

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональная предметная олимпиада



ШИФР	М7-35
------	-------

(заполняется оргкомитетом)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 7 классов,
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

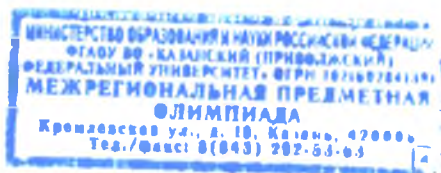
(наименование дисциплины)

Данные участника

ID номер участника

1012057

Дата "22" января 2025 г.



Шифр

147-35

(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика

(профиль олимпиады)

7

(класс участия)

Задача 1

Пусть Полине x лет, y_1 и y_2 - сыновьям, а n лет дочке
Тогда по условию

$$x = n + y_1 + y_2$$

Пусть прошло r лет и тогда выполнилось второе условие.
(Полине будет $x+r$, а сыновьям y_1+r и y_2+r)

$$x+r = y_1+r + y_2+r$$

$$x+r = 2r + y_1 + y_2 \Rightarrow x = r + y_1 + y_2$$

Если приравняем к первому условию, то получим, что

$$x = r + y_1 + y_2 = n + y_1 + y_2 \Rightarrow r = n. \text{ А значит дочке сейчас}$$

$2n$ лет, т.е. в два раза больше

Ответ: в 2 раза

Задача 2

Докажем, что каждое следующее число будет $\frac{1}{6}$ на 6 больше, чем предыдущее.

Пусть на данном этапе у нас образовались числа

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ и нам нужно найти a_{k+1} .

Сейчас пусть их ср. арифм. будет k . Тогда их сумма - kx . По условию при добавлении числа ср. арифм.

Задача 2 (Продолжение)

должно увеличиться на 3, т.е. будет $k+3$. А раз чисел $x+1$ будет, то их сумма станет $(k+3)(x+1) \Rightarrow$ чтобы найти a_{x+1} нужно из новой суммы вычесть предыдущую сумму, зная что $a_{x+1} = (k+3)(x+1) - kx = kx + k + 3x + 3 - kx =$
 $= k + 3x + 3$

Теперь посчитаем чему равно a_x по такой же логике, но с a_{x-1} . Т.е. средн арифм у чисел a_1, a_2, \dots, a_{x-1} должно быть $k-3$, след. их сумма $(k-3)(x-1)$, ведь чисел $x-1$. А сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_x$ мы уже считали, она равна kx . Значит $a_{x-1} = kx - (k-3)(x-1) = kx - (kx - k - 3x + 3) =$
 $= kx - kx + k + 3x - 3 = k + 3x - 3$

Можно заметить, что $k+3x$ встречается и в a_x и в a_{x-1} , но в первом числе прибавляется 3, а во втором вычитается, а значит их разность в 6. Ф.т.д.

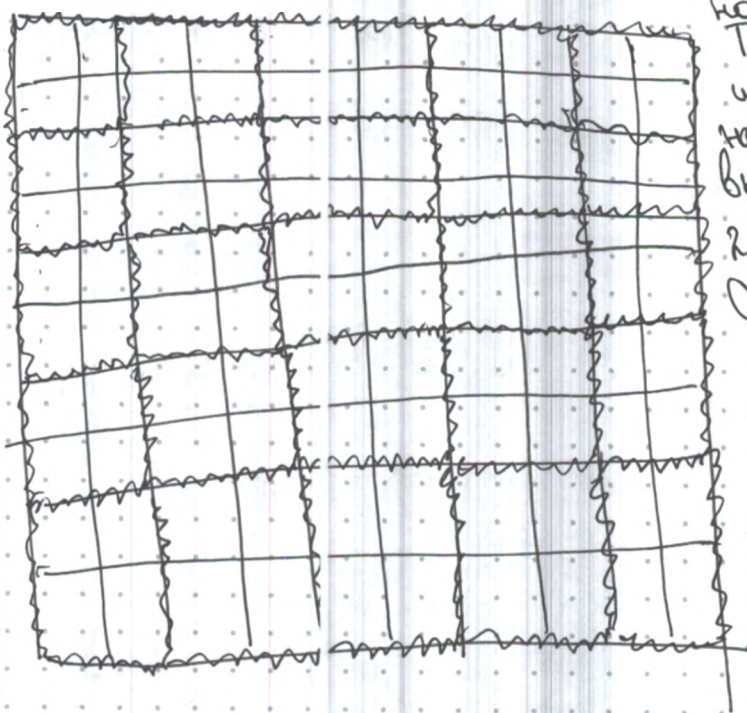
Ну а между первым и 100-м числом 99 промежутков (разниц между соседними числами), т.е. оно больше на $99 \cdot 6 = 594$.

Ответ: 594

Задача 3.

Оценка: Докажем, что нам всегда нужно будет ≥ 25

клеток вырезать: разобьем квадрат следующим образом:



на 25 квадратиков 2×2 . Тогда раз по условию в каждой из них должно быть ≥ 1 вырезанная клетка (ведь иначе после вырезания клеток найдется 2×2 , что противоречит условию) След. вырезанных клеток ≥ 25 .

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 7 класс,
вариант _____

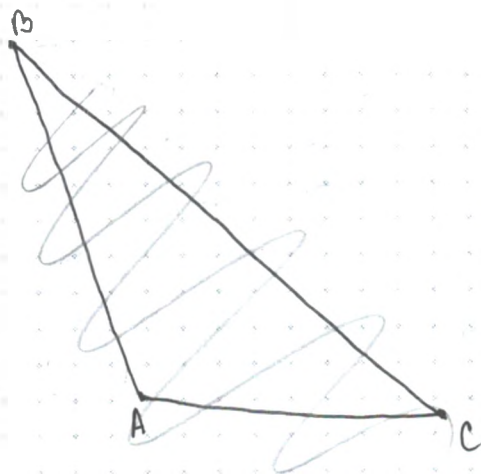
Задача 3 продолжение
Пример:

1	3	4	1	3	4	1	3	4
3	4	1	3	4	1	3	4	1
1	3	4	1	3	4	1	3	4
3	4	1	3	4	1	3	4	1
1	3	4	1	3	4	1	3	4
3	4	1	3	4	1	3	4	1
1	3	4	1	3	4	1	3	4
3	4	1	3	4	1	3	4	1
1	3	4	1	3	4	1	3	4
3	4	1	3	4	1	3	4	1

Закрашенные клетки - вырезаны.
Их во первых, ровно 25, тк в каждой
второй столбце вырезано ровно 5
клеток ($5 \cdot 5 = 25$). Во вторых, если рассматривать
строки, то в каждой строке
между двумя вырезанными расстояния
максимум 3, а значит вырезать
горизонтальный $1 \cdot 4$ не получится,
а если рассматривать квадраты
 $2 \cdot 2$, то для наглядности можно

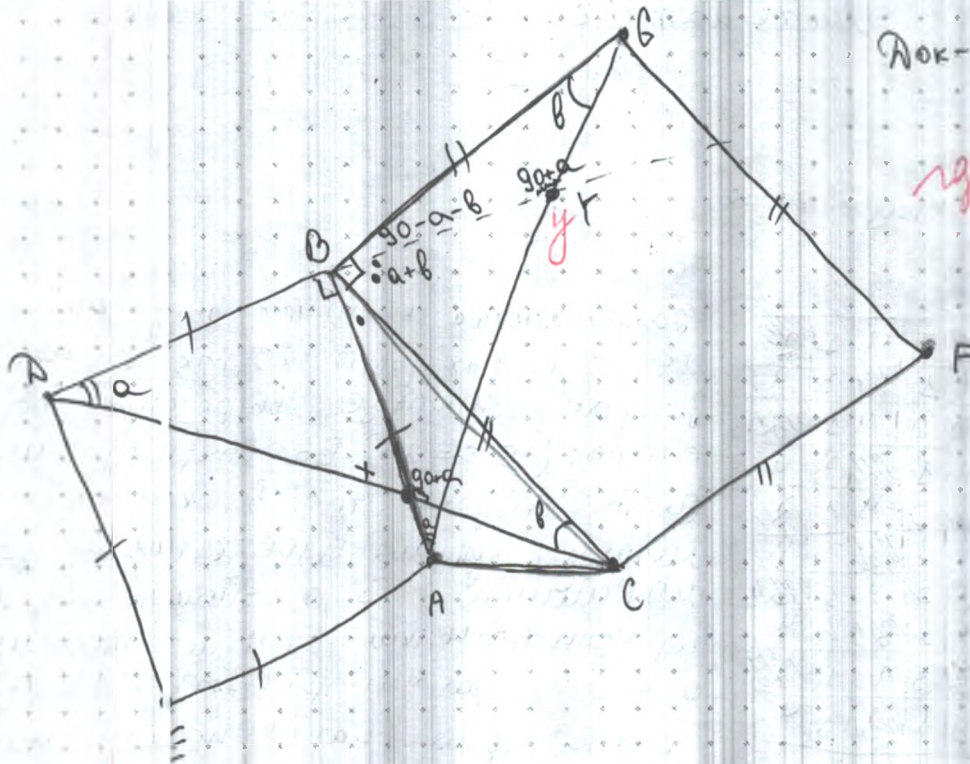
раскрасить клетки в 4 цвета (т.е. ~~идеально~~ ~~идеально~~ ~~идеально~~
как на рисунке) видно, что мы вырезаем все 2-е цвета,
но в каждом квадрате $2 \cdot 2$ есть каждый цвет
по одному разу, а значит без второго мы не
сможем составить.

Задача 4:



~~Задача 4~~

Задача 4



Док-ть: $BY = BX$

где на рисунке
точка Y?

$\triangle ABC = \triangle ABG$ по первому признаку (тк стороны у нас это 2 стороны квадратов, а углы внешним к себе угла ABC и 90 , т.е. равны) $\Rightarrow GA = AC$.

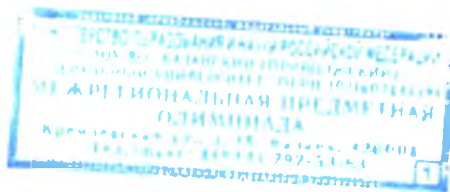
Возьмем $\angle PCA = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, по равенству треугольников $\angle BGA = \beta$, $\angle BAG = \alpha$. Тогда внешний угол к треугольнику ABC (за точкой B) равен $\alpha + \beta$. Раз весь угол BCG прямой, то $\angle CBY = 90 - \alpha - \beta$. Тогда $\angle YCG = 180 - (90 - \alpha - \beta) - \beta =$
 $= 180 - 90 + \alpha + \beta - \beta = 90 + \alpha$. $\angle AXB = 90 - \alpha$, тк $\angle BAX = \alpha$ и

$\angle DBX$ - прямой, следовательно мы считаем $\angle BXC = 90 + \alpha$

А из этого мы понимаем, что $\angle BXC = \angle BYG$.

Теперь несложно доказать, что $\triangle BXC = \triangle BYG$. Ведь так же в этих треугольниках $\angle XCB = \angle YG$, они оба β , а значит и третий угол равен: ($\angle GBY = \angle CBX$).

Еще известно, что $BC = BG$, тк это стороны квадрата, а значит, $\triangle BXC = \triangle BYG$ по второму признаку. Следовательно $BY = BX$, и.т.д.



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 7 класс,

Задача 5.

Реш

Во первых, будем обозначать наши гири как $З_1, З_2$ — золотые, $С_1, С_2$ — серебряные и $Б_1, Б_2$ — бронзовые. Тогда первое взвешивание сделаем следующим:

$$\underline{Б_2, З_1 = Б_1, С_1}$$

(1ый вариант если они равны)

Раз мы знаем, что среди $Б_1$ и $Б_2$ есть одна легкая и одна тяжелая, то соответственно среди $З_1$ и $С_1$ тоже. (примем вес $З_1$ противоположен $Б_2$, а вес $С_1$ противоположен $Б_1$)

Тогда следующим взвешиванием нам достаточно сравнить $Б_1$ и $Б_2$, если $Б_2 > Б_1$, то $С_1 > З_1 \Rightarrow С_1$ — тяжелая, а

$З_1$ — легкая, а значит все тяжелые гири это $С_1, З_2$ и $Б_2$. Ну а если $Б_1 > Б_2$, то $З_1 > С_1 \Rightarrow З_1$ — тяжелая, $С_1$ — легкая и все легкие гири это $З_1, С_2$ и $Б_1$.

(2ой вариант) Если при взвешивании $Б_2, З_1$ перевесит $Б_1, С_1$:

$$\underline{Б_2, З_1 > Б_1, С_1}$$

Тогда в этом случае $Б_2$ не легкая монета, тк иначе $Б_1$ — тяжелая и даже если $З_1$ — тяжелая, а $С_1$ — легкая, то у них будет равно, что противоречит условию.

Тогда $Б_2$ — тяжелая гиря и $Б_1$ — легкая. Теперь мы можем сказать, что если $З_1$ — легкая, то $С_1$ тоже должна быть легкой.

Второе взвешивание сделаем следующим:

$$\underline{С_1, З_1 = С_2, З_2}$$

1) Если равно, то $З_2$ не может легкой, ведь тогда и $З_1$ будет легкой, но среди $С_1$ и $С_2$ ровно 1 тяжелая и 1 легкая, а значит равенства быть не может, следовательно $З_1$ — тяжелая. И теперь $С_1$ не может быть тяжелой, ведь тогда $С_2$ и $З_2$ обе должны

Задача 5 (Продолжение)

~~Должно~~ быть темновым, но тогда противоречие с C_1 и C_2 .
След. C_1 - легкое, тогда C_2 - темновое и Z_2 для
равенства легкое. Значит темновыми будут: C_2, Z_1 и
 B_2 .

2) Если $C_1, Z_1 > Z_2, C_2$.

Тогда C_1 и Z_2 должны быть темновыми (т.к. если среди
них есть ≥ 1 легкое, то среди Z_2 и C_2 есть ≥ 1 темновое,
что приведет к максимуму и к равенству). Значит
темновыми являются: C_1, Z_1 и B_2 .

3) Если $C_1, Z_1 < Z_2, C_2$, то Z_1 - легкое, ведь иначе

Z_1 - темновое и Z_2 - легкое и опять даме если
 C_1 ~~темновое~~ ^{легкое}, а C_2 - темновое и при этом максимум
к равенству. Значит Z_1 - легкое, а из следствия, которое
мы получили после первого взвешивания C_1 тоже
легкое \Rightarrow темновыми: C_2, Z_2, B_2 .

(Если в первом взвешивании груз будет в другую
сторону, то варианты абсолютно аналогичные,
просто ~~они будут~~ ~~иначе~~ ~~иначе~~ ~~иначе~~ ~~иначе~~ в итоге
темновыми будут противоположные)