

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Межрегиональная предметная олимпиада

---



ШИФР	М8-111
------	--------

(заполняется оргкомитетом)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**участника Олимпиады**

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов,  
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

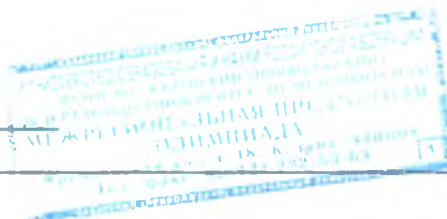
---

(наименование дисциплины)

**Данные участника**

ID номер участника

1189651



1-20

2-20

3-20

4-0

5-20/80

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «Математике», 8 класс,

вариант \_\_\_\_\_

1. у нас гробь вида  $\frac{1000k}{m} = n$ , где  $k$  - двузч. число,  $m$  - двузч. число,  $n$  - натуральное

Тогда min возможная гробь:  $\frac{10000}{99} = 101, \dots$

Получается  $n \geq 102$ .

Чтобы  $n$  были натуральное выполняются условие:

1)  $1000 : m$ , 2) либо 1)  ~~$1000 : m$~~  и  $k : m$   $1000k : m$ , либо 3)  $k : m$ .

Рассмотрим все условия. Начнем с  $\text{IV} (k : m)$ :

$k \geq m \Rightarrow n \geq 1000$

I  $(1000 : m)$ :  $m$  может быть равно: 10, 20, 25, 40, 50  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1000k}{50} - \min \Rightarrow n \geq 20k \Rightarrow n \geq 200$

II  $(1000k : m)$ :  $1000k = m \cdot n \Rightarrow 2^3 \cdot 5^3 \cdot k = m \cdot n$  ( $n \geq 102$ ). Начнем перебор от 102 до 125: Если  $(1000; n) = 1 \Rightarrow m : 2^3 \cdot 5^3 > 99$

Тогда  $n$  не может быть 103, 107, 109, 111, 113, 117, 119, 121, 123.

Посмотрим при  $n = 105$ :  $1000k = 105m \quad | : 5$   
 $200k = 21m \quad (200; 21) = 1$

$m : 200, k : 21$  & ( $m : 200 \Rightarrow m \geq 200$   
а оно увы не по условию)

Посмотрим при  $n = 115$ :  $1000k = 115m \quad | : 5$

$200k = 23m \quad (200; 23) = 1$

$k : 23, m : 200$  ( $m : 200 \Rightarrow m \geq 200$ )

~~Тогда  $n$  не может быть 102, 106, 114, 118, 122~~

Посмотрим при  $n$  - четн.:  $(1000; n) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k : \frac{n}{2}, m : 500$  (тогда  $m \geq 500$  - противоречие) Тогда

нам не подходит 102, 106, 114, 118, 122,



~~Данные смотрим при  $n=101$ :  $1000k = 104m + 4$~~

Смотрим при  $(1000; n) = 25 \Rightarrow 250k = m \cdot \frac{n}{4} \Rightarrow k: \frac{n}{4}, m: 250$   
( $m: 250 \Rightarrow m \geq 250$  - противоречие) Тогда какие подходят 104,  
108, 112, 116, 120, 124

Остается  $n=125$ :  $1000k = 125m \quad | :125$   
 $8k = m$

Возьмем  $k=10 \Rightarrow m=80$ . Проверим

$\frac{10}{80} \cdot 1000 = \frac{1}{8} \cdot 1000 = 125$  Подходит:  $\min = 125$

2. Самая большая возможная  $\Sigma$  на часах, когда

19:59  $\Rightarrow \Sigma = 24 \quad 24^2 = 576$ . Распишем все кратные

24 до 576: 1) 24 2) 48 3) 72 4) 96 5) 120 6) 144 7) 168 8) 192  
9) 216 10) 240 11) 264 12) 288 13) 312 14) 336 15) 360 16) 384 17) 408 18) 432  
19) 456 20) 480 21) 504 22) 528 23) 552 24) 576

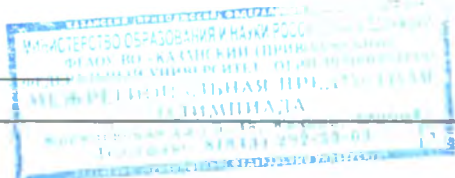
Над каждым напишем  $k$ , такое что  $24 \cdot k =$  данное число  
(например над 24 напишем 1, т.к.  $24 \cdot 1 = 24$ )

Напишем каждому соответствующие в часах и минутах:

1) 0:24 2) 0:48 3) 01:12 4) 01:36 5) 02:00 6) 02:24 7) 02:48  
8) 03:12 9) 03:36 10) 04:00 11) 04:24 12) 04:48 13) 05:12 14) 05:36  
15) 06:00 16) 06:24 17) 06:48 18) 07:12 19) 07:36 20) 08:00  
21) 08:24 22) 08:48 23) 09:12 24) 09:36

Над каждым напишем  $\Sigma$  его цифр, если она соответствует порядковому номеру, то это время нам подходит. Здесь подошло только 05:36. Суть мы забыли, что есть 00:00, которое тоже подходит. ~~Конечно~~ мы можем не смотреть минут  $> 576$ , т.к. мы их никак не получили, поскольку 19:59 - наибольшая сумма. Ответ: 00:00, 05:36





Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике», 8 класс,

вариант \_\_\_\_\_

5. Выпишем все делители 2024:

1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024  
 $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ , Кол-во делителей:  $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ . Значит, это все.

$(n, 1) = 1$ . То определению НОД взаимно простые числа, у которых  $\text{НОД} \neq 1$ . Тогда все задания, где  $a$  или  $b = 1$  не подходит.

В разложении 2024 на множители участвует 3 простых числа, поэтому нам надо для каждой скобки (кроме 0) найти все такие числа, что их  $\text{НОД} = 1$ .

Возьмем  $2^1$ .  $(2, 11)$   $(2, 23)$   $(2, 253)$   $\{$   
 $2^2$   $(4, 11)$   $(4, 23)$   $(4, 253)$   
 $2^3$   $(8, 11)$   $(8, 23)$   $(8, 253)$   
 $11^1$   $(11, 2)$   $(11, 4)$   $(11, 8)$   $(11, 23)$   $(11, 46)$   $(11, 92)$   $(11, 184)$   
 $23^1$   $(23, 2)$   $(23, 4)$   $(23, 8)$   $(23, 11)$   $(23, 22)$   $(23, 44)$   $(23, 88)$

Некоторые скобки повторились ( $(2, 11) = (11, 2)$ ), поэтому их мы считаем за 1. Тогда уникальных скобок:

$$3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16$$

Посчитаем кол-во заданий:  $\frac{16 \cdot 15}{2!} = 120$  (16 - кол-во чисел, которые можно взять за  $a$ , 15 - за  $b$ , делим на  $2!$ , т.к. порядок не важен). Но - это все задания, тогда чтобы посчитать, где  $\text{НОД} \neq 1$  мы должны:  $120 - 15 - 16 = 89$ . (15 - это НОД вида  $(n, 1)$ , и  $n = 15$ , т.к. есть 15 дел. отличных от 1; 16). Ответ: 89 заданий




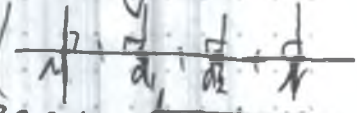
3. Найдём соответствие между чёт. и нечёт.

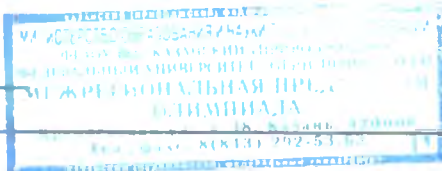
Возьмём число  $n$ , заканчивающееся на чёт. цифру. Тогда соответствие будет:  $n+1$  - это нечёт. число. (например:  $13468 \rightarrow 13469$ ). ~~Это всегда возможно, т.к. чёт. цифра~~

~~и тогда она нечёт.~~ Тогда на 0 число не может оканчиваться, т.к. 0 - самая мал. цифра, и не может быть одной цифрой, т.к. 0 - не натуральное. ~~Тогда по алгоритму~~ Каждому чёт. растущему числу сопоставим число  $n+1$  (это всегда можно, т.к. нет перехода разряда, т.к. так чёт. цифра 8 переходит в 9).

Получается, что все растущие числа, кроме 1, разбились на пары  $\Rightarrow$  нечёт. растущих  $>$  чёт. растущих, т.к. нечётных как минимум на 1 больше.

4. Возьмём 2 точки прямой. У нас появился отрезок. Затем мы проводим 2 перпендикуляра через точки (  ). Эти перпендикуляры параллельны. Затем на отрезке откладываем ещё 2

точки так, что соседние отрезки равны (  ). Пусть  $M$  и  $N$  концы отрезка, мы откладываем ~~такую~~ ~~то~~  $d_1$  и  $d_2$  такие, что  $Md_1 = d_1d_2 = d_2N$  и  $d_1 \in Md_2, d_2 \in d_1N$ . Через эти новые точки проводим ещё 2 перпендикуляра. У нас есть 4 перпендикуляра на равных расстояниях друг от друга (соседних). Дальше мы крутим по часовой стрелке эти ~~перпендикуляры~~ <sup>прямые</sup> (при одновременном вращении расстояние и параллельность сохраняется). Крутим до тех пор, пока одна из 2 центр. прямых



## Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «математике»

», 8 класс,

вариант \_\_\_\_\_

Продолжение 4.

не ~~конкретно~~ пройдет через третью заданную точку.

Наибольшее кол-во результатов среди решений 3, т.к. можно казать с прямой  $AB$ , можно с  $AC$ , можно с  $BC$ .

Пояснение к I: мы всегда можем выбрать такие  $d_1$  и  $d_2$ , потому что  $N \neq M$ , а значит расстояние между ними разбивается на 3 отрезка. А также поворотом прямой не получим 1 прямую, т.к. по условию  $A, B$  и  $C$  - не на одной прямой.