

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональная предметная олимпиада



ШИФР

148-69

(заполняется оргкомитетом)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов,
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

(наименование дисциплины)

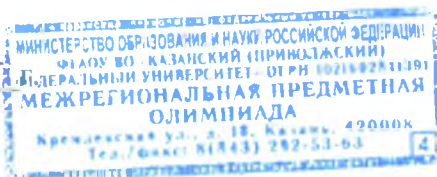
Данные участника

ID номер участника

925646

Дата "22" 01

2025



Шифр

M8-68

(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	0	10											70
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																<i>[Signature]</i>

Математика

(профиль олимпиады)

8

(класс участия)

№5

выпишем делители 2024:

2024: 1; 2; 4; 8; 11; 22; 23; 44; 46; 88; 92; 253; 506; 1012; 2024

не будем брать 1, так как НОД 14 другого числа = 1.

тогда все пар чисел: $\binom{15}{2}$ из них взаимно простые:

$2 \perp 11$; $2 \perp 23$ ($1 \leq n \leq 3$; \perp - взаимно простые)

$11 \cdot 2 \perp 23$ $23 \cdot 2 \perp 11$

$23 \perp 11$

Всего пар взаимно простых чисел - 10 ¹⁶

тогда пар подмножеств чисел - $\binom{15}{2} - 10 = \frac{15 \cdot 14}{2} - 10 = 15 \cdot 7 - 10 = 95$

так как порядок чисел не учитывается, на 2 ответа делителей не нужно

Ответ: 95

№3:

Известно, что число четное, или нечетное его цифра четная, т.е. количество зависит от последней цифры.

Число может состоять из 1 в цифрах: 1 - 1 цифра

Число может состоять из 2 в цифрах: 2, 12 - 2 цифры

или 3 в цифрах: 3, 13, 23, 123 - 3 цифры

или 4 в цифрах: 4, 14, 24, 34, 124, 134, 234, 1234 - 4 цифры

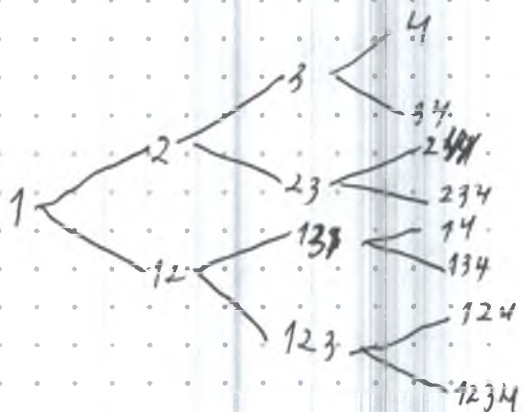
Видно, что кол-во цифр. Обозначим их через 2^{n-1} , но это равно 2^{n-1} . Это связано с тем, что при

переходе от одной цифры к другой (следующей), есть 2 способа:

1. Добавить следующую цифру числа на выбор

2. "Принимать" новую цифру к числу.

Почему образом переход может выразить в виде дерева:



где ветка вверх - замена цифры, а "ветка" - "принимание"

Всего нечетных чисел - $n_{\text{нечет}} = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + 2^{11} + 2^{13} + 2^{15} + 2^{17} + 2^{19} + 2^{21} + 2^{23} + 2^{25} + 2^{27} + 2^{29} + 2^{31}$

Четных - $n_{\text{чет}} = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{18} + 2^{20} + 2^{22} + 2^{24} + 2^{26} + 2^{28} + 2^{30}$

Видно, что: $2(2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + 2^{11} + 2^{13} + 2^{15} + 2^{17} + 2^{19} + 2^{21} + 2^{23} + 2^{25} + 2^{27} + 2^{29} + 2^{31}) + 1 = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{18} + 2^{20} + 2^{22} + 2^{24} + 2^{26} + 2^{28} + 2^{30}$

т.е. $n_{\text{нечет}} = 2^{n-1} + 1$

нечетных чисел больше среди натуральных

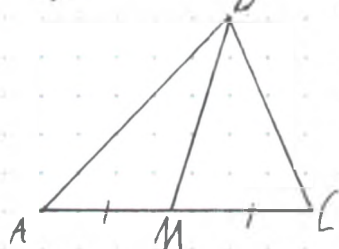
Ответ: нечетных.

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

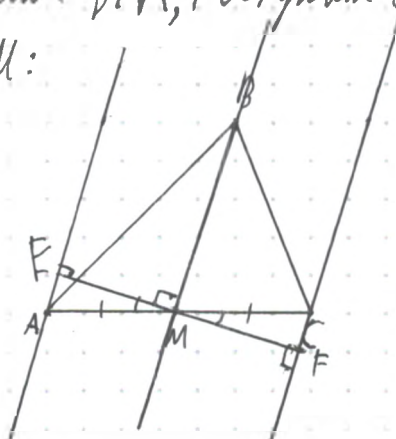
по « математика », 3 класс,

№4
Рассмотрим $\triangle ABC$.

Проведем в нем медиану BM :



Построим на точках A и C прямые, перпендикулярные BM , продолжим BM , построим из точки M перпендикуляр FE к прямым:



Докажем, что $EM = FM$:

$$\angle AME = \angle CMF \text{ (верт.)}$$

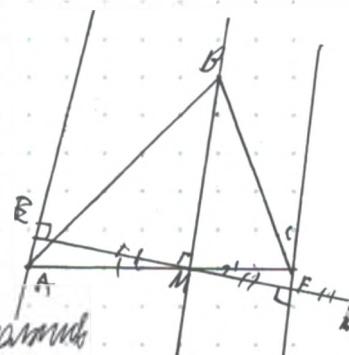
$$AM = CM$$

$$\angle AEM = \angle CFM = 90^\circ$$

$$\triangle AME = \triangle CMF \text{ (по гипотенузе и ост. углу)}$$

$$\Rightarrow EM = FM$$

Утверждение можно доказать, например, продолжив MF (за точку F) и отложив на продолжении отрезок FD , равный MF .



$\sqrt{2}$

M-кал-во минута

$h_2 h_1: m_2 m_1 - \text{заба}$

$$M = 600h_2 + 60h_1 + 10m_2 + m_1$$

$$m = 24h_2 + 24h_1 + 24m_2 + 24m_1$$

Время (часы: минуты) - 19:59:

$$M_{\text{мин}} = 24 \cdot 1 + 24 \cdot 9 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 9 = 24(1+9+5+9) = 24 \cdot 24 = 576 \text{ мин}$$

$$\downarrow$$
$$h_2 = 0$$

$$M = 60h_1 + 10m_2 + m_1$$

$$m = 24h_1 + 24m_2 + 24m_1$$

$$60h_1 + 10m_2 + m_1 = 24h_1 + 24m_2 + 24m_1$$

$$36h_1 = 14m_2 + 23m_1$$

$$m = 24(h_2 + m_2 + m_1)$$

\downarrow

$$m = 24 \Rightarrow 60h_1 + 10m_2 + m_1 = 24$$

$$60h_1 + 10m_2 + m_1 \equiv_{24} 12h_2 + 10m_2 + m_1$$

$$10m_2 + m_1 \equiv_{24} 12(m.k. \ 60 \equiv_{24} 12)$$

Возможные I, ... $m_2 m_1$ II:

0:00

$$h_1 = \frac{0+0}{36}$$

$$h_1 = 0 \in N_0$$

0:00 - не подходит

12

$$h_1 = \frac{1 \cdot 14 + 2 \cdot 23}{36}$$

$$= \frac{50}{36} = \frac{5}{3} \notin N_0$$

$$(N_0 = \{0\} \cup N)$$

24

$$h_1 = \frac{2 \cdot 14 + 4 \cdot 23}{36}$$

$$= \frac{28+92}{36} = \frac{120}{36}$$

$$= \frac{10}{3} \notin N_0$$

36

$$h_1 = \frac{3 \cdot 14 + 6 \cdot 23}{36}$$

$$= \frac{42+138}{36} = \frac{180}{36}$$

$$= 5 \in N_0$$

5:36 - подходит

48

$$h_1 = \frac{4 \cdot 14 + 8 \cdot 23}{36}$$

$$= \frac{56+184}{36} = \frac{240}{36}$$

$$= \frac{20}{3} \notin N_0$$

Ответ: 0:00; 5:36

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математика », 8 класс,

№1

Дано:

$$10 \leq a; b \leq 99$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$1000 \cdot \frac{a}{b} = c$$

$$c \in \mathbb{N}$$

(найти?)

Решение:

$$\text{наименьшее число} - 1000 \cdot \frac{10}{99} = \frac{10000}{99} = 101(01) \notin \mathbb{N}$$

Чтобы $c \in \mathbb{N}$, нужно, чтобы:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{8} \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{8} \quad (1000:8)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a}{b} \text{ наим} = \frac{1}{8}$$

$$8a = b$$

$$a = 10; b = 80$$

$$(наим) = 1000 \cdot \frac{10}{80} = 125$$

Ответ: 125