

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Межрегиональная предметная олимпиада

---



ШИФР

М8-88

(заполняется оргкомитетом)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**  
**участника Олимпиады**

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов,  
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

---

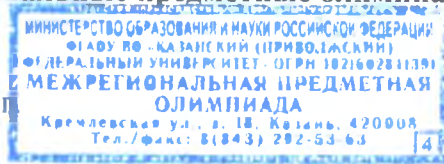
(наименование дисциплины)

**Данные участника**

ID номер участника

1009241

Дата "22" января 2025 г.



Шифр 148-88  
(заполняется оргкомитетом)

### Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	10	20	0	10											60
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика  
(профиль олимпиады)

8  
(класс участия)

№ 1

Если мы возьмем самое маленькое двузначное число и разделим его на самое большое то натуральное число, то получим самую маленькую дробь, которая является целой, что

$$\frac{10}{99} > \frac{10}{100} \text{ (так как } 99 < 100) \Rightarrow \frac{10}{99} > \frac{1}{10}, \text{ значит}$$

наименьшее возможное натуральное число, которое является целым это

$\frac{1}{9}$ , но  $1000 \div 9 \Rightarrow$  такая дробь не может в итоге получиться.

Но если мы будем рассматривать несократимую дробь

$\frac{a}{b}$  (где  $a$  и  $b$  - двузначные числа) так что  $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{9}$  и

$1000a \div b$ , тогда сократим дробь  $\frac{a}{b}$  и получим несократимую дробь  $\frac{a_1}{b_1}$  по раз.  $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{1}{9}$  по

рассуждениям выше, тогда так как она несократимая,

тогда  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{9}$  условие нужно, тогда  $1000 \div b_1 \Rightarrow b_1 = 2^{n_1} \cdot 5^{n_2}$

, где  $n_1 \leq 3$  (так как  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ )  $\Rightarrow b_{\max} = 50$ , но так как



мы сокращали дробь (а минимальное сокращение на 2) то

$= 40$  при  $b_1 \text{ max}$   $a_1 \text{ min} = 5$

$b_1 = 2^{nd} \cdot 5^r$ , но  $n \neq 3$ , так как  $12.5 > 100$ , если  $n = 2$ , то

$n_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 50$  что невозможно по рассуждениям выше

или  $n_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 25 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} \text{ min} = \frac{4}{25}$  или  $\frac{12}{45}$  (так как  $\frac{1}{25}, \frac{2}{25}, \frac{3}{25}$  -

невозможно получить)

Если  $n = 1$ , то  $b_1$  может принимать вид: 10; 20; 40; 5. Вариант 10 неоптимален так как достижение дроби  $\frac{1}{10}$  невозможно, а  $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$  нашего дроби  $\frac{4}{9}$ , тогда можно и показать про 5

Вариант 20 тоже неоптимален так как  $\frac{1}{20}$  минимальное значение дроби  $\frac{3}{20}$  (так как  $\frac{1}{20}$  и  $\frac{2}{20}$  невозможны), то есть  $\frac{12}{80}$

Вариант 40: минимальное значение дроби  $\frac{5}{40}$  (так как  $\frac{1}{40}, \frac{2}{40}, \frac{3}{40}$  и  $\frac{4}{40}$  невозможны) то есть  $\frac{10}{80}$

Если  $n = 0$ , то  $b_1$  может принимать вид: 2; 4; 8, но все эти варианты меньше 10 и по пожеланий логики можно забыть о их неоптимальности (так как  $\frac{a_1}{b_1} \text{ min}$  при  $n = 0$  это  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{8}$ )

В итоге самая маленько - возможная дробь это  $\frac{40}{80}$ , то есть  $\frac{1}{2} \Rightarrow$  самое маленькое значение (натуральное) числа

$\frac{a}{b} \cdot 1000 = \frac{1}{8} \cdot 1000 = 12.5$ , так как  $\frac{4}{25} > \frac{1}{8}$  (то есть  $\frac{32}{200} > \frac{25}{200}$ )

Ответ: 12.5

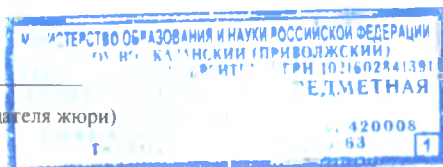
√2

Допустим время на часах  $b_1, b_2: a_1, a_2 \Rightarrow$  чтобы выполнялось условие нужно чтобы выполнялось равенство:

$$60(10b_1 + b_2) + 10a_1 + a_2 = 24(b_1 + b_2 + a_1 + a_2)$$

$$600b_1 + 60b_2 + 10a_1 + a_2 = 24b_1 + 24b_2 + 24a_1 + 24a_2$$

$$576b_1 + 36b_2 = 14a_1 + 23a_2$$



## Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по «Математике», 8 класс,*Тогда нужно рассмотреть  $b_1 = 0$  и  $b_1 = 2$ .*

Предположим, что  $b_1 = 1$ , тогда правая часть будет равна как минимум 576, а левая как максимум  $14 \cdot 5 + 23 \cdot 9 = 70 + 207 = 277$ , но  $576 > 277 \Rightarrow b_1 = 0$ , а выражение принимает вид:

$$36b_2 = 14a_1 + 23a_2$$

Если  $b_2 = 9$ , то  $36 \cdot 9 = 324$ , но  $324 > 277 \Rightarrow b_2 \neq 9$

Если  $b_2 = 8$ , то  $36 \cdot 8 = 288$ , но  $288 > 277 \Rightarrow b_2 \neq 8$

Если  $b_2 = 7$ , то  $36 \cdot 7 = 252$ , то есть

$252 = 14a_1 + 23a_2$ , мы не можем так же обозначить  $14a_1 + 23a_2$  как  $277 - 14K - 23K_1$  (где  $K$  число не превосходящее 5, а  $K_1$  - число не превосходящее 3), тогда

$$252 = 277 - 14K - 23K_1$$

$$14K + 23K_1 = 25, \text{ что невозможно } \Rightarrow b_2 \neq 7$$

Если  $b_2 = 6$ , то  $36 \cdot 6 = 216$ , то есть:

$$216 = 277 - 14K - 23K_1$$

$$61 = 14K + 23K_1, \text{ но } 14K - 1 \Rightarrow 23K_1 \text{ должно быть}$$

нечетно  $K_1 \neq 1$  так как  $38 \nmid 14$  и  $K_1 \neq 3$  так как  $23 \cdot 3 > 61$

значит  $b_2 \neq 6$

Если  $b_2 = 5$ , то  $36 \cdot 5 = 180$ , то есть

$$180 = 277 - 14K - 23K_1$$

$$97 = 14K + 23K_1, \text{ но } 14K - 1 \Rightarrow 23K_1 - \text{неч, } K_1 \neq 1 \text{ так как}$$

$74 \nmid 14$ ,  $K_1 \neq 3$  так как  $18 \nmid 14$  и  $K_1 \neq 5$  так как  $23 \cdot 5 > 97$

значит  $b_2 \neq 5$



Если  $b_2 = 4$ , то  $36 \cdot 4 = 144$ .

$$144 = 14K + 23K_1$$

$133 = 14K + 23K_1$ , но  $14K - \tau \Rightarrow 23K_1 - \tau$ , но  $K_1 \neq 1$ .

так как  $11 \nmid 14$ ,  $K_1 \neq 3$  так как  $64 \nmid 14$ ,  $K_1 \neq 5$  так как

$18 \nmid 14$ ,  $K_1 \neq 7$  так как  $7 \cdot 23 > 133 \Rightarrow b_2 \neq 4$ .

Если  $b_2 = 3$ , то  $36 \cdot 3 = 108$ .

$$108 = 14a_1 + 23a_2, \text{ но } 14a_1 - \tau \Rightarrow 23a_2 - \tau, \text{ но } a_2 \neq 2$$

так как  $62 \nmid 14$ ,  $a_2 \neq 4$  так как  $16 \nmid 14$ ,  $a_2 \neq 6$ .

так как  $23 \cdot 6 > 108$  и  $a_2 \neq 0$ , так как  $108 \nmid 14$ .

Если  $b_2 = 2$ , то  $36 \cdot 2 = 72$ .

$$72 = 14a_1 + 23a_2, \text{ но } 14a_1 - \tau \Rightarrow 23a_2 - \tau, \text{ но } a_2 \neq 0$$

так как  $72 \nmid 14$ ,  ~~$a_2 \neq 2$  так как  $26 \nmid 14$ ,  $a_2 \neq 4$  так как  $23 \cdot 4 > 72 \Rightarrow$~~

$a_2 \neq 2$  так как  $26 \nmid 14$ ,  $a_2 \neq 4$  так как  $23 \cdot 4 > 72 \Rightarrow$

$b_2 \neq 2$ .

Если  $b_2 = 1$ , то  $36 \cdot 1 = 36$ .

$$36 = 14a_1 + 23a_2, \text{ но } 14a_1 - \tau \Rightarrow 23a_2 - \tau, \text{ но } a_2 \neq 0 \text{ так}$$

как  $36 \nmid 14$ ,  $a_2 \neq 2$  так как  $23 \cdot 2 > 36 \Rightarrow b_2 \neq 1$ .

Если  $b_2 = 0$ , то  $36 \cdot 0 = 0$ .

$$0 = 14a_1 + 23a_2 \Rightarrow a_2 = 0 \text{ и } a_1 = 0$$

Значит такой комбинации и это 00:00.

Ответ: 00:00.

№3.

Все растущие числа образуются путем удвоения из числа:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

И цифр так, чтобы сохранился порядок оставшихся

И если мы закрепили 9 на своем месте, то количество растущих

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 8 класс,  
вариант       

Чисел оканчивающихся на 9 будет ровно:

$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8$  (так как мы рассматриваем все варианты взятия), что равно  $2^8$  по ~~формуле~~ треугольнику Паскаля

Из аналогичных рассуждений при закреплении 8 цифра вариантов будет равняться  $2^7$ , при закреплении 7 -  $2^6$ , при 6 -  $2^5$ , при 5 -  $2^4$ , при 4 -  $2^3$ , при 3 -  $2^2$ , при 2 -  $2^1$ , при 1 -  $2^0$ , составим таблицу количества чисел заканчивающихся на определенную цифру:

$1 \rightarrow 2^0$

$\left. \begin{array}{l} 2 \rightarrow 2^1 \\ 3 \rightarrow 2^2 \end{array} \right\} 2^2 > 2^1$

$\left. \begin{array}{l} 4 \rightarrow 2^3 \\ 5 \rightarrow 2^4 \end{array} \right\} 2^4 > 2^3$

$\left. \begin{array}{l} 6 \rightarrow 2^5 \\ 7 \rightarrow 2^6 \end{array} \right\} 2^6 > 2^5$

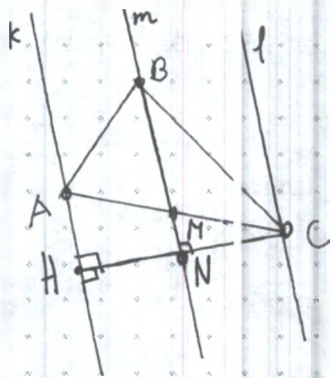
$\left. \begin{array}{l} 8 \rightarrow 2^7 \\ 9 \rightarrow 2^8 \end{array} \right\} 2^8 > 2^7$

$\Rightarrow$  что нечетных растущих чисел больше

~~Ответ:~~ Ответ: нечетных растущих чисел больше

14





Так как точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой, то они могут составить  $\Delta$

1) Проведем медиану  $BM$  так чтобы  $AM = MC$  и продлим её в обе стороны, получив прямую  $m$ , содержащую отрезок  $BM$  2) Проведем из вершин  $A$  и  $C$  прямые, параллельные  $m$ :  $k$  и  $l$  соответственно.

3) Проведем из точки  $C$  перпендикуляр  $CH$  к прямой  $k$ , так как  $k \parallel m$  (по 2 пункту)  $\Rightarrow CH \perp m$

4) Допустим прямая  $m$  пересекает  $CH$  в точке  $N$

5)  $MN$  - средняя линия, так как  $AM = MC$  (по 1 пункту) и  $MN \parallel AH$  (как отрезки параллельных прямых  $k \parallel m$  по 2 пункту)

6)  $HN = NC$  (по 5 пункту)

7) Расстояния между прямыми  $k, m$  и  $l$  равны (по 6 и 3 пункту)

То же верно и в обратном случае если расстояния равны, то прямая  $m$  проходит через центр противоположной стороны. Так как прямая  $m$  уже определена однозначно (по двум точкам) то и параллельные этой прямой  $k$  и  $l$  определятся однозначно (по точке и параллельности), а последняя прямая имеет два варианта наклонения (по параллельности и равным расстояниям). Значит всего у нас  $3 \cdot 2$  вариантов (где 3 - количество вариантов расположения прямой  $m$ , а 2 - количество вариантов расположения последней прямой)

Если  $AB = BC$  то  $BM \perp AC$  (как медиана проведенная к основанию в равнобедренном  $\Delta$ )  $\Rightarrow l \perp AC$  и  $k \perp AC$  (по 2 пункту)  $\Rightarrow HC$  совпадет с  $AC$  и расстояния



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 8 класс,

вариант \_\_\_\_\_

между числами 1, k и m равны.

Ответ:  $3 \cdot 2 = 6$  вариантов результата (различных)  
N5

$2024 = 11 \cdot 23 \cdot 2^3$ , так как 11, 23 и 2 взаимно простые числа, чтобы они не были взаимно простыми надо перемножить некоторые простые множители между собой:

Умножение с 2:

$11 \cdot 2^n$   
 $23 \cdot 2^{n_1}$   
 $2^{n_2}$   
 $11 \cdot 23 \cdot 2^{n_3}$

(где  $n, n_1, n_2$  и  $n_3$  не превосходит 3)  $\Rightarrow$  всего вариантов делителей - 12 и все они между собой не являются взаимно простыми)

Значит учитываться надо выбрать из 12 вариантов 2 числа, где порядок не важен  $\Rightarrow$  всего вариантов выбора двух чисел равно  $C_{12}^2$

Умножение с 11:

$11 \cdot 2^k$   
 $11 \cdot 23$   
 $11$   
 $11 \cdot 23 \cdot 2^{k_1}$

(где  $k, k_1$  не превосходит 3)  $\Rightarrow$  всего вариантов делителей - 8 и все они между собой не являются взаимно простыми)

Значит учитываться надо выбрать из 8 вариантов 2 числа,



где порядок не важен  $\Rightarrow$  всего вариантов  $C_8^2$

Умножим, с 23:

$$23 \cdot 2^l$$

$$23 \cdot 11$$

$$23$$

$$23 \cdot 11 \cdot 2^{l_1}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{где } l \text{ и } l_1 \text{ не превосходят } 3, \Rightarrow \text{ всего вариантов} \\ 8 \text{ и все они между собой не являются взаимно} \\ \text{простыми.} \end{array} \right.$

Значит действительно надо выбрать 2 числа из 8, где порядок не важен  $\Rightarrow$  всего вариантов  $C_8^2$

Так как учительница может выбирать числа только из одной группы  $\Rightarrow$  общее количество вариантов выбора:

$$C_{12}^2 + 2C_8^2 - 12 \quad (\text{так как варианты выбора } 11 \cdot 2^n; 11 \cdot 23 \cdot 2^{n_3} \text{ и } 11 \cdot 2^k; 11 \cdot 23 \cdot 2^{k_1} \text{ совпадают}$$

также как  $23 \cdot 2^n; 11 \cdot 23 \cdot 2^{n_3}$  и  $23 \cdot 2^l; 23 \cdot 11 \cdot 2^{l_1}$ , значит нужно вычесть количество совпадающих вариантов, то есть  $2^3$ , но еще совпадают  $23 \cdot 11; 23 \cdot 11 \cdot 2^{l_1}$  с  $11 \cdot 23; 11 \cdot 23 \cdot 2^{k_1}$  и то есть нужно дополнительно вычесть 3 варианта)

$$\text{Итого получается } C_{12}^2 + 2C_8^2 - 15 = \frac{12!}{(12-2)! \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 8!}{(8-2)! \cdot 2!} -$$

$$15 = \frac{11 \cdot 12}{2} + \frac{7 \cdot 8}{1} - 15 = 66 + 56 - 15 = 107$$

~~Ответ: 93~~

$$= 66 + 56 - 15 = 107$$

Ответ: 107 вариантов