

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Межрегиональная предметная олимпиада

---



ШИФР	М7-39
------	-------

(заполняется оргкомитетом)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**участника Олимпиады**

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 7 классов,  
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

---

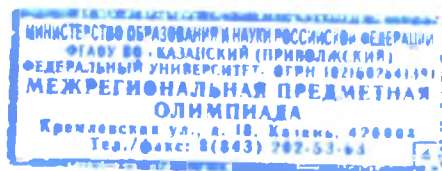
(наименование дисциплины)

**Данные участника**

ID номер участника

1011713

Дата "22" января 2015 г.



Шифр

М7-39

(заполняется оргкомитетом)

### Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика

(профиль олимпиады)

7

(класс участия)

### Задача 1

Пусть возраст 1-го сына -  $a$   
 возраст 2-го сына -  $b$   
 возраст дочки -  $c$   
 возраст Полины -  $n$

По условию, суммарный возраст дочки и двух сыновей Полины такой же, как возраст Полины  $\Rightarrow$

$$a + b + c = n$$

Пусть прошло  $x$  лет. Теперь суммарный возраст только 2-х сыновей будет равен возрасту Полины. Т.к. прошло  $x$  лет, то сыну сейчас  $a+x$  лет, 2-ому -  $b+x$  лет, дочке -  $c+x$  лет, Полине -  $n+x$  лет  $\Rightarrow$

$$(a+x) + (b+x) = n+x$$

$$a+b+2x = n+x \quad | -x$$

$$a+b+x = n$$

при этом  $a+b+c = n \Rightarrow (a+b+x) - (a+b+c) =$

$$= n - n = 0$$

$x - c = 0 \Rightarrow x = c \Rightarrow$  дочке сейчас  $c+x = 2c$ , а изначально возраст дочки был  $c \Rightarrow$  дочка выросла в 2 раза.  
 Ответ: в 2 раза

## Задача 2 (4.5)

Пусть  $X_1$  - первое число. Будем доказывать по индукции, что  $n+1$ ое введенное число равно  $X_1 + 6n$ .

База: докажем, что второе число  $X_1 + 6$  пусть 2ое число  $X_2$  по условию,  $X_1 + 3 = \frac{X_1 + X_2}{2}$  (т.к. ср. ариф. чисел <sup>всех</sup> возрастает на 3 после каждого след. введенного числа. Изначальное ср. арифм. числа  $X_1$  это  $X_1$ , а ср. арифм. чисел  $X_1$  и  $X_2$  это  $\frac{X_1 + X_2}{2}$ )

$$2X_1 + 6 = X_1 + X_2 \quad | -X_1$$

$$X_1 + 6 = X_2 \quad \text{ч.т.д.}$$

Шаг. Переход индукции: допустим, что для первых  $k$  чисел это верно (т.е. первые  $k$  чисел это  $X_1, X_1 + 6, X_1 + 12, \dots, X_1 + (k-1) \cdot 6$ ). докажем, что  $k+1$ ое число это  $X_1 + 6k$ .

Пусть  $k+1$ ое число это  $X_{k+1}$ . Из условия следует, что

$$\underbrace{X_1 + X_1 + 6 + X_1 + 12 + \dots + X_1 + 6(k-1)}_k + 3 = \underbrace{X_1 + X_1 + 6 + X_1 + 12 + \dots + X_1 + 6k + X_{k+1}}_{k+1}$$

(т.к. ср. арифм. + 3 после кажд. след. введенного числа. ср. ариф.  $k$  чисел это  $\frac{X_1 + X_1 + 6 + \dots + X_1 + 6(k-1)}{k}$ , а ср. ариф.  $k+1$  чисел это  $\frac{X_1 + X_1 + 6 + \dots + X_1 + 6(k-1) + X_{k+1}}{k+1}$ )

Сумма чисел  $1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + \dots + 6(k-1) = 3(k-1)k$  (т.к. мы можем ~~составить~~ <sup>составить</sup> каждую пару:  $6(k-1)$  и  $1 \cdot 6$ ,  $6(k-2)$  и  $2 \cdot 6$  и т.д. Сумма чисел в каждой паре  $6k$ , пар  $k-1$ , при этом каждое число повтор. 2 раза, т.е. составляет в паре  $6X$  и  $6(k-X)$ ;  $6(k-X)$  и  $6X \Rightarrow$  делим на 2 и получаем  $3(k-1)k$ .)

$$\frac{kX_1 + 3k(k-1)}{k} + 3 = \frac{3kX_1 + 3k(k-1) + X_{k+1}}{k+1}$$

$$\frac{kX_1 + 3k(k-1) + 3k}{k} = \frac{kX_1 + 3k(k-1) + X_{k+1}}{k+1}$$

$$\frac{kX_1 + 3k^2}{k} = \frac{kX_1 + 3k(k-1) + X_{k+1}}{k+1}$$



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 7 класс,  
вариант \_\_\_\_\_

Задача 2 (4.2)

$$X_1 + 3k = \frac{kX_1 + 3k(k-1) + X_{k+1}}{k+1}$$

$$(k+1)X_1 + 3k(k+1) = kX_1 + 3k(k-1) + X_{k+1} \quad \checkmark$$

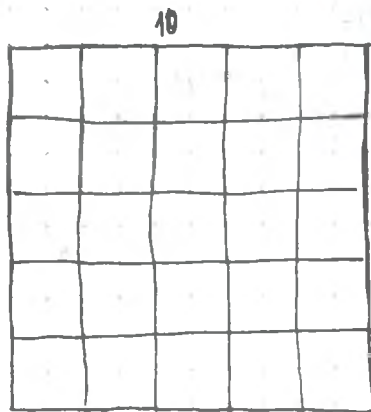
$$(k+1)X_1 + 3k^2 + 3k - 3k^2 + 3k - X_{k+1} - kX_1 = 0$$

$$X_1 + 6k = X_{k+1} \quad \text{ч.т.д.}$$

Значит, мы по индукции доказали что  $n+1$ ое введенное число равно  $X_1 + 6n \Rightarrow$  1000е число равно  $X_1 + 6 \cdot 99 \Rightarrow$  ~~равно~~ больше 1000 на  $6 \cdot 99 = 594$

Ответ: 594

Задача 3 (4.1)

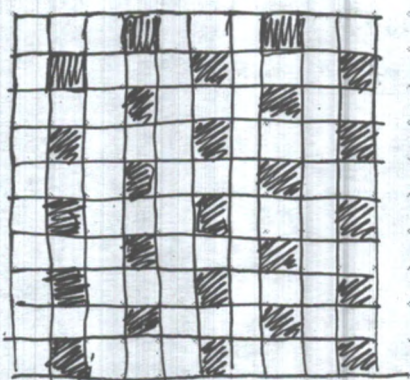


разобьем квадрат  $10 \times 10$  на квадраты  $2 \times 2$ . Их будет 25. По условию, в каждом таком квадрате должна быть вырезанная клетка, иначе можно будет вырезать квадрат  $2 \times 2 \Rightarrow$  ~~не~~ вырезанных клеток  $\geq 25$

Приведем пример из 25 ~~из~~ вырезанных клеток



### Задача 3 (ч. 2.)



замечим, что в любом квадрате  $2 \times 2 \Rightarrow 1$  возрз клетка и если мы посчитаем на любую горизонт строку ~~то~~ в любой горизонт прямоугольнике  $1 \times 4 \geq 1$  возрз клетка  $\Rightarrow$  пример верный и миним. число 25

Ответ: 25

### Задача 4

Дано:  $BX = BY$

Пусть  $\angle YBG = \alpha$

$BCFG$  - квадрат  $\Rightarrow \angle CBG = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle YCG = 90 - \alpha$

$\angle DBA = 90^\circ$ ,  $\angle CBY = 90 - \alpha$ ,  
 $\angle DBY$  - развернутый  $\Rightarrow \angle XBC = \alpha$

$BD = BA$  (как стор. квадр.)  
 $\angle DBC = 90 + \alpha = \angle ABG$   
 $BG = BC$  (как стор. квадр.)  $\Rightarrow$

$\triangle DBC = \triangle ABG \Rightarrow$   
 (по I признаку)

$\Rightarrow \angle DCB = \angle AGB$

$\left. \begin{array}{l} \angle DCB = \angle AGB \\ \angle YBG = \alpha = \angle XBC \\ BC = BG \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BYG = \triangle BXC \Rightarrow BX = BY$  ч.т.д.

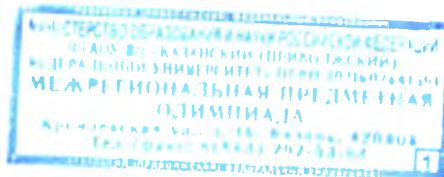
### Задача 5 (ч. 1.)

С - серебряная монета  
 З - золотая монета  
 Б - бронзовая монета

Первыми взвешивали на 1 гашу весов поставили

~~1 золотую~~ 1 золотую (ЗЗ) и 1 серебряную (Сс) а на вторую гашу весов поставили 2 золотую (ЗЗ) и 1 бронзовую (ББ)



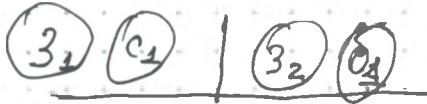


Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 7 класс,

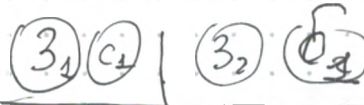
Задача 5(4.2)

Л - легкая ширь  
Т - темная ширь



1) показано =  $\Rightarrow$

~~показано~~



$$\begin{array}{cc} \text{Л} & \text{Т} = \text{Т} & \text{Л} \\ \text{Т} & \text{Л} = \text{Л} & \text{Т} \end{array}$$

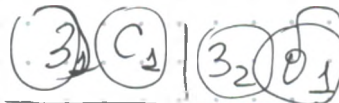
если показано равно, то  $z_1$  либо  $z_1 \text{ Л}$  и  $z_2 \text{ -т}$  (т.к. среди них должно быть 1 легкая и 1 темная ширь)  $\Rightarrow c_1 \text{ -Т}$  (если Л, то  $z_1 + c_1 < z_2 + c_2$ ) и  $b_1 \text{ -Л}$  (если  $b_1 \text{ -т}$ , то  $z_1 + c_1 < z_2 + b_1$ ), либо  $z_1 \text{ -Т}$  и  $z_2 \text{ -Л}$

(т.к. среди них 1 т, 2 л - Л)  $\Rightarrow c_1 \text{ -Л}$  (если  $c_1 \text{ -т}$ , то  $z_1 + c_1 > z_2 + b_1$ ) и  $b_1 \text{ -т}$  (если  $b_1 \text{ -Л}$ , то  $z_1 + c_1 > z_2 + b_1$ ). Тогда вторыми увеличиваем сравним  $z_1$  и  $z_2$

Если  $z_1 > z_2 \Rightarrow z_1 \text{ -т}, z_2 \text{ -Л} \Rightarrow c_1 \text{ -Л} \Rightarrow c_2 \text{ -Т}, b_1 \text{ -т} \Rightarrow b_2 \text{ -Л} \Rightarrow$  мы нашли все тем. ширь.

Если  $z_1 < z_2 \Rightarrow z_1 \text{ -Л}, z_2 \text{ -Т} \Rightarrow b_1 \text{ -Л} \Rightarrow b_2 \text{ -Т}, c_1 \text{ -т} \Rightarrow$  мы нашли все тем. ширь.

2) показано  $>$



$$\begin{array}{cc} \text{Т} & \text{Т} > \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Т} & \text{Л} > \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Т} & \text{Т} > \text{Л} & \text{Т} \end{array}$$

если  $z_1 < z_2 \Rightarrow$

$z_2 \text{ -т}, z_1 \text{ -Л} \Rightarrow$

$$z_1 + c_1 \leq \text{Л} + \text{Т},$$

$$z_2 + b_1 \geq \text{Л} + \text{Т} \Rightarrow$$

$$z_1 + c_1 \leq z_2 + b_1, \text{ что}$$

противоречие  $\Rightarrow z_1 \text{ -т}, z_2 \text{ -Л.}$

$$z_1 + c_1 \leq \text{Т} + \text{Л}, z_2 + b_1 \geq \text{Т} + \text{Л} \Rightarrow z_1 + c_1 \leq z_2 + b_1, \text{ что}$$

противоречие  $\Rightarrow c_1 \geq b_1$ . Тогда есть 3 варианта:

$$\begin{array}{cc} c_1 & b_1 \\ \text{Т} & \geq \text{Л} \\ \text{Л} & \geq \text{Л} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} c_2 & b_2 \\ \text{Л} & \leq \text{Л} \\ \text{Т} & \geq \text{Т} \end{array}$$

из этого следует, что  $c_2 \leq b_2$



Задача 5 (4.3)  
 Тогда вторыми взвешиванием взвесим  $C_1$  с  $B_2$

1)  $(C_1) (B_2)$  = если равно, то  $\frac{(C_1) (B_2)}{1 = 1} \Rightarrow C_2 - T \Rightarrow C_1 < C_2 \vee$   
 $T = T$  значит  $C_1 - m, B_2 - m$  и при этом  $Z_1$ -меш  $\Rightarrow$  мы нашли 3 мешки  
 3 мешка

2)  $>$  если  $>$ , то  $\frac{(C_1) (B_2)}{T > 1} \Rightarrow C_1 - m, B_2 - 1 \Rightarrow B_1 - m,$   
 $Z_1$ -меш  $\Rightarrow$  мы нашли 3 мешка

3)  $<$  если  $<$ , то  $\frac{(C_1) (B_2)}{1 < T} \Rightarrow B_2 - m, C_1 - 1 \Rightarrow C_2 - T,$   
 $Z_1$ -меш  $\Rightarrow$  мы нашли 3 мешка

Мы разобрали все случаи если первый взвешива-  
 нием показано  $>$  и доказали, что получится найти  
 3 мешка

3) показано  $<$ . Давайте проверим те же самые  
 рассуждения, где первым взвешиванием показано  
 знак  $>$ , значит следующие мешки:  $Z_1 \rightarrow Z_2, C_1 \rightarrow B_1,$   
 $C_2 \rightarrow B_2$ . Таким образом в этом случае мы также  
 сможем найти 3 мешка

Получается, что во всех случаях мы можем найти  
 3 мешка, следуя этому алгоритму.

Ответ: Мария определит за 2 взвешивания 3  
 мешка, пользуясь вышеописанными операциями