

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональная предметная олимпиада



ШИФР	М8-68
------	-------

(заполняется оргкомитетом)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов,
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

(наименование дисциплины)

Данные участника

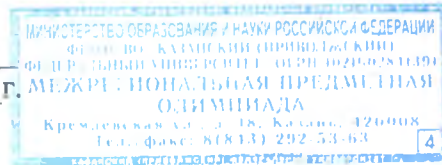
ID номер участника

917468

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональные предметные олимпиады

Место штампа

Дата "21" 01 2025 г.



Шифр М8-68
 (заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	20	20											100.
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика

(профиль олимпиады)

8

(класс участия)

Сумма цифр — целое число, поэтому $\sqrt{502}$ — иррациональное число, в которое нельзя
 Путь вreise на часах = $ab.cd$ (где ab — часы, cd — минуты)

Пошли с минутами прошло $d+10a+60b+600a$ минут (т.к. час=60 минут)

По условию это в 24 раза меньше $10a+b+c+d$, т.е.

$$600a+60b+10c+d=24(a+b+c+d)$$

$$600a+60b+10c+d=24a+24b+24c+24d$$

$$576a+36b=14c+23d$$

$d \leq 9, c \leq 5$ (т.к. эти цифры, и если $c \geq 6$, то на часах ≥ 60 минут, что невозможно!)

$$23d \leq 23 \cdot 9 = 207, 14c \leq 5 \cdot 14 = 70$$

$$23d + 14c \leq 207 + 70 = 277$$

$$576a + 36b \leq 277 \quad \text{т.к. } 23d + 14c = 576a + 36b$$

Если $a \geq 1$, то (т.к. $b \geq 0$) $576a + 36b \geq 576 \geq 277$. Противоречие. Значит, $a=0$.

$$36b = 23d + 14c$$

Заметим, что если d нечетно, то $23d$ нечетно, а, т.к. $14c$ всегда четно, $23d + 14c$ нечетно, что и $36b$ нечетно, что невозможно. Значит, d четно.

Передерем все возможные c и d в таблице: $10000 = 10000 + c \cdot 1000 + d \cdot 100 + 10 + 1$
 $14c + 23d$

$d \backslash c$	0	1	4	6	8
0	0	46	92	138	184
1	14	60	106	152	198
2	28	74	120	166	212
3	42	88	134	180	226
4	56	102	148	194	240
5	70	116	162	208	254

В момент принятия значения от 0 до 9, потому 36 в принимает значение от 0 до 324: 0, 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324.

Из этих чисел в таблице есть только 0 и 180. Значит:

36 \neq и \neq (0 - при $c=d=0$, 180 - при $c=3, d=6$). Получается, 36 \neq 0 и 180,

$b=0$ и $b=5$. Подставив числа получается, что единственные случаи - это моменты, в которые часы начали показывать 00:00 и 05:36.

Ответ: моменты, в которые часы начали показывать 00:00 и 05:36.

$\sqrt{5}$

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

Если a и b взаимно просты, то они имеют общий делитель только

Если одно из чисел равно 1, то эти a и b взаимно просты, поэтому случаи

когда одно из чисел = 1, можно не рассматривать.

Все делители числа 2024 - это $1, 2, 2^2, 2^3, 11, 11 \cdot 2, 11 \cdot 2^2, 11 \cdot 2^3, 23, 23 \cdot 2, 23 \cdot 2^2,$

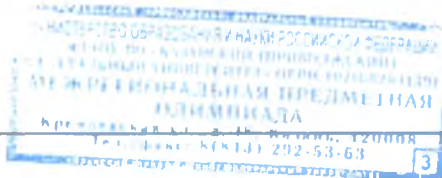
$23 \cdot 2^3, 11 \cdot 23, 11 \cdot 23 \cdot 2, 11 \cdot 23 \cdot 2^2, 11 \cdot 23 \cdot 2^3$ или $1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88, 23, 46, 92, 184,$

$253, 506, 1012, 2024$ в числах) Среди этих чисел четных 4: 1 (которого

либо не рассматриваем, как сказано выше), $11, 23$ и 253 .

Рассмотрим несколько случаев:

1) a и b четные. Тогда, так как они не взаимно просты, у них будет общий делитель. Это означает пару $(11, 23)$. Оставшиеся пары $(11, 253)$



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 8 класс,

вариант _____

и (23, 253) ~~подходят~~ подходят ко условию - всего 1 пара

2) Одно из чисел a и b (в данном случае решение, пусть a) нечетное, а другое - четное.

• При $a=11$ $b=11$ (т.к. 11 - единственный делитель a), подходят $b=23, 44, 88, 253, 506, 1012, 2024$ - 6 пар

• При $a=23$ $b=23$ (т.к. 23 - единственный делитель a), подходят $b=46, 92, 184, 506, 1012, 2024$ - всего 6 пар.

• При $a=253$ $b=11$ ~~или~~ $b=23$, т.е. подходят ~~во все~~ все ^{нечетные} делители, кроме 2 и 4 (остальные делители на 11 или на 23). Пары делителей 9, значит, и пар 9 пар.

Всего в этом случае получилось $6+6+9=21$ пара.

3) Оба числа a и b четные.

Здесь можно выбрать любые 2 разных делителя - взаимно простых они не будут, т.к. есть ~~остаток~~ общий делитель 2.

Всех четных делителей 12, поэтому кол-во способов выбрать пару (a, b) , где a и b четные, равно $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66$ способов.

Всего способов $2+21+66=89$ значит, больше 89 различных вариантов сделать не получится (иначе найдутся 2 одинаковых варианта по принципу Дирихле).

Ответ: 89 вариантов

§ 3.

Все однозначные числа различны, и в них из них 5 нечетных, а 4 четных. Рассмотрим различные числа длиной > 1 .

Рассмотрим различное число a_0 , ~~длины~~ \rightarrow длина которого больше 1.

Для наших чисел ^{(различных (длиной > 1))} назовем началом число, следующее за последним цифрой с конца. Пусть начало числа $a_0 = A$.

Заметим, что число A также ~~будет~~ ^{может быть} началом для других различных чисел (пусть эти числа a_1, a_2, \dots, a_n). Пусть A заканчивается на цифру x .

Потому последние цифры чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ лежат в диапазоне $[x+1; 9]$. Заметим, что в этом диапазоне (как и в числовой ряду в целом) четные и нечетные числа чередуются. Если x - нечетное, то $x+1$ - четное,

и в диапазоне $[x+1; 9]$ четные и нечетные числа будут ^(следует из того, что четные и нечетные числа чередуются) чередоваться.

Если x - четное, то $x+1$ - нечетное, и в диапазоне $[x+1; 9]$ нечетных чисел

больше, чем четных (оба эти \rightarrow следует из того, что четные и нечетные и

числа чередуются. Значит, в числе a_0 из различных чисел, образованных

из указанного начала, четных не больше, чем нечетных. Значит и различные

нечетные числа не меньше, чем различные четные (между которыми

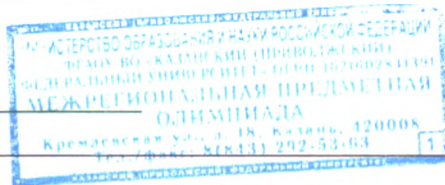
цифры ≥ 2 относятся и к четным, и к нечетным)

Однозначных нечетных чисел $>$, чем однозначных четных. Значит,

всех различных нечетных $>$ различных четных

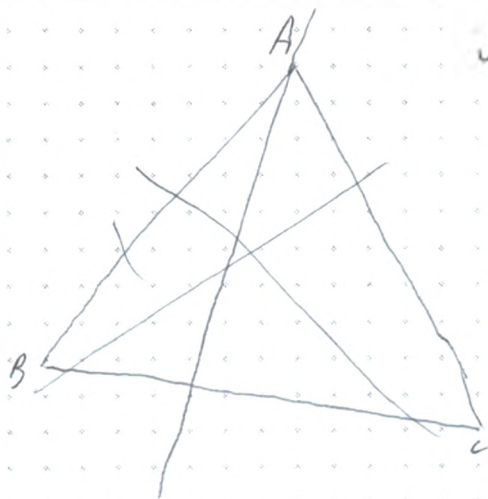
Вывод: различных четных

§ 4

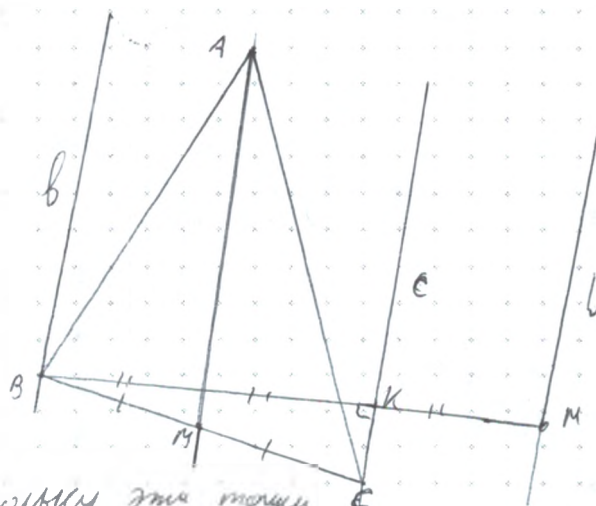


Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 8 класс,
вариант _____



Б.4



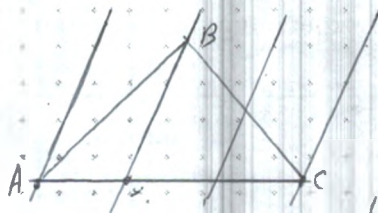
Пусть даны точки A, B и C . Поскольку эти точки не лежат на одной прямой, из них можно составить треугольник ABC . Проведем в треугольнике медиану AM и проведем через $m. B$ и C прямые b и c соответственно, $l \perp MA$. Если мы проведем перпендикуляр BK к пр. c , то пр. AM будет делить его на 2 равных части по теореме Фалеса. Значит, пр. AM равноудалена от пр. b и c . Проведем BK за $m. K$ на продолжении обеих прямых до $m. M$ и проведем пр. l через $M, \perp c$, мы выполнили задание, т.к. пр. b, AM и l удовлетворяют требованиям задания.

~~Значит, две параллельные прямые~~
Все способы разложить ~~и прямые линии~~ ^{параллельные} ~~этих~~, удовлетворяющие требованиям задания, делится на 2 типа: либо 2 из 3 точек лежат на 2 разных продолжениях от двух прямых, либо 1 из 2 точек лежит на одной прямой с одной из точек, и тогда на остальных 3 прямых есть по точке (т.к. точка принадлежит не более чем 1 параллельной прямой).

Рассмотрим эти 2 случая отдельно.

1) 2 точки на крайних прямых.

Назовем наши точки A и C , а прямую B . Пусть прямая, содержащая B ,



а также
| Прямые разбивают AC на 3 равные части |

Пусть a и параллельная l пересекает AC в a и X .

Тогда m делит AC в отношении $1:2$ по теореме Фалеса. Заметим,

что для каждой стороны $\triangle ABC$ найдутся 2 точки, каждая делит ее в отношении $\frac{1}{2}$. Заметим, для каждой точки A, B, C также найдется не более

6. Каждое из них достигается, если мы выберем точку X , делящую сторону в отношении $\frac{1}{2}$, проведем прямую из m X и вершину, противоположную стороне, содержащей m X , затем проведем прямую, параллельную данной через

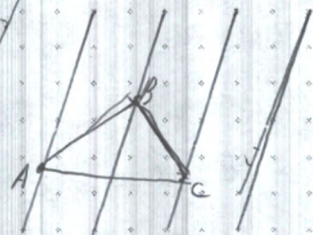
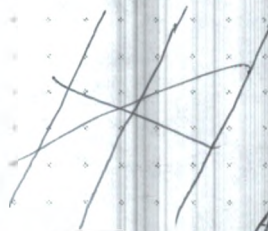
2 другие вершины и m X , а получимся к нам m и стороны, что и m X также делит эту сторону в отношении $\frac{1}{2}$, но не совпадающую с m X . Прямые ~~параллельны~~ равноудалены от B и C следовательно по теореме Фалеса

2) Точки на 3 прямых, идущих подряд.

Пусть m — центральная точка (та точка,

расстояния до ее на прямых, соседних которой

такие соседние точки) $= B$, а остальные точки — A и C .



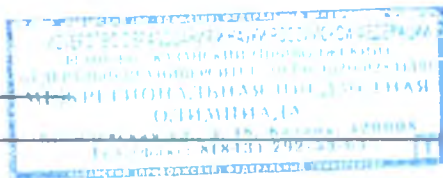
Заметим, что прямая, на которой нет точек, ~~находясь~~ может быть расположена как со стороны m A , так и со стороны m C (относительно m B), а прямая,

делящая AC содержащая B , делит AC на 2 равные части. Между

последними двумя примерами есть разница, с тем отличием, что прямую, на которой нет точек, можно проводить с любой стороны от BC , и это

дает 2 равноправных случая. Всего же в аналогичном случае $= 3 \cdot 2$ (3 способа

выбрать сторону параллельности, из которой провести медиану, 2 способа выбрать, ~~какую~~ ^{какую} сторону считать m и прямую l — 6 случаев.



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « математика », 8 класс,
вариант _____

Значит, всего возможных результатов не более $6+6=12$

Ответ: 12 результатов.

до 1.

Ответ: 125.

Пример: $\frac{10}{80} \cdot 1000 = 125$

Оценка:

Пусть мы сможем найти такие натуральные a, b , что $a \cdot 1000 < 125$
(a и b также положительные. Если одно из чисел a и b отрицательное, то $a \cdot 1000$ отрицательное, а если они оба неотрицательные, то их можно домножить на -1 и $a \cdot 1000$ не изменится, но a и b станут положительными (не страшно, если a и b дробные числа, тогда b тоже отрицательным)).

Тогда $\frac{a}{b} < \frac{1}{8}$. Если $a \geq 13$, то $\frac{a}{b} \geq \frac{13}{89}$ (дробные числа ≤ 1)
 $\frac{a}{b} \geq \frac{13}{89}$ (наименьшее значение дробей с числителем a и наибольшее дробей знаменателем b) $> \frac{13}{104} = \frac{1}{8}$

Значит, a либо 12, либо 11, либо 10. Пусть $a = 1000 \cdot \frac{a}{b} = 2$.

$$\frac{1000}{2} = 500$$

$$1000 \cdot 2 \cdot b, \text{ где } b \in \mathbb{N}, b < 1000. \quad 1000 = 2^3 \cdot 5^3$$

Найдем наименьший делитель 1200, $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$
Наименьший делитель 1200, $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$$\frac{1200}{2} = 600$$

$$a = 12.$$

$$\frac{12000}{8} = x$$

$$12000 = 8x$$

Найдём наименьший b (наибольший делитель 12000, $b < 100$)

$$12000 : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$$

$$\frac{12000}{8} = 1500$$

При меньших b x будет > 125

$$a = 11. \text{ Чл. } \frac{11}{6} \cdot 1000 = 2, \quad 11000 = 6x$$

Найдём наименьший b

$$11000 : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$$

$$\frac{11000}{8} = 1375$$

При меньших b x будет > 125

$$a = 10. \quad \frac{10}{6} \cdot 1000 = 2, \quad 10000 = 6x$$

Найдём наименьший b

$$10000 : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$$

$$\frac{10000}{8} = 1250, \text{ при } b < 10 \quad x > 125. \text{ Проверим } b = 10, \text{ не удовлетворяет}$$

Поэтому наименьшее натуральное число, которое можно разделить на 8, это 125.