

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональная предметная олимпиада



ШИФР	М7-40
------	-------

(заполняется оргкомитетом)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 7 классов,
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

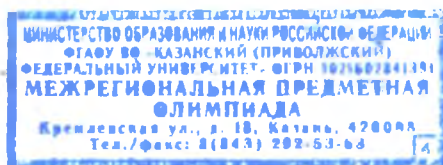
(наименование дисциплины)

Данные участника

ID номер участника

992537

Дата "22" ноября 20 25 г.



Шифр М7-40
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

математика

(профиль олимпиады)

7

(класс участия)

Задача 1.

Пусть возраст первого сына Полины - x ,

второго сына Полины - y ,

дочери Полины - z , а самой Полине a , тогда

$$x + y + z = a$$

Пусть прошло k лет и суммарный возраст сыновей будет

равен возрасту Полины, тогда:

(каждый из сыновей повзрослел на k лет)

$$x + y + 2k = a + k \quad | - k$$

(Полина повзрослела одна на k лет)

$$x + y + k = a, \text{ но так же мы знаем, что } x + y + z = a.$$

$$(x + y + k) - (x + y + z) = a - a$$

$$k - z = 0$$

$$k = z. \checkmark$$

Заметим, что в момент, когда суммарный возраст детей Полины был равен возрасту Полины, то ее дочери было z лет, то есть k лет ($z = k$), а ~~сейчас~~ в момент, когда возраст сыновей Полины был равен возрасту Полины, то ее дочери было

Задача 1 (продолжение)

$z+k$ чет $= k+k = 2k$ чет. Значит её дочь поделится в $\frac{2k}{k} = 2$ раз.

Ответ: 2.

Задача 2.

Пусть первое число введенное Васей было a_1 , второе a_2 и т.д., так, что i число введенное Васей равно a_i .

По условию после введения нового числа среднее арифметическое увеличивалось на 3. Заметим, что изначально среднее арифметическое первого числа введенного на доску было равно ему самому (a_1), а среднее арифметическое первых j введенных чисел было равно $a_1 + 3(j-1)$, т.к.

✓ среднее арифметическое каждый раз увеличивалось на 3, а
✓ всего увеличений было сделано столько же сколько чисел на доске кроме a_1 , то есть $j-1$.

Тогда:

среднее арифметическое первых k чисел $= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$, что
как мы помним равно $a_1 + 3(k-1)$, а

среднее арифметическое первых $k+1$ чисел $= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k+1}$, что
равно $a_1 + 3(k+1-1) = a_1 + 3k$.

Посмотрим на первое равенство: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} = a_1 + 3(k-1)$.

Умножим обе части равенства на k , тогда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = k \cdot a_1 + 3(k-1)k$$

Посмотрим на второе равенство: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k+1} = a_1 + 3k$

Умножим обе части равенства на $k+1$, тогда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1(k+1) + 3k(k+1)$$

Из левой части второго равенства вычтем левую часть первого равенства, а у правой части второго равенства

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 7 класс,

вариант _____

Задача 2 (продолжение).

вычтем правую часть первого равенства.

Получим:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) = (a_1(k+1) + 3k(k+1)) - (a_1k + 3(k-1)k)$$

$$a_{k+1} = a_1 + 3k(k+1 - (k-1))$$

$$a_{k+1} = a_1 + 3k \cdot 2.$$

Заметим, что тогда 100-е число $= a_{100}$.

Подставим его под эту формулу, при $k=99$.

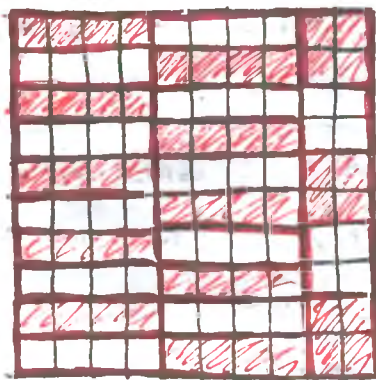
$$a_{k+1} = a_{100} = a_1 + 3 \cdot 99 \cdot 2.$$

$a_{100} = a_1 + 594$, тогда разность 100-го и 1-го числа равна:



$$a_{100} - a_1 = a_1 + 594 - a_1 = 594.$$

Ответ: 594.

Задача 3.



разобьем нашу доску на 25 фигурок

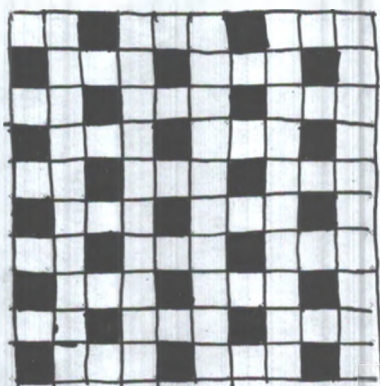
вида  и  так



Заметим, что в каждой из 25 не пересекающихся фигурок должна быть

хотя бы 1 вырезанная клетка. Тогда всего Барон Мюнхгаузен должен вырезать ≥ 25 клеток.

Приведем пример на 25 клеток:



Барон вырезает украшения на рис 2 клетки.


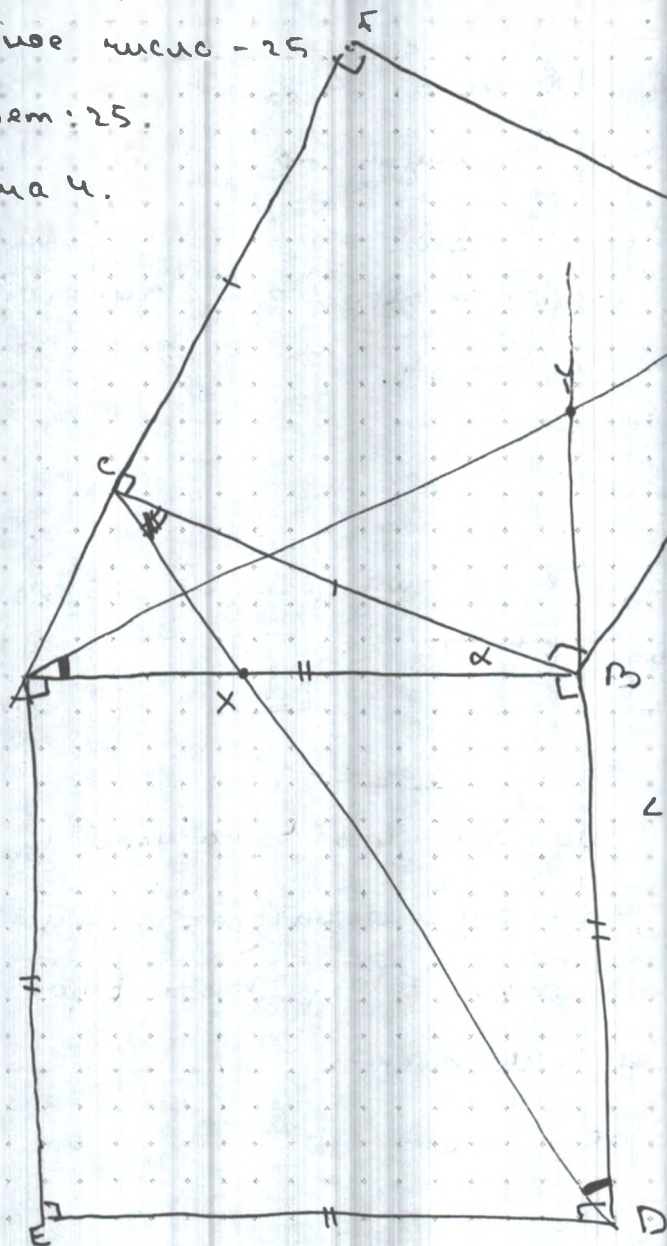
Заметим, что в этом пример, в любой горизонтальной  1×4 и в любом квадрате 2×2 есть окрашенная клетка,

рис 2. а значит вырезав эти 25 клеток больше не получится вырезать ни одного горизонтального 1×4 ни одного квадрата 2×2 .

Мы докажем, что необходимо вырезать ≥ 25 клеток и приведем пример на 25 клеток, а следовательно такое минимальное число - 25.

Ответ: 25.

Задача 4.



Док-тво: $BX = BY$.

1) Пусть $\angle ABC = \alpha$,

тогда

$$\angle ABG = 90^\circ + \alpha = \angle CBD.$$

т.к. $BCFG$ - квадрат, то $BC = BG$.

т.к. $ABDE$ - квадрат, то $BD = AB$.

$$\left. \begin{array}{l} BC = BG \\ BD = AB \\ \angle CBD = \angle ABG \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DBG \quad (\text{по I признаку})$$

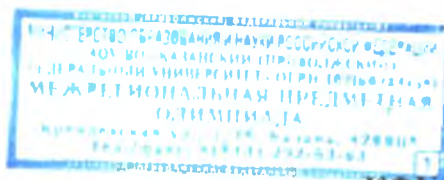
$$\Rightarrow \angle CDB = \angle GAB.$$

$$\angle ABY = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ.$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAY = \angle BDY \\ \angle ABY = 90^\circ = \angle DBY \\ AB = BD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABY \cong \triangle DBY \quad (\text{по II признаку})$$

рис 3. стороны квадрата

$$BX = BY \quad \text{ч.т.д.}$$



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 7 класс,

Задача 5.

Пусть первая золотая $З_1$, вторая золотая $З_2$,
первая серебряная $С_1$, вторая серебряная $С_2$,
первая бронзовая $Б_1$, вторая бронзовая $Б_2$.

Первым взвешиванием на первую чашу весов положили $З_1$ и $С_1$, а на вторую $З_2$ и $Б_2$.

Разберем все 3 возможных результата взвешивания (\geq , $<$, $=$)

I вариант:

$$З_1 + С_1 = З_2 + Б_2. \text{ Взвесим между собой } С_1 \text{ и } Б_2.$$

Заметим, что $С_1$ не может быть равна $Б_2$, т.к. $З_1 \neq З_2$.

Тогда результатом взвешивания $С_1$ и $Б_2$ может быть 2 варианта.

а) $С_1 < Б_2 \Rightarrow С_1$ - легкая, $Б_2$ - тяжелая \Rightarrow

$\Rightarrow С_2$ - тяжелая. Т.к. $С_1 < Б_2$, а $З_1 + С_1 = З_2 + Б_2$, то

$З_1 > З_2 \Rightarrow З_1$ - тяжелая, $З_2$ - легкая, тогда мы нашли

3 тяжелые: это $З_1, С_2, Б_2$

б) $С_1 > Б_2 \Rightarrow С_1$ - тяжелая, $Б_2$ - легкая \Rightarrow

$\Rightarrow Б_1$ - тяжелая. Т.к. $С_1 > Б_2$, а $З_1 + С_1 = З_2 + Б_2$, то

$З_1 < З_2 \Rightarrow З_2$ - тяжелая, $З_1$ - легкая, тогда мы нашли

3 тяжелые. это $З_2, С_1, Б_1$

Задача 5 (продолжение 4)
II вариант, $z_1 + c_1 > z_2 + b_2$.

Заметим, что если z_2 - тяжелая, то z_1 легкая, тогда $c_1 \leq z_2$, а $b_2 \geq z_1 \Rightarrow z_1 + c_1 \leq z_2 + b_2$, но у нас $z_1 + c_1 > z_2 + b_2 \Rightarrow$ z_1 - тяжелая, z_2 - легкая.

Введем и введем c_2 и b_1 против c_1 и b_2 .

Тогда результат этого ввешивания может быть один из трех. Рассмотрим все.

а) $c_2 + b_1 = c_1 + b_2$. Заметим, что среди этих трех z тяжелые и z легкие, тогда на правой и на левой чаше весов по z легкой и z тяжелой. Заметим, что c_1 и b_2 равной тяжести, тогда $c_1 > b_2$ (если c_1 было бы $< b_2$, то

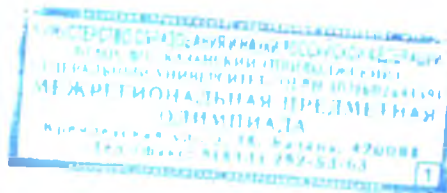
$z_1 = b_2, c_1 = z_2 \Rightarrow z_1 + c_1 = z_2 + b_2$, Противоречие). $\Rightarrow c_1$ - тяжелая, b_2 - легкая $\Rightarrow b_1$ - тяжелая, тогда z тяжелые - z_1, c_1, b_1 .

б) $c_2 + b_1 > c_1 + b_2$. Заметим, что среди этих трех z тяжелые и z легкие, тогда на чаше, которая оказалась больше z тяжелые, тогда мы нашли z тяжелые z тяжелые - z_1, c_2, b_1 .

в) $c_2 + b_1 < c_1 + b_2$. Заметим, что среди этих трех z тяжелые и z легкие, тогда на чаше, которая оказалась больше z тяжелые, тогда мы нашли все z тяжелые. z тяжелые - z_1, c_1, b_2 .

III вариант. $z_1 + c_1 < z_2 + b_2$.

Заметим, что если z_1 - тяжелая, то z_2 - легкая, тогда $c_1 \geq z_2, b_2 \leq z_1 \Rightarrow z_1 + c_1 \geq z_2 + b_2$, но у нас $z_1 + c_1 < z_2 + b_2 \Rightarrow$ z_2 - тяжелая, z_1 - легкая.



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математике », 7 класс,

Задача 5 (продолжение 2)

Введем 2 взвешивания c_2 и b_1 против c_1 и b_2 .

Тогда результат этого взвешивания может быть одним из трех. Разберем все.

а) $c_2 + b_1 = c_1 + b_2$. Заметим, что среди этих чашек 2 тяжелые и 2 легкие, тогда на правой и на левой чаше весов по 1 легкой и 1 тяжелой. Заметим, что раз c_1 и b_2 равной тяжести, тогда $c_1 < b_2$ (если c_1 было бы $> b_2$, то $b_1 = b_2, c_1 = c_2 \Rightarrow b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, Противоречие) $\Rightarrow b_2$ - тяжелая, c_1 - легкая $\Rightarrow c_2$ - тяжелая, тогда 3 тяжелые - b_2, c_2, b_1 .

б) $c_2 + b_1 > c_1 + b_2$. Заметим, что среди этих чашек 2 тяжелые и 2 легкие, тогда на чаше, которая оказалась больше 2 тяжелые, тогда мы нашли все 3 тяжелые. 3 тяжелые - b_2, c_2, b_1 .

в) $c_2 + b_1 < c_1 + b_2$. Заметим, что среди этих чашек 2 тяжелые и 2 легкие, тогда ^{на чаше} ~~мы нашли~~, которая оказалась больше 2 тяжелые, тогда мы нашли все 3 тяжелые: 3 тяжелые - b_2, c_1, b_2 .

Мы разобрали все варианты и везде тяжелые определены однозначно. Следовательно поступая много приведенным алгоритмом Мерини за 2 взвешивания можно определить все 3 тяжелые чашки.