

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Межрегиональная предметная олимпиада

---



ШИФР	М8 - МД
------	---------

(заполняется оргкомитетом)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**участника Олимпиады**

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов,  
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

---

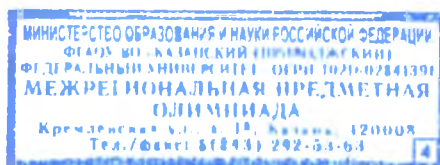
(наименование дисциплины)

**Данные участника**

ID номер участника

997893

Дата "22" 01 2025 г.



Шифр 118-110  
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	5	0											65
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика

(профиль олимпиады)

8

(класс участия)

Задача №1

Разложу 1000 на простые множители:  $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ . Заметим, что если приведем дробь  $\frac{n}{m}$  к несократимому виду (где  $n, m$  — два двузначных числа)  $\frac{x}{y}$  (где  $x, y$  — взаимно просты, т.е.  $\text{НОД}(x, y) = 1$ ), то  $\frac{x}{y} \cdot 1000$  будет натуральным числом только если 1000 будет  $\div y$ . Заметим, что  $\frac{x}{y}$  точно  $> \frac{1}{10}$ , т.к. даже дробь  $\frac{10 \text{ (минимальное двузначное число)}}{99 \text{ (максимальное двузначное число)}} > \frac{1}{10}$  (т.к.  $10 \times 10 = 100$ , что не является двузначным числом).  
Разложим 1000, которые  $< 10$ : 8, 5, 4, 2, 1. Заметим, что можно получить несократимый вид дроби  $\frac{1}{8}$  если разделить 10 на 80 ( $\frac{n}{m} = \frac{10}{80}$ ). Тогда минимальное возможное натуральное число, которое можно получить — это  $\frac{1 \cdot 1000}{8} = 125$  Ответ: 125

## Задача №2

Обозначу время на часах, как  $ab:cd$ . Тогда по условию:  $(a+b+c+d) \cdot 24 = 60(10a+b) + 10c+d$

$$24a + 24b + 24c + 24d = 600a + 60b + 10c + d$$

$$14c + 23d = 576a + 36b$$

Заметим, что  $a=0$ , т.к. даже при  $a=1$  (минимальное возможное число после 0),  $576 \cdot a$  будет больше  $14 \cdot c + 23 \cdot d$  при  $c=9$  и  $d=9$  (максимальные возможные значения),  $576 \cdot 1 > 14 \cdot 9 + 23 \cdot 9$  ( $576 > 126 + 207$ ).

Так  $a=0$ , то уравнение можно записать в след. виде:

$$14c + 23d = 36b$$

Заметим, что  $36 \div 9$ , а  $14$  и  $23$  — нет ( $14 \equiv 5 \pmod 9$ ;  $23 \equiv 5 \pmod 9$ ). Так

так  $9$  — взаимно простое число ( $\text{НОД}(5, 9) = 1$ ), то  $c+d$  должно быть  $\div 9$  (иначе  $14c + 23d$  было  $\div 9$ ).

Заметим, что так  $c \leq 5$  (т.к. иначе в разряде десятков минута), но есть только следующие варианты  $c$  и  $d$ :  $(c=0; d=9)$ ,  $(c=1; d=8)$ ,  $(c=2; d=7)$ ,  $(c=3; d=6)$ ,  $(c=4; d=5)$ ,  $(c=5; d=4)$ . Также

заметим, что  $36 \div 2$  а  $23$  — нечетное число. Так

$14c$  — всегда четное число, но из-за равенства вычитаясь  $23d$  — должно быть  $\div 2 \Rightarrow d \div 2$ , т.е. остаются только варианты:  $(c=1; d=8)$ ,  $(c=3; d=6)$ ,  $(c=5; d=4)$ .

Заметим, что при  $c=1; d=8$ :  $14c + 23d = 198$ , что не  $\div 36 \Rightarrow b$  не целое число, противоречие. Аналогично при  $c=5; d=4$ :  $14c + 23d = 162$ , а  $162$  не  $\div 36 \Rightarrow b$  не целое, противоречие. Тогда  $c=3; d=6$ :  $14c + 23d = 180$ ,  $180 \div 36 = 5 \Rightarrow$  получилось время:  $05:36$ .

также может получиться  $00:00$  (т.к.  $0 = 0 \cdot 24$ ).

Ответ:  $05:36$



## Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математика », 8 класс,

## Задача №3

Заметим, что нечётные числа — числа, оканчивающиеся на 1, 3, 5, 7, 9; а чётные — оканчивающиеся на 2, 4, 6, 8.

Рассмотрим возрастающие числа любой длины, оканчивающиеся на 2. Заметим, что для каждого из таких чисел можно заменить последнюю цифру (двойку) на 3, и условие при этом не нарушится. Также заметим, что для каждого из таких чисел можно приписать в конце 3 (или 2) и условие также не нарушится. Из этого можно сделать вывод, что ~~возрастающих~~ <sup>растущих</sup> чисел, оканчивающихся на 3 больше, чем ~~возрастающих~~ <sup>растущих</sup> чисел, оканчивающихся на 2. Аналогичные рассуждения можно сделать про <sup>растущие</sup> числа, оканчивающиеся на 4 и на 5; на 6 и на 7; на 8 и на 9;

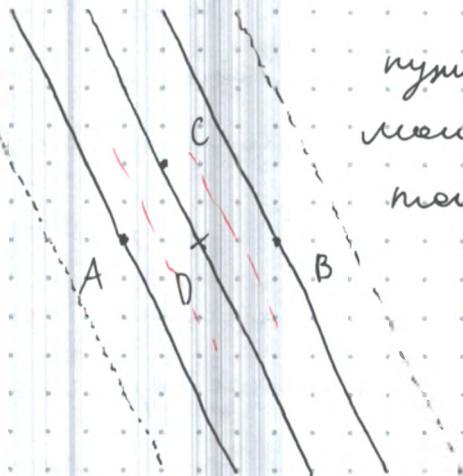
Так <sup>растущие</sup> числа, оканчивающиеся на нечётные цифры больше, чем растущие числа, оканчивающиеся на чётные цифры, то

Ответ: нечётных растущих чисел больше, чем чётных.

# Задача №4.

а) Выполнить данное задание можно следующим образом: отметить ~~какую~~ как точку D - середину отрезка AB. Провести прямую CD. Провести через точки A и B прямые, параллельные CD, и получить 3 параллельных прямых на равных расстояниях друг от друга. Четвертую прямую проведем параллельно CD, на аналогичном расстоянии от прямой с точкой A или B.

Пример:

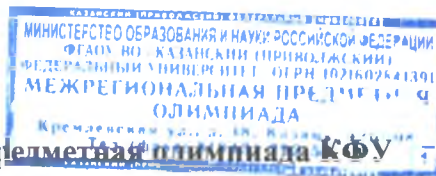


пустимой обозначения все меньшие радиуси четвертой прямой (2 вар.)

б) заметим, что отметить точку D можно тремя способами (середина  $A^1C^1 / A^2B^2 / B^3C^3$ ), и проводить прямые  $BD^1 / CD^2 / AD^3$  первым (по алгоритму) соответственно. Также ранее было указано, что для каждого способа есть 2 варианта провести четвертую прямую  $\Rightarrow$  общее количество вариантов выполнить задание:  $2 \cdot 3 = 6$

Ответ: 6





## Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математика », 8 класс,

## Задача №5

Разложу 2024 на простые множители:  $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ . Так делители не должны быть взаимно простыми ~~(НОД(a, b) > 1)~~, то в составе каждой из делителей есть 2. ~~Значит, что каждая из составляющих 2024 на простые множители будет либо в состав первого числа, либо~~

Рассмотрим случай, где в состав двух этих делителей входят только 2 (среди 3-х ст.). Таких вариантов всего один:  $a = 2 \cdot 2$ ;  $b = 2$ .

Аналогично для случаев где среди трех составляющих чисел в их состав входят только 11 или только 23.

Рассмотрим случай, где в состав двух этих делителей входят только 11 и 2. Таких вариантов 2:  $a = 11 \cdot 2$ ;  $b = 2 \cdot 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 11$ ;  $b = 2$ , аналогично для случаев где в их состав входят 11 и 23, 2 и 23.

Рассмотрим случай, где в их состав входят все 3 составивших числа. Таких вариантов 4:  $a = 2 \cdot 11$ ;  $b = 2 \cdot 2 \cdot 23$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 11$ ;  $b = 2 \cdot 23$ ,  $a = 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2$ ;  $b = 2$ ,  $a = 2 \cdot 11 \cdot 23$ ;  $b = 2 \cdot 2$ .

тогда общее количество вариантов выбрать  
2 десятичные числа 2024 следующие образы:  
 $1+1+1+2+2+2+1 = 3+6+4 = 13$  вариантов

~~ответ~~ Ответ: 13 (-)

Примечание: для рассмотрения все возможные  
варианты, т.к. для каждого рассматриваемого  
случая в "а" для перебора все комбинации  
простых десятичных 2024, входящих в его состав.