

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Межрегиональная предметная олимпиада

---



ШИФР	М7-103
------	--------

(заполняется оргкомитетом)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**участника Олимпиады**

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 7 классов,  
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

---

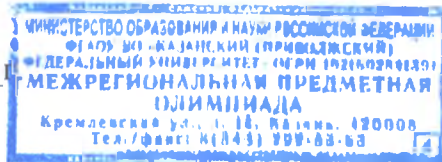
(наименование дисциплины)

**Данные участника**

ID номер участника

998098

Дата "22" 01 2025



Шифр **М7-103**  
(заполняется оргкомитетом)

### Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика

(профиль олимпиады)

7

(класс участия)

Пусть возраст папы -  $x$ , возраст 1-ого сына -  $y$ , возраст 2-ого сына -  $z$ , возраст Паши -  $p$ , Прасио лет -  $k$ .

$$\begin{cases} x+y+z=p \\ y+z+k+k=p+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=p \\ y+z+k=p \end{cases} \Rightarrow x-k=0 \Rightarrow x=k$$

$\Rightarrow x-k=0 \Rightarrow x=k$

то есть папа после  $k$  лет будет  $x+k=x+x=2x$ .

$\frac{2x}{x} = 2$  (повзрослеет в 2 раза)

Пусть  $З_1$  - 1-ая золотая монета  
 $З_2$  - 2-ая золотая монета  
 $С_1$  - 1-ая серебряная монета  
 $С_2$  - 2-ая серебряная монета  
 $Б_1$  - 1-ая бронзовая монета  
 $Б_2$  - 2-ая бронзовая монета.

Если на  $k$ -ой день  $T$ -значимая монета, 1-ая золотая

1. Выведение  
Пусть  $З_1 > З_2$   
Введем  $З_1, С_2$  и  $Б_2, З_2$   
Если  $З_1, С_2 = Б_2, З_2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow С_2 - 1$ , а  $Б_2 - 1 \Rightarrow$   
 $С_1 - 1$ ,  $З_1 - 1$  и  $Б_2 - 1$ .

Рисунок

$$\triangle DBC = \triangle GBA$$

но не прямоугольные

$$DB = BA \text{ (т.к. } ABDE \text{ - кв.)}$$

$$GB = BC \text{ (т.к. } BCFG \text{ - кв.)}$$

$$\angle DBC = \angle ABG = 90^\circ + \angle ABC$$

$$\angle CDB = \angle BAG$$

$$\triangle DBX = \triangle ABY \text{ по II кривизнаты } AB = DB, \angle DBX = \angle ABY = 90^\circ$$

$$(\angle ABY = 90^\circ \text{ т.к. } \angle ABY = 180^\circ - 90^\circ = (180^\circ - \angle DBX) = 90^\circ) \angle BAG = \angle BDY$$

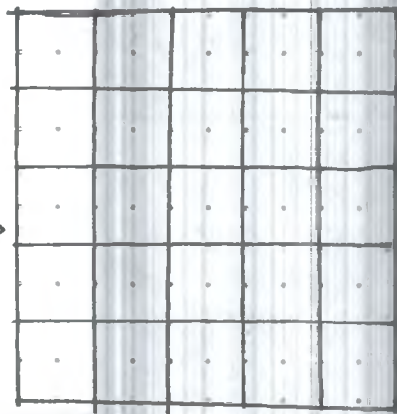
$$\text{(т.к. } \triangle DBC = \triangle GBA) \Rightarrow XB = BY$$

З. и т. д.

№ 3

Описание:

В квадрате  $10 \times 10$  на доске  
выделить 25 непересекающихся  
квадратов  $2 \times 2 \rightarrow$



на границе квадрата

тогда-бы 25 клеток (выбранные клетки закрашены)

Пример:

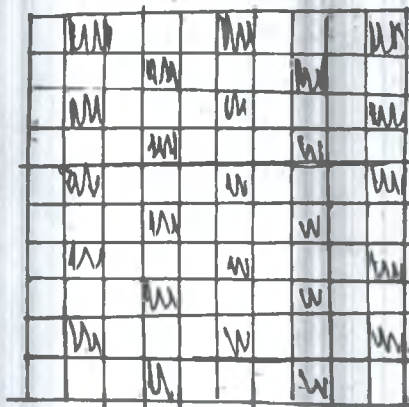
Если квадрат  $10 \times 10$

выберем 25 клеток

то там будет 25 клеток

выбранных 2 квадрата

$2 \times 2$  и попарно  $1 \times 1$





Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 7 класс,

№2.

Базис.

Ан  $x, y = x + 3 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = x + 3 \Rightarrow 2x + 2 \cdot 3 = x + y \Rightarrow x + 6 = y$  (Ан - среднее арифметическое)

Пусть для  $n+1$  шагаем какое следующее число не  $x + x + 6 \cdot 1 + x + 6 \cdot 2 + \dots + x + 6 \cdot n$ , и Ан  $(x + x + 6 \cdot 1 + x + 6 \cdot 2 + \dots + x + 6 \cdot n) = x + 3(n+1)$

Докажем, что  $n+2$ -ое слагаемое  $(c) = x + 6 \cdot (n+1)$

$$\frac{x + x + 6 \cdot 1 + x + 6 \cdot 2 + \dots + x + 6 \cdot n + c}{n+2 \text{ (н слагаемых с шестью, еще } x \text{ и } c)} = x + 3(n+1)$$

⇓

$$(n+2)x + (n+2)(n+1) \cdot 3 = x + 6x + 6 \cdot 1 + x + 6 \cdot 2 + \dots + x + 6 \cdot n + c \quad (\text{по св-ву индукции})$$

⇓

$$(n+2)x + (n^2 + 3n + 2) \cdot 3 = (n+1)x + 6(1 + 2 + 3 + \dots + n) + c \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$x + 3(n^2 + 3n + 2 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2n) = c \Rightarrow$$

$$x + 3(n^2 + 3n + 2 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2n) = c$$

Мы хотим получить, что  $x + 6(n+1) = c$

Докажем, что  $3(n^2 + 3n + 2 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2n) = 6(n+1)$

Базис: (Проверена в начале  $x + 6$ )

Предположение. Пусть для  $n-1$  верно, что

$$3((n-1)^2 + 3(n-1) + 2 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2(n-1)) = 6(n-1)$$

Докажем, что для

$$n = z+1 \text{ верно } (3((z+1)^2 + 3(z+1) + 2 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2(z+1)) = 6(z+1))$$

$$(1+2+\dots+n-1) \cdot 3 - 6(1+2+3+\dots+n-1) = 6n$$

$$3(n^2+n) - 2(1+2+3+\dots+n-1) = 6n$$

$$3(n^2+n-2-4-6-\dots-2n+2) = 6n$$

Введем  $u_3$   $3(n^2+3n+2-2-4-6-\dots-2n+2-2n+2)$

$$3(n^2+n-2-4-6-\dots-2n+2)$$

Рассуждаем:

$$3(n^2+3n+2-2-4-6-\dots-2n) - 3(n^2+n-2-4-6-\dots-2n+2) =$$

$$= 3(n^2+3n+2-2-4-6-\dots-2n - n^2 - n + 2 + 4 + \dots + 2n - 2) =$$

$$= 3(2n+2-2n) = 3(2) = 6$$

Так как это выражение  
размещается только

То есть

$$3(n^2+3n+2-2-4-\dots-2n) = 6n+6$$

Значит

Значит

$$x + 3(n^2+3n+2-2-4-\dots-2n) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 6n+6 = c$$

то это константа

число произвольное на 6.

Значит  $100\text{-ая цифра} = X + \frac{99}{100} \cdot 6 =$

$$X + \frac{594}{100} - X = 100 - 6 \cdot 594$$

√5

Пусть

$B_2$  - 2-ой заданный номер

$B_1$  - 1-ый заданный номер

$B_1$  - 1-ый заданный номер

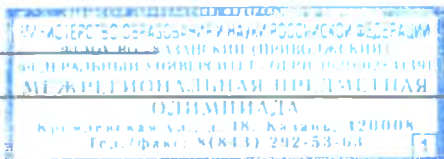
$B_2$  - 2-ой заданный номер

$C_1$  - 1-ый средний номер

$C_2$  - 2-ой средний номер

Еще надо  
сказать Т-  
она задана,  
еще надо  
сказать  
и она  
задана.





**Межрегиональная предметная олимпиада КФУ**

по « математике », 7 класс,  
вариант \_\_\_\_\_

Продолжение

№ 5

1. Взвешивание  $C_1, C_2$   
Пусть  $C_2 < C_1$

~~$C_1, C_2$~~   ~~$B_1, B_2$~~   
 $3_1, C_1, B_1, 3_2$

2. Взвешивание  $C_1, 3_2$  и  $B_2, C_2$   
 $C_1, 3_2 > B_2, C_2$   
Если, то

1. Взвешивание

Если мы знаем хотя одну характеристику в паре  $C_1, C_2$  или  $B_1, B_2$  и  $3_1, 3_2$  (кто и, сколько т), то мы можем определить ЗТ

1. вар Пусть  $3_1, C_1 = B_1, 3_2$   
тогда варианты

$B_1$	$\wedge$	$\top$	$\wedge$	$\top$
$3_1, C_1$	$=$	$B_1, 3_2$		

2. Взвесим  $C_1$  и  $B_1$ .  
Если  $C_1 > B_1$ , то

В.1 верен и  $\top - 3_2, C_1$  и  $B_2$  ✓  
Если  $B_1 > C_1$ , то В.2 верен  
и  $\top - 3_1, B_1, C_2$

2. вар.  $3_1, C_1 > B_1, 3_2$

тогда варианты

$B_1$	$\top$	$\top$	$\wedge$	$\wedge$
$B_1$	$\top$	$\top$	$\wedge$	$\wedge$
$3_1, C_1$	$>$	$B_1, 3_2$		

$3_1, C_1 > B_1, 3_2$

~~2. Взвешивание~~  
 ~~$3_1, C_1$  и  $3_1, 3_2$~~

~~$\top \wedge \wedge \Rightarrow \wedge \top \top \wedge$   
 $\top \top \top \wedge \Rightarrow \top \top \top \wedge$   
 $\top \wedge \wedge \Rightarrow \wedge \wedge \top \wedge$~~



2-е взвешивание.

и Известно

$\underbrace{b_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} \text{ и } \underbrace{z_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$

Если  $\underbrace{z_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} > \underbrace{b_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$ , то  $\underbrace{b_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} = \underbrace{z_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$

Если  $\underbrace{z_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} > \underbrace{b_1 z_2}_{\text{н.г.т.}} \neq$ , то  $\underbrace{b_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} \neq \underbrace{z_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$

Если  $\underbrace{z_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} < \underbrace{b_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$ , то  $\underbrace{b_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} < \underbrace{z_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$

Заметим, если при взвешивании 1.  
знак  $>$ , а при втором знак  $=$ , то  
тяжелые  $z_1, c_1, b_2$  ✓

если при взвешивании 1. знак  $\neq >$ , а  
при втором знак  $>$ , то тяжелый  
 $b_1, c_1, z_1$  ✓

если при взвешивании 1.  
знак  $>$ , а при ~~втором~~ втором знак  
 $<$ , то тяжелые  $z_1, c_2, b_2$ .

3. вариант

Если

$\underbrace{z_1 c_1}_{\text{н.г.т.}} < \underbrace{b_1 z_2}_{\text{н.г.т.}}$

то взвешиваем

$\underbrace{z_1 z_2}_{\text{н.г.т.}} \text{ и } \underbrace{b_1 c_1}_{\text{н.г.т.}}$

и результат  
образуем аналогично со 2 вариантом.