 – он не лжец, 6 – он не хитрец. Запишем кратко:

1) р 4) не р

2) л 5) не л

3) х 6) не х

20

Если подумать, то рыцарь может быть либо под номерам 1 или 5 или 6, потому что если он скажет, что он лжец/хитрец/не рыцарь он соврёт.

Лжецы в свою очередь могут быть под номерами 1, 3, 5. Если они будут под другими номерами, то они скажут правду. Вот мы нашли 3 лжецов: 1, 3, 5. ⇒ рыцарю остаётся только номер 6 из вышесказанной догадки. ⇒ Хитрецы под номерами 2 и 4.

Ответ: да сможет; рыцарь – 1, хитрецы – 2, 4, лжецы – 1, 3, 5.

Задача №1

Ответ: 400

Проверка: $4 \cdot 5 = 20$; $20^2 = 400$

Задача №3

м 8-87

Ответ: 20 клеток, каждого цвета по 4.

Объяснение: Если пораскинуть мозгами, то из условия можно понять, что клетки можно закрашивать в той строке где нет покрашеных клеток или есть клетка того же цвета и аналогично для столбцов. И самое главное после закрашивания клетки надо менять цвет, ведь сказано, что закрашеных клеток каждого цвета одинаковое кол-во.

Пример:

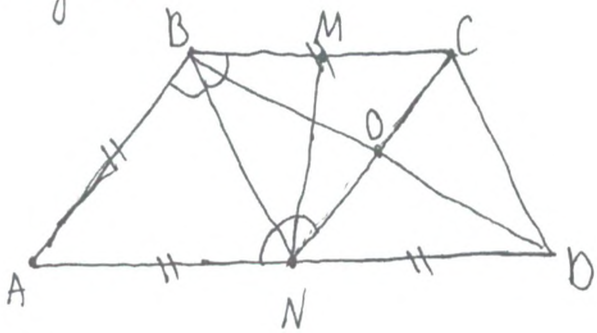
1				1					
						5			5
		2			2				
			4				4		
1				1					
	3							3	
		2			2				
			4				4		
	3							3	
						5			5

20

Максимум в 1 строку или столбец можно покрасить 2 клетки. Если больше, то условие не будет выполняться, ведь места для других цветов не останется.

M8-87

Задача №4



Дано:

$AB = BC$

$BM = MC$

$AN = ND$

$\angle ABN = \angle CBN$

$\frac{BD}{MN} = ?$

Ответ: $\frac{BD}{MN} = 2$

Решение:

$ABCD$ - трап. $\Rightarrow AD \parallel BC$

~~$\angle AB$~~ $\Rightarrow \angle CBN = \angle ANB$ - н/л

$\Rightarrow \triangle ABN$ - равнобед.

Далее достроим CN

$ABCN$ - парал-м, т.к. $BC \parallel AN$ и

$BC = AN$

$\Rightarrow AB = CN = BC$

$\Rightarrow \triangle BCN$ - равнобед.

$\Rightarrow \angle CBN = \angle BNC$

Далее $AN = BC = ND$

$BC \parallel ND$

$\Rightarrow BCDN$ - парал-м.

$\Rightarrow BO = OD$ и $CO = ON$, по св-ву диаг.

$\triangle NBC$ - равнобед.

BO - мед., т.к. $CO = ON$

NM - мед., т.к. $BM = MC$

$\Rightarrow BO = MN$, т.к. мед. идущие из углов при основании равнобедренного $\triangle$ равны.

$BD = BO + OD$

$BO = OD = MN$

$\Rightarrow BD = 2BO = 2MN$

$\Rightarrow BD$ в 2 раза $> MN$

20

МВ-87

Задача №5

Ответ: Все возможные квадраты чисел, например $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$ и т.д.

Решение: Методом проб и ошибок я понял, что переворачивать дроби „безопасно", то есть так чтоби условие выполнялось можно только с начала этого числового ряда. Пример:

$n=4$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$. Чтобы произведение равнялось 1 надо сделать так, чтобы и в числителе, и в знаменателе произведения были одинаковыми. В данном случае на нужно перевернуть первую дробь: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}=1$ - всё сократиться.

Если $n=9$, то перевернём 2 первые дроби.

Было: $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\neq 1$

Стало: $\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{7}}\cdot\frac{9}{\cancel{8}}=1$

Если возьмём $n=8$, то как бы мы не старались выполнить условие не получиться.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 27

Данные участника

ID номер участника 1020153

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» ОГРН 1021602841391
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА
Кремлевская ул., д. 18, Казань
Тел./факс: 8(843) 292-

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М8-27
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

8 класс
(класс участия)

№1

$$400 = [(4+0+0)\cdot 5]^2 = 20^2$$

№2

1 – р
2 – л
3 – х
4 – не р
5 – не х
6 – не х.

Посмотрим, кто кем может являться:
1 – р, л, х (неправду говорит).
2 – х (неправду говорит)
3 – х (говорит правду), л
4 – х (говорит правду)
5 – р, л, х (говорит ~~не~~ правду)
6 – р, х (говорит неправду)

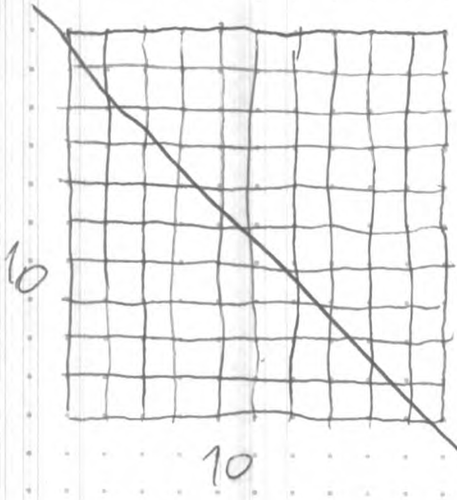
Заметим, что 2 и 4 только ~~...~~ хитрецы, остальные.
тогда 1, 3, 5, 6 ~~...~~, 3 и 6 не могут быть хитрецами (всего 2), тогда 3 – л, 6 – р.
Следовательно 1 – л, 5 – л (оставшиеся)

1 – л 4 – х
2 – х 5 – л
3 – л 6 – р

Ответ: да может

20

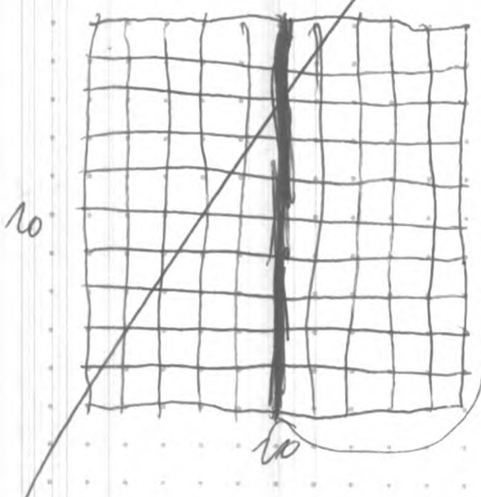
Лист №1



~~23~~

Замостим доску 10×10 прямоугольниками 1×10. Всего их будет 10 штук. ~~Замостим сначала вертикально, потом горизонтально.~~ В каждом

прямоугольнике максимум по 2 клетки одного цвета (разных не может быть). Максимум 2, ведь всего 10 строк (заполняем вертикально), ~~а~~ каждая приходится 1 из 5 цветов. У каждого цвета должно быть поровну закрашенных клеток.



Разделим доску на прямоугольники 5×10. И в левой прямоугольник

[redacted]ый балл ________ ______________
(подпись председателя жюри)

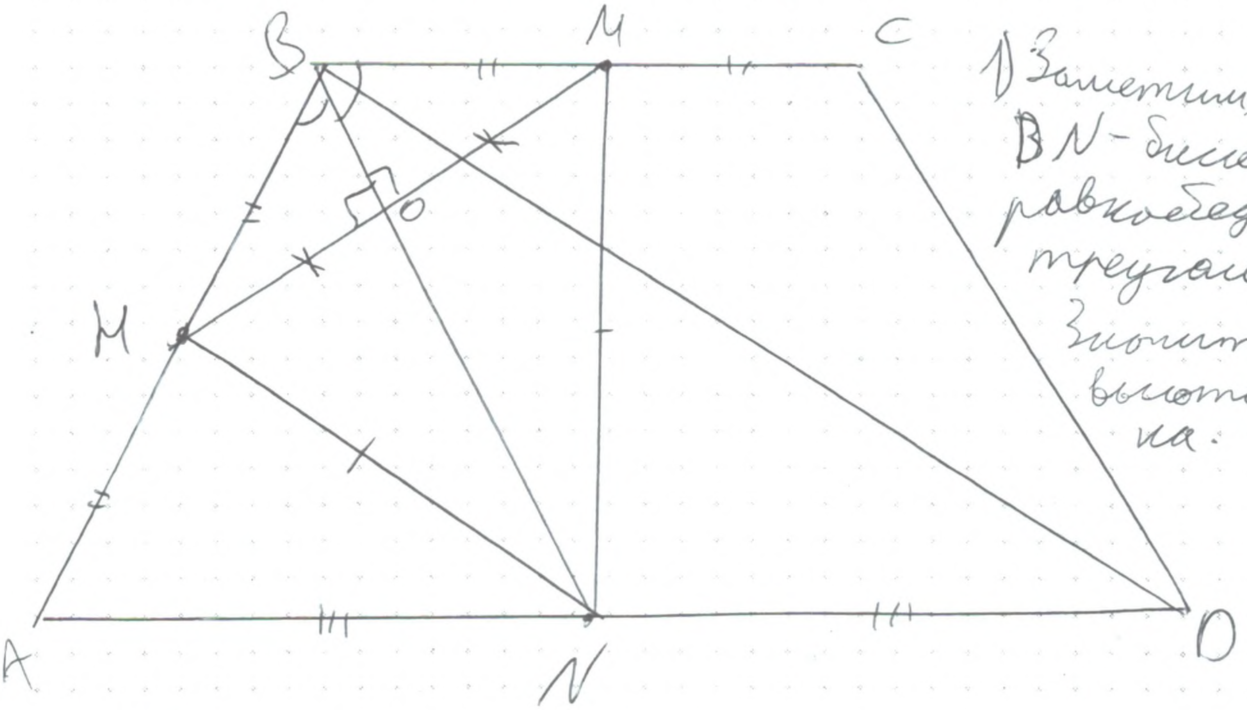
Шифр М8-27
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 8 класс,

вариант ________

№4



1) Заметим, что BN — биссектриса в равнобедренном треугольнике. Значит она высота и медиана.

2) Тогда HN = MN и ON высота и медиана в ~~тр.~~ HNM, а он ~~тогда~~ равнобед.). NH — средняя линия треугольника ABD. HN // BD. Тогда $\frac{NH}{BD} = \frac{1}{2}$, но NH = MN, тогда $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{2}$, значит $\frac{BD}{MN} = 2$ 20

№5

Если у нас $\frac{p_1}{p_2} = 1$, то тогда $p_1 = p_2$, причём $p_1 \cdot p_2 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n$ (в нашей задаче). Тогда это произведение квадрат, значит n — любой квадрат.

Лист № 2

20 20 10

№5 (продолжение).

Теперь алгоритм:

Пусть $n = x^2$, тогда мы можем записать нашу последовательность как:

$$\cancel{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x+1}, \ldots, \frac{n-1}{n}}$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{x-1}{x-2}, \underbrace{\frac{x}{x-1}, \frac{x+1}{x}}, \ldots, \frac{n}{n-1}.$$

Посмотрим на эти дроби, перевернём все дроби после них и дробь $\frac{x+1}{x}$, тогда получим:

$$\underbrace{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{x-1}{x-2}}_{\text{перемножив это получим } x-1.}, \underbrace{\frac{x}{x-1}, \frac{x}{x+1}, \frac{x+1}{x+2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-2}}_{\text{если перемножим это, то получим } \frac{1}{x-1}}.$$

$A\ (x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = 1$,

Алгоритм рабочий.

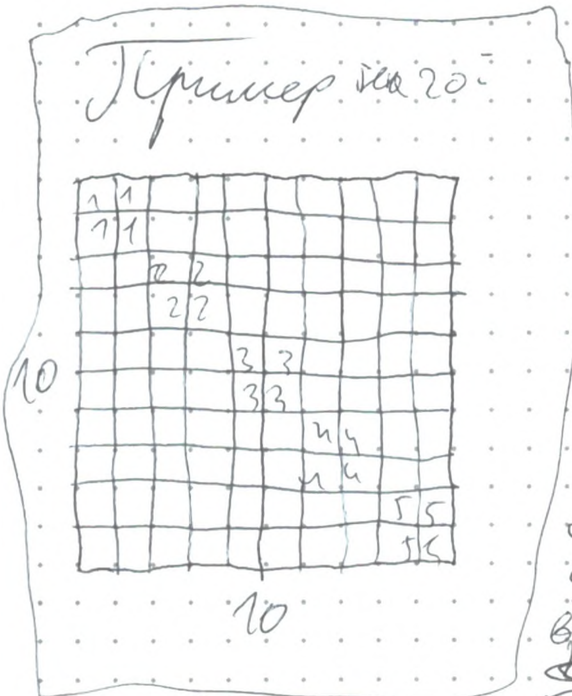
Ответ: n – любой ~~[illegible]~~ квадрат натур. числа.

[redacted]овый балл ______ ______________
(подпись председателя жюри)

Шифр М8-27
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 8 класс,



№3
Оценка:
Пусть минимум 21, тогда у нас минимум 5 клеток на каждый цвет. Всего 5 клеток занимают $\geq$ (минимум) 6 столбцов+строк. Так как цветов всего 5, а столбцов+строк 20, возникает противоречие. ~~может быть не может~~

Ведь разнокрашенные клетки не пересекаются в столбцах и строках. Следовательно ≥ 30 столбцов+строк они и так занимают, а $20 < 30$. Значит противоречие и клеток больше 20 быть не может.

20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	M8 - 16

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 860778

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М8-16
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

8
(класс участия)

№1.

Ответ: 400

Сумма цифр = 4.

$4 \cdot 5 = 20$

$20^2 = 400$ - подходит.

№2.

~~Т.к. рыцари говорят только правду. то~~ сказал

Фразу второго „Я - лжец" - не мог сказать ни рыцарь ни лжец иначе противоречие значит её точно сказал хитрец.

Фразу четвертого „я не рыцарь" также не мог сказать не лжец не рыцарь значит это точно хитрец.

Тогда остались 1-рыцарь и 3-лжеца.

Фразу шестого „я не хитрец" не мог сказать лжец значит это рыцарь. тогда остались только лжецы и это 1, 3, 5 т.к. др. нет.

Ответ 1 – Л дасиэтет

2 – Х

3 – Л

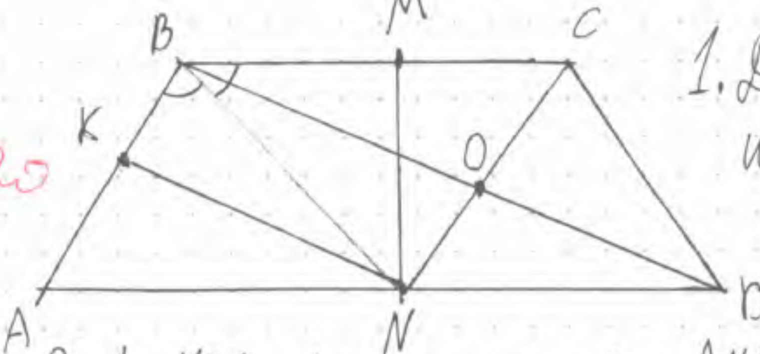
4 – Х

5 – Л

6 – Л

20

№4.



1. Давайте проведем CN и отметим точку K на AB чтобы KB = AK.

20

2. ∠ NBC = ∠ BNA потому что AN // BC и BN - секущая.
Тогда △ ABN - равнобедренный т.к. ∠ABN = ∠ BNA.
Тогда AN = AB = BC.

3. Тогда AN = ND и тогда NBCD - параллелограм т.к. ND // BC и ND = BC. И ABCN тоже параллелограм т.к. AN // BC и AN = BC.
Тогда BN // CD, BN = CD, AB // CN и AB = CN.

4. NO = OC и BO = OD т.к. BD и CN - диагонали параллелограмма.

5. ~~Тогда~~ Тогда KB = NO т.к. AK = KB, NO = OC и AB = NC.

6. △ KBN = △ BMN т.к. ∠ KBN = ∠ NBM ~~и KB = BM т.к.~~, BN - общ. и KB = BM т.к. AK = KB, BM = MC, AB = BC.
Тогда KN = MN

7. ~~KBON~~ KBON - параллелограм т.к. KB = ON и KB // ON
Тогда KN = BO еще BO = OD тогда ~~KN = 2BO~~
BD = 2BO = 2KN тогда $\frac{BD}{KN} = \frac{BD}{MN} = \frac{2}{1}$ Ответ: 2:1.

Итоговый балл ______ ____________ Шифр М8-16

(подпись председателя жюри) (заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 8. класс,

вариант _______

№3.

Всего у нас есть 20 строк и столбцов цветов у нас 5 значит все клетки ~~каждого~~ каждого цвета могут занимать 4 строки и столбца - максимум.

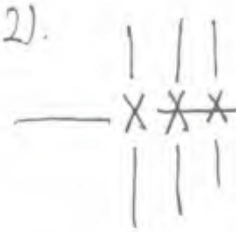
Давайте посмотрим как мы можем ~~поставить~~ раскрасить клетки так чтобы они занимали 4 столбца и строки в сумме.

Давайте раскрашенные ставить X. тогда первую клетку раскрасим любую.

1)

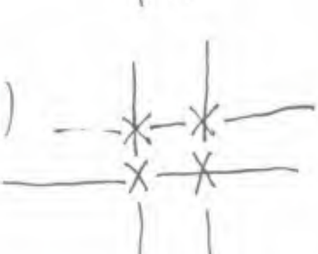
1. Тогда если мы ~~поставим~~ раскрасим клетку в отдельном от этой строке и столбце то уже будет занято 4 столбца и строки.

2).



2) если поставим в ту же самую столбик или строку например в строку то будет занято 3 столбца и строки.
если после этого поставим в ту же строку то будет занято 4 столбца и строки

3)



3) а если после первого действия поставим в какой-то занятый столбик то будет занято тоже 4 строки и столбца, но мы сможем поставить ещё одну клетку в ~~пересе~~ незанятое пересечение столбца и строки и будет также занято 4 клетки и два столбца.

~~Ещё вот не случаев~~.

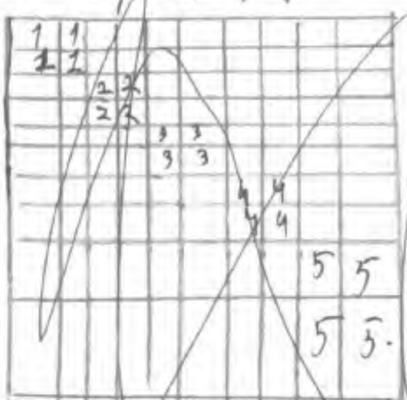
Ещё в 1 случае можно поставить также как в 3 и больше тогда.
а во втором 2и3 случае больше тогда нельзя поставить, т.к. будет больше занято

Лист № 2.

~~тогда максимальное кол-во клеток которые могут быть заполнены и ~~сто~~ столбика~~

~~Давайте разделим на прямоугольники 1 на 10 2 сторонами квадрат 10×10.~~

~~пример↓~~



~~т.к. по горизонтали. Если в какой-то из них мы поставим 3 одного цвета, то рассмотрим на разделение по вертикали и там будет ~~свободно + столбцы~~~~

~~Т.к. у меня есть пример где каждого цвета по 5 то представим, что есть случай в котором по 5. Тогда точно будет занято 3 ~~стол~~ столбца или 3 строки одним цветом ~~представим, что строки~~ иначе у нас макс 4 кл. закрашено~~

~~представим, что строки тогда другие будут заним~~

№5.

Нам подходит любой квадрат. Давайте возьмём n-квадрат и $\sqrt{n}=x$.

тогда давайте до $\frac{x+1}{x}$ мы не будем ничего менять тогда произведение до туда будет x потом перевернём $\frac{x+1}{x}$ и произведение будет равно $\frac{x^2}{x+1}$ и все остальные тоже перевернём тогда будет $\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}=\frac{x^2}{x+2}$ и в итоге предпоследнее будет $\frac{x^2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$ тогда $x^2=n$ и произведение будет 1.

Итоговый балл ______ ____________
(подпись председателя жюри)

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр М8-16
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике. **», 8 класс,**

Представим, что n - не квадрат тогда если мы не будем переворачивать то у нас в ~~и~~итоге получится n

если мы перевернём $\frac{x+1}{x}$ то тогда произведение будет $\frac{x^2}{x+1}$ если перевернём следующую то произведение $\frac{x^2}{x+2}$ если нет то $\frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$ и если её не перевернём то сократится и в числителе останется будет только x^2, а если перевернём то всё равно будет $x^2(x+2)^2$ - в числ.

№3

1	1								
1	1								
		2	2						
		2	2						
				3	3				
				3	3				
						4	4		
						4	4		
								5	5
								5	5

- пример если каждого цвета по 4.

Представим то что каждого цвета хотя бы 5 тогда каждый цвет занимает ~~мини~~ ~~мин~~ минимум 5 столбцов и строк т.к. ~~цв~~ цветов 5 они занимают хотя бы 25 столбцов и строк ~~зн~~, но у нас их всего 20 - противоречие значит максимум каждого цвета по 4 ~~зн~~ значит ответ: 20 кл. закрашено.

№5 (прод.)

Тогда ~~если мы~~ в 1 раз где $\frac{x^2}{x+2}$ будет стандартный случай и в ~~числ~~ числителе всегда будет квадрат

~~10~~ Но чтобы произведение было 1 произведение всех без последнего ~~д~~ должна быть $\frac{n}{n-1}$ тогда m должна быть квадратом, а если произведение будет $\overline{n-1}$ то в знаменателе произойдет тоже самое ~~что~~ от что и в числителе и тогда n все равно квадрат тогда $n \cdot n$ в любом случае квадрат и тогда n всегда должно быть квадратом.

Ответ: любой квадрат >3.

[redacted]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
ОСОБАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗОНА

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 15

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 998599

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Дата "16" января 2026 г.

Шифр М8-15
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

8
(класс участия)

№1.

Он мог загадать число 400.
Сумма цифр $=4$, $4\cdot5=20$, $20^2=400$
Ответ: 400.

№2.

1ч: я рыцарь
2ч: я лжец
3ч: я хитрец
4ч: я не рыцарь
5ч: я не лжец.
6ч: я не хитрец

	Р	ЛЖ	ХИТ
1ч	X	✓	X
2ч	X	X	✓
3ч	X	✓	X
4ч	X	X	✓
5ч	X	✓	X
6ч	✓	X	X

2,3,4 человек точно не рыцари т.к. если бы он им был, то он бы соврал, чего быть не может

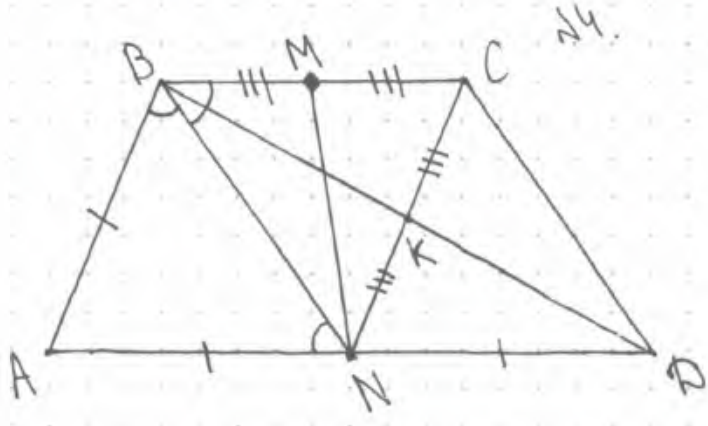
2,4,6 не может быть лжецом т.к. иначе он сказал правду $\Rightarrow$ т.к. всего лжецов 3, то 1,3,5 – лжецы $\Rightarrow$ 6 - рыцарь, а 2 и 4 - хитрецы.

Ответ: может. 1,3,5 - лжецы; 6 - рыцарь, 2,4 - хитрецы.

20

[redacted]

№4.



$\angle CBN = \angle BNA$, как накрест лежащие, а $\angle ABN = \angle CBN \Rightarrow \angle ABN = \angle BNA \Rightarrow$ $\triangle ABN$ − р/б $(AB = AN)$, а т.к. $AB = BC$, то $AN = BC$, а т.к. $AN = ND$, то $BC = ND$ и $BC \parallel ND \Rightarrow NBCD$ # $\Rightarrow$ $BK = KD$; $CK = KN \Rightarrow BK$ − медиана в $\triangle BCN$; NM − тоже медиана из условия, $ABCN$ # т.к. $AN = BC$; $AN \parallel BC \Rightarrow$ $AB = CN$, а т.к. $AB = BC$ то $BC = CN \Rightarrow \triangle BCN$ − р/б $\Rightarrow$ $BK = NM$ (т.к. $BMKN$ − р/б трапеция (MK − ср. лин $\Rightarrow$ $MK \parallel BN$; $BM = NK$), а в ней диагонали равны), и т.к. $BD = 2BK$, то $BD = 2MN \Rightarrow \frac{BD}{MN} = \frac{2}{1} = 2$

Ответ: $\frac{BD}{MN} = \frac{2}{1} = 2$.

20

№3.

1	1								
1	1								
		2	2						
		2	2						
				3	3				
				3	3				
						4	4		
						4	4		
								5	5
								5	5

1 - 1 цвет; 2 - 2 цвет; 3 - 3 цвет; 4 - 4 цвет; 5 - 5 цвет; 6 - 6 цвет.

Ответ: 20

В таблице 10 строк, 10 столбцов, в каждой строке может быть только 1 цвет $\Rightarrow$ на каждый цвет идет по 2 строки т.к. клеток каждого цвета одинаковое кол-во, то же самое с столбцами, на каждый цвет 2 столбца $\Rightarrow$ в 1 строке 2 клетки одного цвета $\Rightarrow$ в сумме клеток $2 \cdot 10 = 20$.

20

[redacted] Итоговый балл ______ ____________

(подпись председателя жюри)

Шифр МР-15

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 8 класс,

вариант ______

Ответ: любой квадрат. №5.

Для того, чтобы в ответе получить 1 мы должны найти в числителе и знаменателе одинаковые множители, при этом в изначальных дробях совпадают почти все числа, кроме 1 и n, а при перевороте дроби у нас в числ. или знаменатель получается квадрат ⇒ n должно с ним сократиться ⇒ они должны быть равны ⇒ n - квадрат, а для того, чтобы получить в итоге 1 Вася может оставлять такими же все дроби, правее $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$, а все остальные, считая эту переворачивать, тогда произведение будет выглядеть так: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}$, тогда знаменатель k-того дроби сократится с числ k+1 дроби (при $k < \sqrt{n}-1$) ⇒ останется 1 и $\sqrt{n}$, а при $k > \sqrt{n}-1$ все знаменатели k дроби сократятся с числ k-1 дроби и останется в зн. $\sqrt{n}$; в числ n ⇒ останется $\frac{1\cdot n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}$, что равно 1

20

Лист № 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

алабуга
особая экономическая зона

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 53

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1024890

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Дата "16" ЯНВАРЯ 2026 г.

Шифр М8-53
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

МАТЕМАТИКА
(профиль олимпиады)

8
(класс участия)

№1.

Ответ: 400.

Почему подходит: • число 400. • Сумма цифр: $4+0+0=4$.
• Умножение на 5: $4\times5=20$
• Возведение в квадрат: $20^2=400$ (верно)
Все условия выполнены, исходное число получено, значит
Артур мог написать 400.

№2.

На острове 1Р, 2Х, 3Л, где Р-рыцарь, Л-лжец, Х-хитрец.
Сразу заметим, что II и IV человек, ответившие на
вопрос могли быть только Хитрецами. Потому, что:
Фраза II: „Я - лжец". Р не мог так сказать, ведь солгал бы,
Л не мог так сказать, т.к. сказал бы правду.
Фраза IV: „Я - не Р": Р не мог так сказать, т.к. это
ложь, Л тоже так не сказал бы, ведь это правда
(он - не Р)

Лист №1

В таком случае, эти двое - хитрецы, иначе никто бы не ~~был~~ смог это сказать.
Остались 1Р и 3Л. Х больше не рассматриваем.

Посмотрим на высказывание VI: „Я - не хитрец". Лжец не мог это сказать, ведь это была бы правда, тогда это Р, иначе никто (хитрецов уже нет.)

Осталось 3 человека и 3Л, но надо убедиться, что никто не противоречит условию:

I: „Я - Р": такое мог сказать Л - он солгал бы ✓

III: „Я - Х": такое тоже мог сказать Л - он солгал бы ✓
V: „Я - не Л": это тоже верно, ведь будучи Л, он солгал ✓

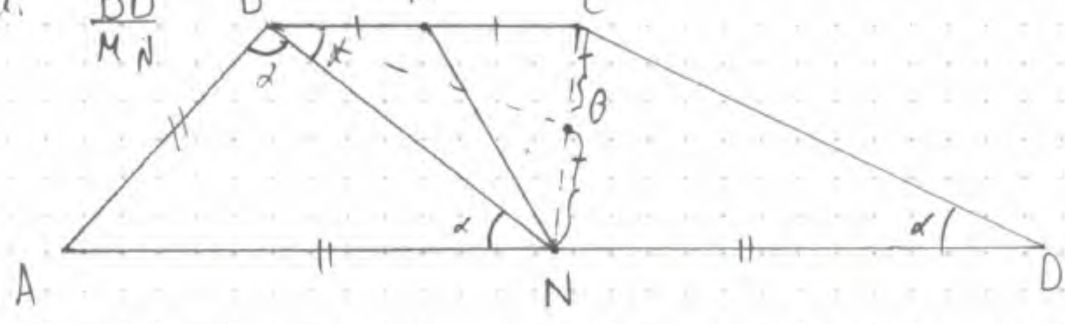
Получается, что путешественник мог определить, кто кем был, ведь мы отталкивались от того, что исключительно кто-то определённый мог сказать опред-ю фразу (как поступали с Х и Р).
Ответ: да, сможет.

20

№4.

Дано: $AB = BC$; M - середина BC; $\angle ABN = \angle CBN$
N - середина AD;
ABCD - трапеция

Найти: $\frac{BD}{MN}$



Итоговый балл ______ ____________
(подпись председателя жюри)

Шифр М8-53
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

вариант ________

~~№~~ №4 (Продолжение)

Решение:

Известно, что $\angle ABN = \angle CBN = \alpha$ ← для удобства.

1) Т.к. $BC \parallel AD$ (трапеция), то $\angle ANB = \angle CBN$, т.к. накрест лежащие

Тогда $\angle ABN = \angle CBN = \angle ANB = \alpha$

Т.к. $\angle ABN = \angle ANB$, то $\triangle ABN$ - равноб: $AB = AN = \frac{1}{2}AD$

Тогда и $BC = \frac{1}{2}AD$

2) $\left.\begin{array}{l} BC = \frac{1}{2}AD = AN \\ BC \parallel AN \end{array}\right\}$ ABCN - параллелограмм, т.е.

$AB = CN$, $BC = AN$, но т.к. $AB = BC$, то $CN = AB = BC = AN$,

а значит наш параллелограм-

ромб

3) Отметим на CN т. O так, чтобы $NO = CO$ и проведём BO. Тогда:

$\left.\begin{array}{l} BM = NO \ (\text{т.к. } BC = CN) \\ BN \text{ - общ.} \\ \angle MBN = \angle ONB \ (\text{т.к. } \triangle BCN \text{ - равноб.}) \end{array}\right\}$ $\triangle MBN = \triangle ONB$ (по 2м ст. и углу м/у ними)

⇓

$MN = BO$. А значит, доказать найти $\frac{BD}{MN} \Leftrightarrow$ найти $\frac{BD}{BO}$.

4) Рассмотрим NBCD:

$\left.\begin{array}{l} BC = ND = \frac{1}{2}AD \\ BC \parallel ND \end{array}\right\}$ NBCD - параллелограмм.

Известно, что в пар-ме диагонали пересекаются и точкой пересечения

Лист № 2

делят друг-друга пополам.
Диагонали в этом пар-мме - CN и BD
Т.к. т. O - середина CN, то BD проходит через т. O, а так же т. O - середина BD ($BO=DO$)
Тогда $BD = 2BO \Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{2BO}{BO} = 2$
Мы нашли $\frac{BD}{BO}$, где $BO = MN \Rightarrow \frac{BD}{MN} = 2$
Ответ: 2.

20

№3.

20

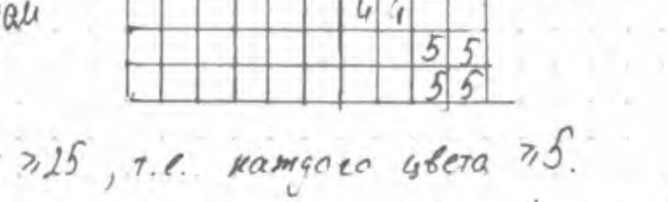
Ответ: 20 Пример:
1, 2, 3, 4, 5 - номера цветов.

1	1								
1	1								
		2	2						
		2	2						
				3	3				
				3	3				
						4	4		
						4	4		
								5	5
								5	5

Оценка:
Будем действовать методом от противного:
Пусть закр. клеток будет ≥ 25, т.е. каждого цвета ≥ 5.
Будем считать за то, что цвет „занял" столбец и строку, когда в эти столбец и строку нельзя поставить клетку другого цвета (закрасить)
Давайте в таком случае рассмотрим возможное число закраш. „занятых" столбцов и исходя из этого, наим. число „занятых" строк. * ст. - столбец; стр. - строка *

1) 1ст $\rightarrow$ = 5стр.
2) 2ст $\rightarrow \geq$ 3стр
3) 3ст $\rightarrow \geq$ 2стр
4) 4ст $\rightarrow \geq$ 2стр
5) 5ст $\rightarrow \geq$ 1стр.

Примеры:



Предст. наим. „занятые" строк, исходя от кол-ва занятых столбцов.

Итоговый балл ______ ______________
(подпись председателя жюри)

Шифр М8-53
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

№3 (Продолжение)

Будем считать и для столбцов и строк. суммарно для 5 цветов „занято" должно быть ≤ 10 стр и ≤ 10 ст, => у всех должно ~~быть ≤ 2ст → 2стр. Но такого в нашей таблице нет! Противоречие => Ответ 20 клеток~~

Это на ВСЕ цвета, чтобы никто никому не противоречил.
В таком случае, раз строк и столбцов - по 10, а цветов 5, то „занимая" столбцы и строки у ВСЕХ должно быть ≤ 2ст → 2стр, ведь если хоть у какого-то цвета будет ≥ 3 ст / стр, то суммарное „занимание" ст/стр, смотря чего больше, превысит 10.
Но по нашим рассуждениям, невозможна ситуация ≤ ≤ 2ст → 2стр, т.к. это ≤ 4 клеткам, а у нас клеток каждого цвета ≥ 5.
Тогда предположение о противном неверно, значит ответ - 20 покраш. клеток.

№5.

Ответ: n - квадрат любого числа
Алгоритм: $n = x^2$ тогда мы переворачиваем дроби до того момента, когда x - в числителе (включительно), начиная с $\frac{2}{1}$

2-0

№5 (Продолжение).

$\frac{2}{1} \; \frac{3}{2} \; \frac{4}{3} \dots \frac{x}{x-1} \qquad \frac{x^2}{n-1} \qquad x^2 = n+1$

Переворачивая дробь, произведение будет равно единице

$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cancel{\frac{3}{4}} \cancel{\frac{4}{5}} \dots \underbrace{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x+1}{x}}_{x^2} \dots \frac{x^2}{n-1}$ Потом же, в обратную сторону
Остаётся x^2 в знам. и в числ.

Сокращение $= 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 19

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1091042

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" января 2026 г.

Шифр МЛ-19
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика
(профиль олимпиады)

8 класс
(класс участия)

Задание 1

Ответ: 2025

~~Сд~~ Сумма цифр числа: $2+0+2+5=9$

Сумма ~~цфр~~ цифр, умноженная на 5: $9\cdot5=45$

Заметим, что $45^2=2025$

Задание 2

Ответ: да

Второй сказал о себе, что он лжец.

Заметим, что он не мог быть рыцарем (т.к. если рыцарь говорит о себе, что он лжец, то рыцарь лжёт, но рыцари всегда говорят правду).

Также он не мог быть лжецом (т.к. если лжец говорит о себе, что он лжец, то лжец говорит правду, но лжецы всегда лгут).

Тогда второй – хитрец.

Четвёртый сказал о себе, что он не рыцарь.

Заметим, что он не мог быть рыцарем (в противном случае, он лжёт).

Также он не мог быть лжецом (в противном случае, он говорит правду).

Тогда четвёртый – хитрец.

Мы знаем, что среди 4х оставшихся людей ровно 1 рыцарь и 3 лжеца.

Шестой сказал, что он не хитрец.

Заметим, что он не мог быть лжецом (потому что тогда он говорит правду).

Также ясно, что он не мог быть хитрецом (хитрецов всего 2, и это $2^{ой}$ и $4^{ый}$).

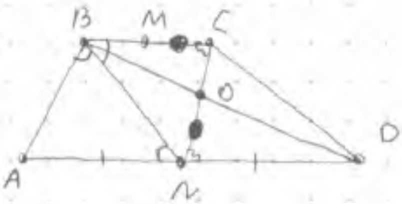
Тогда шестой – рыцарь.

Понятно, что $1^{ый}$, $3^{ий}$ и $5^{ый}$ – лжецы.

Получаем, что путешественник сможет определить, кто из них кем является.

20

Задание 4



$AB = BC$; $BM = MC$; $AN = ND$; $\angle ABN = \angle CBN$

$BC \parallel AD \Rightarrow \angle CBN = \angle BNA$. В $\triangle ABN$: $\angle ABN = \angle BNA \Rightarrow AB = AN$.

Также $AB = BC \Rightarrow AN = BC$ и $AN \parallel BC \Rightarrow ABCN$ – пар-мм.

Тогда $AB = CN$

$BC = ND$ и $BC \parallel ND \Rightarrow NBCD$ – пар-мм.

Пусть диагонали $NBCD$ пересекаются в точке O.

Док., что $\triangle NOD = \triangle CMN$:

1. $AB = CN = ND$
2. $NO = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = MC$
3. $\angle BCN = \angle CND$

Тогда $MN = OD = \frac{1}{2}BD \Rightarrow BD = 2MN \Rightarrow \frac{BD}{MN} = 2$

Ответ: 2

20

Примеч.: пар-мм – параллелограмм

Задача 5

Док., что n – квадрат натурального числа:

Пусть n ... n натур. ... x на доске (произведение всех чисел и знам)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	M8 - 51

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника 1271410

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Дата "16" 01 2026 г. Шифр М8-51
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

МАТЕМАТИКА
(профиль олимпиады)

8
(класс участия)

№1

Ответ: 400 Сумма цифр $= 4+0+0=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\cdot5=20 \Rightarrow 20^2=400$

№2

Ответ: да

Решение: всего: один рыцарь, три лжеца и два хитреца

1-вый сказал: я рыцарь

2-ой сказал: я лжец

3-ий сказал: я хитрец

4-вый сказал: я не рыцарь

5-вый сказал: я не лжец

6-ой сказал: я не хитрец

Т.к. лжец - говорит только ложь, то лжецами не может быть: 6-ой, 4-вый, 2-ой, иначе он говорит правду. Значит т.к. лжецов трое, то лжецы это: 1-вый; 3-ий; 5-вый.

20

Сдано ____ листов

подпись участника

подпись наблюдателя в аудитории

[redacted]

Итоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

Шифр М8-51

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

вариант ________

№2 (продолжение)

Дальше т.к. рыцари говорят только правду, то рыцарь не может быть: ~~4-ый~~ 4-ый, 3-ий, 2-ой. Иначе он говорит ложь. Значит рыцарем может быть: 1-ый, 5-ый, 6-ой. Но т.к. 1-ый и 5-ый - лжецы, то 6-ой - рыцарь, а значит т.к. рыцарь один, и лжеца три, то остальные хитрецы, то есть 2-ой и 4-ый - хитрецы

№3

20

Ответ: 20

Оценка: Давайте поймём, что кол-во клеток одного цвета ≤ 4, ведь если нет, то ~~их~~ ≥ 5 одного цвета но тогда каждый цвет занимает ≥ 5 строк и столбцов в сумме, т.к. если нет, то занимает не ≤ 4 в сумме, но такого быть не может, т.к. тогда клетки одного цвета могут быть либо на 2-ух строках и 2-ух столбцах, но тогда мы можем расставить ≤ 4 клеток т.к. 2 варианта на какую строку ставим и 2 варианта на какой столбец, то есть $2 \cdot 2 = 4$ $4 < 5$. Или либо на 1 строке и столбце и 3 строках или

[redacted]

Итоговый балл ________ ____________
(подпись председателя жюри)

Шифр М8-51
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 8 класс,

№3 (продолжение)

столбцах, но тогда вариантов поставить ~~верхн~~ цвет ~~в~~ не ≤ 1·3; ~~что меньше~~ что < 5. Если столбов и строк ≤ 3 в сумме, то тем более т.к. там вариантов наставить цвет ≤ 2, что также < 5. Также поймем, что клетки одного цвета занимают ≥ 1 строку и ≥ 1 столбец. Но если каждый цвет занимает ≥ 5 строк и столбцов в сумме то все 5 цветов занимают ≥ 5·5 строк и столбцов в сумме т.к. на каждой строке и столбце ~~нуль~~ нет разных цветов. Получается ≥ 25 строк и столбцов, но всего 10+10 = 20 ⇒ противоречие. Значит клеток одного цвета ≤ 4, а всего ≤ 4·5 = = 20. Пример на 20:

1	1								
1	1								
		2	2						
		2	2						
				3	3				
				3	3				
						4	4		
						4	4		
								5	5
								5	5

Цифрами каждой указан какой цвет в клетке так что разными цифрами - разные цвета, одинаковые - одинаковыми

20

Итоговый балл ________ ________________

(подпись председателя жюри)

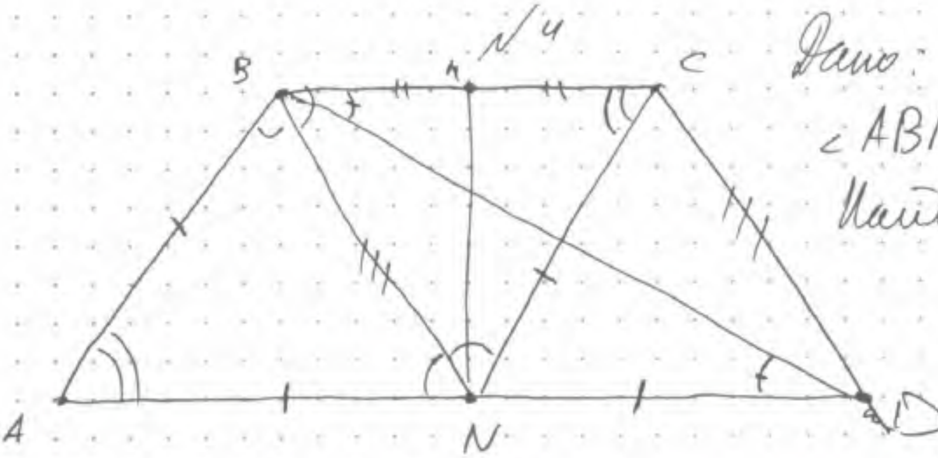
Шифр М8-51

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

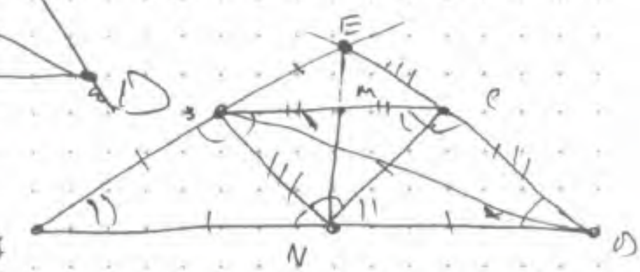
№4



Дано: $AB = BC$

$\angle ABN = \angle CBN$

Найти: $\frac{BD}{MN}$ – ?



1) Проведем CN

2) $\triangle ABN = \triangle CBN$ по 1 признаку (BN - общ.; $\angle ABN = \angle CBN$, $AB = BC$) $\Rightarrow AN = CN$, $\angle BCN = \angle BAN$, $\angle BNA = \angle BNC$

3) Т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \angle ABC + \angle BAN = 180°$ т.к. односторонние $\Rightarrow$) +) +)) = 180° $\Rightarrow$ т.к. в $\triangle ABN$) +)) + $\angle ANB = 180° \Rightarrow \angle ANB =$) $\Rightarrow \angle BNC =$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABN$ - равнобедренный с основанием $BN \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AN \Rightarrow$ ~~BC~~ $AB = BC = AN \Rightarrow$ отношение оснований $= 1:2$ т.к. $AN = \frac{1}{2} AD$.

4) $\angle CBD = \angle BDN$ т.к. $AD \parallel BC$ и эти углы накр. лежащ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDN = \triangle DBC$ по 1 признаку (BD - общ.; $\angle CBD = \angle BDN$, $ND = BC \Rightarrow BN = CD$. 5) $\angle CND = 180° -$) $-$) $=$)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\triangle NCD$ - равнобедренный ($CN = ND$) $\Rightarrow \angle NCD =$

$= \angle CDN = \frac{180 -))}{2} =$).

6) ~~Продолжим~~ Проведем прямые ~~AB~~ AB и CD и

Лист № 4

[redacted]

Итоговый балл ______ ______________
(подпись председателя жюри)

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр M8-51
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

№ 4 продолжение

они будут пересекаться в точке E

7) BC - средняя линия $\triangle AED$ $(BC = \frac{1}{2}AD)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BE$ и дальше поймем что ~~медиана~~ MN

~~EN △AED EM~~ лежит на медиане EN

△-ка AED т.к. также M - ее середина BC $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AEN$ и $\triangle NMC$ - подобны 2 : 1.

8) $\triangle ABD$ - подобен $\triangle NMC$ $(\angle MCN =$

$= \angle BAN$, $\frac{MC}{AB} = \frac{CN}{AD} = \frac{2}{4}\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BD}{MN} = \frac{2}{1} = 2$

Ответ: ~~$\frac{4}{4}$~~ $\frac{2}{1} = 2$

20

~~Ответ: $n = 4$ Пример на 4: $\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{1}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \Rightarrow$~~

~~Умножение на произведение $\Rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$~~

~~равна: $\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1} = n$, когда мы число вида~~

~~$\frac{p+1}{p}$ - меняем на $\frac{p}{p+1}$ - произведение исходного про... числа уменьшается~~

~~на $\frac{p^2}{(p+1)^2}$~~

Итоговый балл ______ ______________
(подпись председателя жюри)

Шифр M8-51
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «МАТЕМАТИКЕ», 8 класс,

№5

Ответ: ~~нет~~ все квадраты числа. Пример: $\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}$

$\frac{2}{1}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$

Давайте посчитаем произведение исходных чисел.

$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = n$ Исходные числа все вида „$\frac{x+1}{x}$" где x - натур.

Когда мы меняем $\frac{x+1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+1}$ - исходное произведение грубо говоря умножается на $\frac{x^2}{(x+1)^2}$, т.к. $\frac{x+1}{x} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$. Значит т.к. после всех замен мы хотим получить „1" в произведении, то $n \cdot \frac{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_k^2}{(x_1+1)^2 \cdot (x_2+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2} =$

$= 1 \Rightarrow \frac{x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_k^2}{(x_1+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ т.к. мы работаем в натуральных числах $(x_1+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2 \vdots n \Rightarrow$

n-не простое число т.к. чтобы $(x_1+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2$ - хотя бы одно делится на n, а значит и на n^2 т.к. он в квадрате $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в числителе $\vdots n$, а в знаменателе $\vdots n^2 \Rightarrow$ эта дробь $\neq \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ В $(x_1+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2$ - все степени вхождения в числа четны и в $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ когда сократим что есть останется дробь $\frac{1}{n}$.

Лист № 6

[redacted]

Итоговый балл ______ ____________
(подпись председателя жюри)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр М8-51
(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

Ответ: все квадраты 4, 9, 16 ....
Пример: для 4 мы меняем: $\frac{2}{1}$
для 9 мы меняем: $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{2}$
для 16 мы меняем: $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$
⋮
и т.д.

Продолжение 4 задачи оценки:
$\frac{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_k^2}{(x_1+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ можно сократить дробь до $\frac{1}{n}$ где знаменатель это квадрат т.к. степень вхождения любого в знаменатель числа четное $\Rightarrow$ n - квадрат целого числа. Степень вхождения всегда четная в n т.к. $\frac{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_k^2}{(x_1+1)^2 \cdot (x_2+1)^2 \cdot \ldots \cdot (x_k+1)^2}$ — числитель и знаменатель в этой дроби квадраты целого числа.

алабуга
особая экономическая зона

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

(заполняется организатором)

ШИФР	М8 - 56

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов, заключительный этап, 2025-2026 учебный год

Данные участника

ID номер участника	1271768

[redacted]

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "16" 01 2026 г.

Шифр М8-56
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы
(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

8
(класс участия)

№1

Так как в задаче достаточно привести пример и показать, что он подходит, то вот пример:

Число: 400

Сумма цифр равна: $4+0+0=4$. Далее умножаем на 5: $4\cdot5=20$. $20^2=400$, т.к. $400=400$ $(20^2=400)$, то число 400 подходит.

Ответ: Артур мог написать число 400.

№2

Рассмотрим высказывание второго: „Я лжец". Рыцарь не мог такого сказать, т.к. тогда он солжёт; лжец тоже не мог такого сказать, т.к. тогда он скажет правду. Значит второй является хитрецом. Теперь рассмотрим высказывание четвёртого: „Я не рыцарь". Аналогично рыцарь не сможет такого сказать,

20

т.к. тогда он солжёт; лжец также не сможет такого сказать, т.к. тогда он скажет правду. Значит четвёртый хитрец, т.к. он не может быть рыцарем или лжецом из этих рассуждений. Остались 3 лжеца и 1 рыцарь. Значит, чтобы понять кто есть кто, нужно найти фразу, которую сможет сказать рыцарь, но не сможет сказать лжец, т.к. в другом случае путешественник не сможет однозначно определить, кто есть кто. Первый сказал: „Я рыцарь". Лжец может такое сказать, значит пока неизвестно кто первый (рыцарь тоже мог такое сказать). Второй - хитрец (по решению). Третий сказал: „Я хитрец". Рыцарь не мог такого сказать, а лжец мог, т.к. если бы он был рыцарем, то он солгал. Значит третий — лжец. Четвёртый - хитрец (по решению). Пятый сказал: „Я не лжец". Такую фразу мог сказать и рыцарь, и лжец, значит пока неизвестно про него. Шестой же сказал: „Я не хитрец". Лжец не мог такого сказать, т.к. тогда бы он сказал правду. А вот рыцарь может такое сказать, значит шестой - единственный рыцарь. Значит те, которых нельзя было определить - лжецы. Получается: первый - лжец; второй - хитрец; третий - лжец; четвёртый - хитрец; пятый - лжец; шестой - рыцарь. Значит путешественник сможет определить кто есть кто.

Ответ: путешественник сможет определить, кто из них кем является.

[redacted]

Итоговый балл ______ ____________ (подпись председателя жюри)

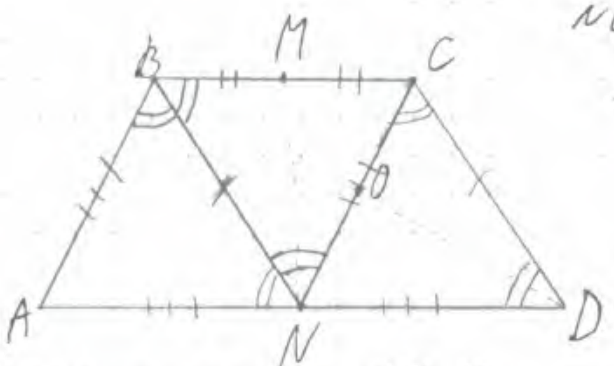
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ... КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ... МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр М8-56 (заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «Математике», 8 класс,

№4



Дополнительно построим: отрезок CN.

Рассмотрим $\triangle ABN$ и $\triangle CBN$:

$AB = CB$ (по усл.)
$\angle ABN = \angle CBN$ (по усл.)
$BN = BN$ (общая)
$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle CBN$ по 2^{ум} сторонам и углу между ними $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ANB = \angle CNB$ (соотв. элем.). Пусть $\angle ABN = \alpha$.
Тогда $\angle CBN = \alpha$ (т.к. $\angle ABN = \angle CBN$ по усл.).
Тогда $\angle A = 180 - 2\alpha$ ($\angle A$ и $\angle B$ - односторонние $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle A + \angle B = 180°$). Т.к. сумма углов в треугольнике - $180°$, то $\angle ANB = 180 - (180 - 2\alpha) - \alpha = \alpha$. Тогда
$\angle ANB = \angle ABN = \alpha$. $AN = CN$ (соотв. элем. равных $\triangle$).
Т.к. $\angle ABN = \angle ANB$, то $\triangle ABN$ - равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = AN$. Т.к. $AB = BC$ и $AN = NC$, то $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $AB = AN$, то $AB = BC = CN = AN$. Т.к. $BC =$
$= NC$, то $\triangle CBN$ - также равнобедренный. $\angle CND =$
$= \angle BCN$, т.к. они накрест-лежащие.
$\triangle CBN = \triangle NDC$ по 2^{ум} сторонам и углу между ними.
$BD \cap CN = O$. $DO = OB$, т.к. DO и OB - медианы двух равных треугольников, проведенные из соответственных углов. Также

Лист № 2

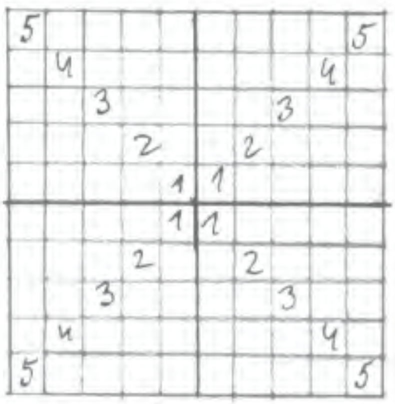
из-за того, что это медианы равных треугольников, проведённые из соответственных углов, то эти медианы пересекутся в точке O, т.к. O лежит на соответственной стороне для двух равных треугольников. NM — медиана, проведённая из второго угла при основании равнобедренного треугольника. NM = BO, т.к. это медианы, проведённые из углов при основании равнобедренного треугольника. Т.к. BO = OD и NM = BO, то BD / MN =

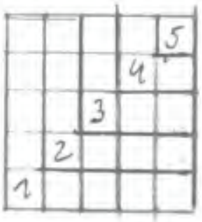
= BO + OD / MN = 2 MN / MN = 2/1.

20

Ответ: отношение BD / MN = 2/1.

№3





Для начала посмотрим на квадрат 5 на 5. В нём можно поставить только 5 цветов по 1 разу; т.к. максимум в диагонали только 5 клеток и всего 5 цветов. ~~Т.к.~~ В квадрате по принципу расставления цветов из этой задачи, разные цвета можно ставить только по диагонали; т.к. тогда они не будут пересекаться. В квадрате 10 на 10 — 4 таких квадрата 5 на 5; значит максимум (клеток) (цветов) может быть: $4 \cdot 5 = 20$. (пример сверху). Больше не может быть; т.к. квадратов 5 на 5 — 4 штуки.

Ответ: 20 клеток.

20

№5

Заметим, что, чтобы появилась 1 при перемножении, значит нужно умножить две обратные дроби. Чтобы произведение не увеличилось, а уменьшилось до единицы, то можно заметить что числа делятся на вот такие пары: $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$. Заметим: если перевернуть $\frac{2}{1}$, то первые три множителя превратятся в единицу. Т.е. мы перевернули $\frac{2}{1}$; сделав в ~~[illegible]~~ знаменателе квадрат, тем са-

[redacted]

Итоговый балл ______ ____________

(подпись председателя жюри)

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНАЯ ОЛИМПИАДА

Шифр 148-56

(заполняется оргкомитетом)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 8 класс,

вариант ______

ным убрав оставшееся число без пары. Покажу на схеме:

$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$ - число 4 не сократится, т.к. оно не входит ни в одну пару.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$ - теперь, т.к. 4-квадрат, то мы переставили предыдущие множители и сократили этот квадрат.

Ещё:

$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}$ - 9 также не сократится.

$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{7}}\cdot\frac{9}{\cancel{8}}$.

С числами, которые не являются квадратами такое не сработает, т.к. нельзя будет переставить множители до этого, потому что множители не будут одинаковыми.

Ответ: n - любой полный квадрат натурального числа $(n>3)$.

20

Лист № 3