

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональная предметная олимпиада



ШИФР	М7-55
------	-------

(заполняется оргкомитетом)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 7 классов,
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

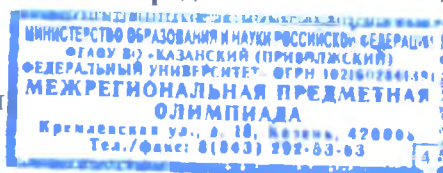
(наименование дисциплины)

Данные участника

ID номер участника

1010819

Дата "22" января 2025 г.



Шифр М7-55
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика
(профиль олимпиады)

7
(класс участия)

Задание 1

Обозначим возраст дочки за x , 1го сына за y , а 2го сына за z . Тогда по условию возраст Полины — $x+y+z$ (сумма возрастов детей).

"Пройдёт несколько лет" — обозначим это кол-во лет за t .

Дочке будет уже $x+t$, 1ому сыну $y+t$, 2ому сыну $z+t$, а Полине $x+y+z+t$. По условию возраст Полины можно выразить как $(y+t)+(z+t) = y+z+2t \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+y+z+t = y+z+2t \rightarrow x+t = 2t \Rightarrow x = t$$

Мы знаем, что дочке стало $x+t$ лет, знаем, что $x = t \Rightarrow$

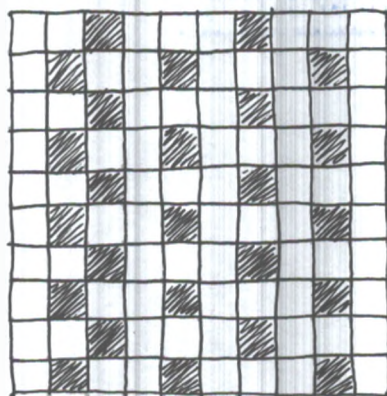
$\Rightarrow x+t = 2x$ (заменяем t на x). Если дочке было x , а стало $2x$, значит, она повзрослела в 2 раза ($2x : x = 2$).

Ответ: Дочка повзрослела в 2 раза

Задание 3

Ответ: 25 клеток

Пример:



■ - вырезанные клетки

Докажем, почему не могло быть вырезано ≤ 24

Разобьём квадрат 10×10 на строки по 2 клетки каждая. Их получится 5. Посмотрим на любую из этих строк. В ней содержится ровно 5 квадратов 2×2 , которые не пересекаются между собой и с др. квадратами оставшихся строк. По условию, после вырезания некоторых клеток, мы не хотим, чтобы можно было вырезать квадрат $2 \times 2 \Rightarrow$ в каждом из 5 наших квадратов в строке должна быть ≥ 1 клетка вырезана \Rightarrow во всей строке ≥ 5 клеток (выше сказали, что квадраты между собой не пересекаются). Значит, если всего 5 строк, то вырезанных клеток $\geq 5 \cdot 5 = 25$ (т.к. выше сказали, что квадраты в разных строках тоже не пересекаются). Мы доказали.

≥ 5	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1
≥ 5	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1
≥ 5	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1
≥ 5	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1
≥ 5	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1

Разобьём квадрат 10×10 на 25 непересекающихся квадратов 2×2 . По условию, мы не хотим, чтобы после вырезания клеток можно было вырезать квадрат $2 \times 2 \Rightarrow$ в каждом из данных 25 квадратов ≥ 1 вырезанная клетка. Значит, всего ≥ 25 вырезанных клеток.

Мы доказали, что не может быть ≤ 24 вырезанные клетки.

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 7 класс,

вариант _____

Задание 2

Обозначим 1-ое введенное Васей число за a_1 , следующее за a_2 и т.д.

Ср. арифм. числа a_1 — $\frac{a_1}{1} = a_1$, тогда ср. арифм. числа a_1 и a_2 — $\frac{a_1 + a_2}{2} = a_1 + 3$ (следует из условия)

Посчитаем ср. арифм. числа $a_1, a_2, \dots, a_{98}, a_{99}$.

Это $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{98} + a_{99}}{99} = a_1 + 98 \cdot 3$ (98 · 3, потому что к

числу a_1 мы еще добавили 98 новых чисел (ввели их) \Rightarrow ср. арифм. увеличилось на 98 · 3)

Теперь посчитаем ср. арифм. числа $a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$.

Это $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{99} + a_{100}}{100} = a_1 + 99 \cdot 3$ (99 · 3 по выше сказанным

причинам)

Умножим каждое из равенств на знаменатели левых частей:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = 99 a_1 + 99 \cdot 98 \cdot 3$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 100 a_1 + 100 \cdot 99 \cdot 3$$

Если мы вычтем из 2-го равенства первое, то найдем, чему равно a_{100} :

$$a_{100} = 100 a_1 + (100 \cdot 99 \cdot 3 - 99 \cdot 98 \cdot 3) - 99 a_1 = a_1 + 99 \cdot 3 (100 - 98) =$$

$$= a_1 + 297 \cdot 2 = a_1 + 594 \Rightarrow a_{100} > a_1 \text{ на } 594$$

Ответ: на 594 больше

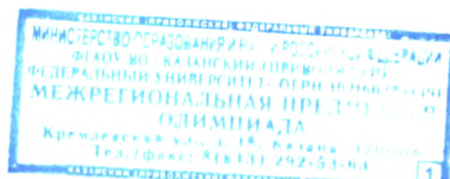
Задание 5

Обозначим золотые шри для определённости как $(З_1)$ и $(З_2)$, серебряные — $(С_1)$ и $(С_2)$, бронзовые — $(Б_1)$ и $(Б_2)$.
1ое взвешивание сделаем таким (номера шри не будут влиять на решение): $(З_1 + С_1)$ и $(С_2 + Б_2)$. Рассмотрим 3 случая:

1) $(З_1 + С_1) = (С_2 + Б_2)$. Заметим, что $(С_1)$ и $(С_2)$ разного веса (т.к. из одного материала) $\Rightarrow (З_1)$ и $(Б_2)$ — тоже разные по весу, т.к. если они $=$, то равенства $(З_1 + С_1)$ и $(С_2 + Б_2)$ не было бы. 2 взвешиванием взвесим $(З_2)$ и $(Б_1)$. Они не могут быть равны т.к. $(З_1)$ и $(Б_2)$ различны (а $(З_1 + З_2) = (Б_1 + Б_2)$ исходя из условия). Если $(З_2) > (Б_1)$, то $(З_2)$ — тяж. $\Rightarrow \Rightarrow (З_1)$ — лёгк. $\Rightarrow (С_1)$ — тяж. $\Rightarrow (С_2)$ — лёгк. $\Rightarrow (Б_2)$ — тяж. \checkmark
Значит, $(З_2)$, $(С_1)$ и $(Б_2)$ — тяжёлые. \checkmark
Если $(З_2) < (Б_1)$, то $(Б_1)$ — тяж. $\Rightarrow (Б_2)$ — лёгк. $\Rightarrow (С_2)$ — тяж. $\Rightarrow (С_1)$ — лёгк. $\Rightarrow (С_2)$ — тяж. Значит, $(Б_1)$, $(С_2)$ и $(З_1)$ — тяжёлые. \checkmark
 $(З_1)$

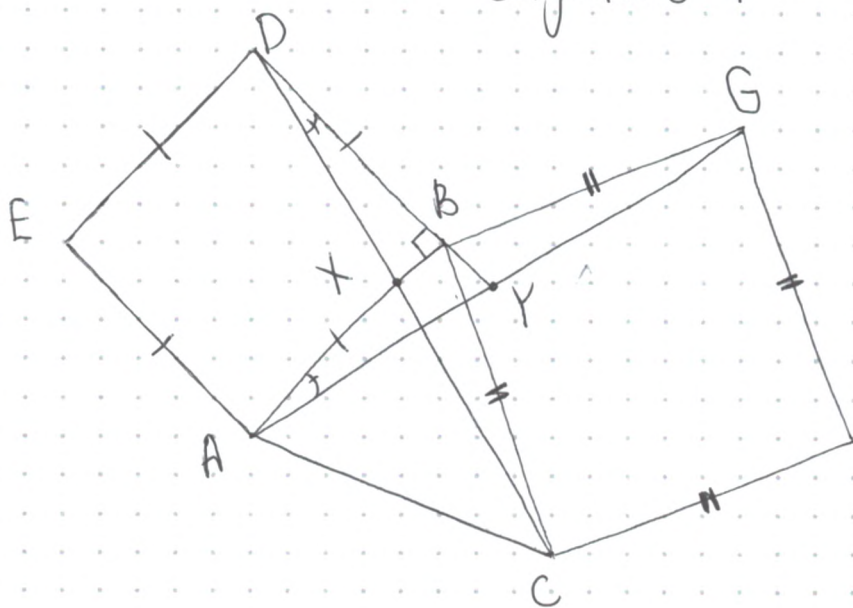
2) $(З_1 + С_1) > (С_2 + Б_2)$. Значит, ~~$(З_1)$ и $(С_1)$ — тяжёлые~~

Заметим, что $(С_1)$ и $(С_2)$ — различные. Пусть $(С_2)$ — тяж, а $(С_1)$ — лёгк. Тогда поймём, что $(З_1) + \text{лёгк.} > \text{тяж.} + (Б_2)$. Такого не может быть, т.к. если даже $(Б_2)$ — лёгк., то между двумя суммами монет быть либо $=$, либо $<$ (в зависимости от $(З_1)$), но никак не $>$ ~~т.к. тяж. + тяж.~~ $\Rightarrow (С_2)$ — лёгк., а $(С_1)$ — тяж.
Значит, 2 взвешиванием взвесим $(З_1)$ и $(Б_2)$



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по « математике », 7 класс,

Задание 4



Дано:

$\square ABC$

$\square ABDE$

$\square BCFG$

$[CD] \cap [AB] = () X$

$F(BD) \cap [AG] = () Y$

Док-ть:

$BX = BY$

Решение:

$\square ABDE \Rightarrow AB = BD = DE = AE$
по св-ву \square

$\square BCFG \Rightarrow BC = BG = GF = CF$
по св-ву \square

$\angle DBC = \angle DBA (= 90^\circ \text{ по св-ву } \square) + \angle ABC$

$\angle ABG = \angle CBG (= 90^\circ \text{ по св-ву } \square) + \angle ABC$

$\Rightarrow \angle DBC = \angle ABG$

$BD = AB$

$\angle DBC = \angle ABG$

$BC = BG$

по 2 ст. и углу м/у ними

$\Rightarrow \triangle ABG = \triangle DBC$

по отп. \triangle

$\Rightarrow \angle BAG = \angle BDC$

$BD = AB$

$\angle BDC = \angle BAG$

$\angle DBA (= 90^\circ) = \angle ABY (= 90^\circ, \text{ т.к. смежные с } \angle DBA = 90^\circ)$

по 2 углам и ст. м/у ними

$\Rightarrow \triangle DBX = \triangle ABY \Rightarrow BX = BY$

$BX = BY$

~~Если $\angle ABC$ тупой ($> 90^\circ$), то $\angle DBC$ и $\angle ABG$ тоже тупые, если $\angle ABC = 90^\circ$, то (.) X и~~

(.) Y просто совпадают с (.) B

Задание 4 (продолжение)

Решение:

$$\square ABDE \Rightarrow AB = BD = DE = AE$$

по св-ву \square

$$\square BCFG \Rightarrow BC = BG = GF = CF$$

по св-ву \square

$$\left. \begin{aligned} \angle DBC &= \angle DBA (\approx 90^\circ \text{ по св-ву } \square) + \angle ABC \\ \angle ABG &= \angle CBG (\approx 90^\circ \text{ по св-ву } \square) + \angle ABC \end{aligned} \right| \Rightarrow \angle DBC = \angle ABG$$

$$\left. \begin{aligned} BD &= AB \\ \angle DBC &= \angle ABG \\ BC &= BG \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{по 2 ст. и углу} \\ \text{м/у ними} \\ \Rightarrow \Delta ABG = \Delta DBC \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{по опр.} \\ = \Delta \end{array} \star \angle BAG = \angle BDC$$

$$\left. \begin{aligned} BD &= AB \\ \angle BDC &= \angle BAG \\ \angle DBA (\approx 90^\circ) &= \angle ABY (\approx 90^\circ, \text{ т.к. смежн. с } \angle DBA \approx 90^\circ) \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{по 2 углам} \\ \text{и ст. м/у ними} \\ \Rightarrow \Delta DBX = \Delta ABY \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{по опр.} \\ = \Delta \end{array} BX = BY$$

Если $\angle ABC = 90^\circ$, то $(\cdot) X$ и $(\cdot) Y$ совпадают с $(\cdot) B$.

Если $\angle ABC > 90^\circ$, то аналогичные рассуждения применимы также, где $\angle ABC < 90^\circ$.