

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Межрегиональная предметная олимпиада



ШИФР	148-81
------	--------

(заполняется оргкомитетом)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
участника Олимпиады

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике для 8 классов,
заключительный этап, 2024-2025 учебный год

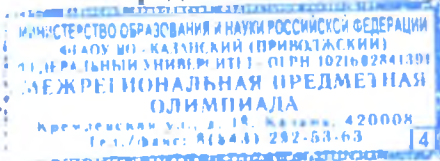
(наименование дисциплины)

Данные участника

ID номер участника

1184109

Дата "22" января 2025 г.



Шифр М8-81
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	20	20	20	0	20											80
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика

(профиль олимпиады)

8

(класс участия)

Задача 1. Заметим, что после деления одного двузначного числа на другое, а затем умножения результата на 1000, чтобы получилось число было натуральным, результатом должна быть десятичная дробь с не более чем 3 знаками после запятой (если будет хотя бы 4 знака, то после умножения на 1000 останется 1 знак после запятой). Иначе говоря, первое двузначное, умноженное на 1000, будет : второму.

Пусть первое число — это a , а второе b . Тогда придется, чтобы результат деления $\frac{1000a}{b}$ был наименьшим натуральным. Разложим 1000 на простые множители $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Получаем, что $2^3 \cdot 5^3 \cdot a : b$. Результат будет меньше, если a много меньше b .

Наим. $\frac{1000a}{b}$ при $a=10$ (наим. двузнач. число) и $b=99$ (наиб. двузнач. число). $\frac{1000 \cdot 10}{99} = 101, (01)$, но это не натуральное. После другое получившееся число будет > 101 . Определим наименьшее.

Нетрудно догадаться, что при $a=12$ и $b=96$ выражение $\frac{1000a}{b}$ достигает наименьшего значения. $\frac{1000 \cdot 12}{96} = 125$. Также тем, что нет результата меньше быть не может. Если такой найдется, то $a \leq 12$, т.е. 10 или 11 или 12, а $b \geq 96$, т.е. 96, 97, 98 или 99. Разложим каждое из чисел на простые:

10 = 5 · 2 99 = 3² · 11
11 = 11 98 = 7² · 2
12 = 2² · 3 97 = 97
96 = 2⁵ · 3

Дробь $\frac{2^3 \cdot 5^3 \cdot a}{b}$ должна сократиться. Видно, что при $a=11$ подходит только $b=11 \cdot 3^3$, но $2^3 \cdot 5^3 \cdot 11$. При $a=10$ не подходит ничего (т.к. ...).

$2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1$, $2^3 \cdot 11^1$, $2^5 \cdot 3^1$, $2^3 \cdot 11^1$. Остаётся только $a=12$, которому в паре подходит только $b=96$ (н.к. $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^1 \cdot 11^1 \cdot 7^1$, $2^3 \cdot 11^1$, $2^5 \cdot 3^1$). Значит, $a=12$, $b=96$ — максимальный результат (степень каждого простого множителя в числителе превышает или равна степени того же простого числа в знаменателе, тогда результат натуральный).

Ответ: 125.

Задача 3. Рассмотрим цифры, на которые могут оканчиваться чётные и нечётные числа. Чётные: 0, 2, 4, 6, 8; Нечётные: 1, 3, 5, 7, 9. Заметим, что никакое растущее число не может оканчиваться на 0, т.к. 0 меньше всех остальных цифр. Также никакое число не может начинаться с 0 (да значит его нет ни в одной растущей числе).

~~Растущие числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6, 8: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96.~~
~~Растущие числа, оканчивающиеся на 1, 3, 5, 7, 9: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 39, 43, 45, 47, 49, 53, 55, 57, 59, 63, 65, 67, 69, 73, 75, 77, 79, 83, 85, 87, 89, 93, 95, 97, 99.~~

Заметим, что для любого растущего числа, оканчивающегося на 2, можно записать больше растущих нечётных чисел (всё же самое, что оканчиваются на 2, но дописав к ним на конце 3, 5, 7, 9 различными способами, например 3, 7, 5, 9, 37, 39, 57, 59, 35 и др.). Аналогично для каждого растущего числа, оканчивающегося на 4 можно записать больше нечётных растущих чисел, дописав на конце 5, 7, 9, 57, 59, 79. Также и для 6 можно записать 7, 9, 79; а для восьми можно дописать только 9, ^{получив} столько же чисел, сколько оканчивалось на 8. ^{дописавшие числа не могут оканчиваться на 0, т.к. они больше цифр, на которых каждое число оканчивается.} Таким образом для каждого чётного растущего числа, оканчивающегося на 2, 4, 6, мы смогли найти больше нечётных растущих чисел, а для 8 мы смогли написать равно столько же и нечётных. Значит всего растущих нечётных чисел больше.

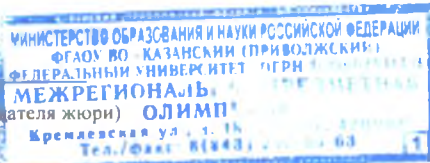
Ответ: нечётных больше.

Задача 15.

Найдём сколько всего различных делителей у числа 2024.

Разложим его на простые множители: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

Заметим, что 2024 — не квадрат \Rightarrow все его делители разбиваются на пары (произведение в каждой паре равно 2024), т.е. чет. м.ст.



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « Математике », 8 класс,

Задача №5 (продолжение).

Пользуясь этим, выпишем все делители числа 2024. Каждый делитель представлен произведением каких-то простых множителей числа 2024, а парный ему — произведением остальных. Выпишем в порядке возрастания:

- 1 и 2024 ($2^3 \cdot 11 \cdot 23$)
- 2 и 1012 ($2^2 \cdot 11 \cdot 23$)
- 4 и 506 ($11 \cdot 2 \cdot 23$)
- 8 и 253 ($11 \cdot 23$)
- 11 и 184 ($2^3 \cdot 23$)
- 22 и 92 ($2^2 \cdot 23$)
- 23 и 88 ($2^3 \cdot 11$)
- 44 и 46 ($2 \cdot 23$)

Далее все делители повторяются (второй столбик в обратном порядке).

Значит всего различных делителей у числа 2024 ровно 16. По условию в каждом задании «Найти НОД (a, b)» числа a и b не взаимнопросты. Тогда a и b имеют общий делитель. Сначала общее число пар, а затем вычтем пары, в которых делителем a и b — взаимнопростые. Всего пар $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ (делим на два, чтобы не учитывать упр. порядка чисел). Выпишем для каждого числа все такие числа, которые взаимнопросты с ним.

1) 2: 11, 23, 253. (3 пары)

~~2) 4: 11, 23, 253, 506, 1012, 2024. (6 пар)~~ 2) 4: 11, 23, 253 (3 пары)

3) 8: 11, 23, 253 (3 пары)

4) 11: 2, 4, 8, (3 пары, но они уже посчитаны для каждого из 2, 4, 8)
23, 184, 92, 46 (4 пары)

5) 22: 23 (1 пара)

14) 88: 23 (уже посчитано для 23)

15) 46: 11 (уже посчитано для 11)

6) 23: 2, 4, 8, 11, 22 (5 пар, но уже посчитаны)
44, 88 (2 пары)

7) 44: 23 (уже посчитано для 23)

8) 2024: —

11) 253: 2, 4, 8 (3 пары, уже посчитаны)

9) 1012: —

12) 184: 11 (уже посчитано для 11)

10) 506: —

13) 92: 11 (1 пара уже посчитана для 11) см. обр. стр.

Всего получили 16 пар взаимности:

$(2; 11), (2; 23), (2; 253), (4; 11), (4; 23), (4; 253), (8; 11), (8; 23), (8; 253),$
 $(11; 23), (11; 184), (11; 92), (11; 46), (23; 23), (23; 44), (23; 88),$

Получа различные пар, удовлетворяющих условию $105 - 16 = 89$.

89 пар, где числа a и b — различные из $\{2; 4; 8; 11; 23; 23; 44; 46; 88; 92; 184; 253; 506; 1012; 2024\}$ и пары не из указанного выше списка пар взаимности.

Ответ: 89.

Задача 2.

Часы показывают час $\boxed{a} \boxed{b} : \boxed{c} \boxed{d}$, т.е. ab часов

То минут. Т.к. часы могут показывать не любые значения, то

$a \in \{0; 1; 2\}, d, b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Число минут, прошедших с полудня, это $ab \cdot 60 + cd = (10a + b) \cdot 60 + (10c + d) = 600a + 60b + 10c + d$.

Из условия $(a + b + c + d) \cdot 24 = 600a + 60b + 10c + d$.

$$600a + 60b + 10c + d = 24a + 24b + 24c + 24d$$

$$576a + 36b - 14c - 23d = 0$$

Заметим, что максимальное значение $14c$ — это $14 \cdot 5 = 70$, а

$23d$ — это $23 \cdot 9 = 207$, т.е. минимальное $-14c - 23d$ состав-
 лям -277 .

$576 > 277 \Rightarrow a = 0$, т.к. при $d > 0$ лев. не получится.

$$\text{Остаётся } 36b - 14c - 23d = 0$$

Заметим, что $36 \cdot 8 = 288 > 277 \Rightarrow b \leq 7$.

Проверим для каждого b значения c и d .

$$1) b = 0$$

$$-14c - 23d = 0 \Rightarrow c = d = 0 \text{ время } 00:00$$

$$2) b = 1$$

$$36 - 14c - 23d = 0$$

Здесь $c < 3, d < 2$, т.к. $23 \cdot 2 = 46 > 36, 14 \cdot 3 = 42 > 36$.

Проверим $c \in \{0; 1\}, d \in \{0; 1\}$.

$$c = 0$$

$$36 - 23d = 0$$

$$\text{т.е. } 36 = 23d \Rightarrow d = \frac{36}{23} \text{ — не целое}$$

$$c = 1$$

$$36 - 14 - 23d = 0$$

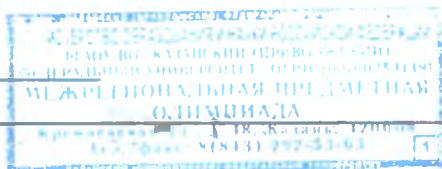
$$22 - 23d = 0 \Rightarrow 22 = 23d \Rightarrow d = \frac{22}{23} \text{ — не целое}$$

$$c = 2$$

$$36 - 28 - 23d = 0$$

$$8 - 23d = 0 \Rightarrow 8 = 23d \Rightarrow d = \frac{8}{23} \text{ — не целое}$$

См. след. пункт



Межрегиональная предметная олимпиада КФУ

по « МАТЕМАТИКЕ », 8 класс,

вариант _____

3) $b=2$

$$72 - 14c - 23d = 0$$

$$23d + 14c = 72 \Rightarrow d < 4 \text{ (при } d=4 \text{ } 23d=92) \text{ и } c < 6 \text{ (при } c=6 \text{ } 14c=84)$$

$$d=0$$

$$72 = 14c$$

$$72 \nmid 14 \Rightarrow c = \frac{72}{14} \text{ - не целое}$$

$$d=1$$

$$14c = 72 - 23$$

$$14c = 49$$

$$c = \frac{49}{14} \text{ - не целое}$$

$$d=2$$

$$14c = 72 - 46$$

$$c = \frac{26}{14} \text{ - не целое}$$

$$d=3$$

$$14c = 72 - 69$$

$$14c = 3$$

$$c = \frac{3}{14} \text{ - не целое}$$

112 (нужно)

4) $b=3$

$$108 - 14c - 23d = 0$$

$$14c + 23d = 108 \quad c \leq 5 \text{ по ум.}$$

$$23d = 108 - 14c$$

$$d = \frac{108 - 14c}{23}$$

$$c=0$$

$$d = \frac{108}{23} \text{ - не целое}$$

$$c=1$$

$$d = \frac{94}{23} \text{ - не целое}$$

$$c=2$$

$$d = \frac{80}{23} \text{ - не целое}$$

$$c=3$$

$$d = \frac{66}{23} \text{ - не целое}$$

$$c=4$$

$$d = \frac{52}{23} \text{ - не целое}$$

$$c=5$$

$$d = \frac{38}{23} \text{ - не целое}$$

Далее

$$36b - 14c - 23d = 0$$

$$14c + 23d = 36b$$

$$d = \frac{36b - 14c}{23} = \frac{2 \cdot (18b - 7c)}{23}$$

$$2 \nmid 23 \Rightarrow 18b - 7c \vdots 23$$

Будем проверять! 23

5) $b=4$

$$d = \frac{2 \cdot (72 - 7c)}{23}$$

$$72 - 7c \vdots 23 \Rightarrow 72 \equiv 7c \pmod{23}$$

$$72 \equiv 3 \pmod{23}$$

$$7c \equiv 3 \pmod{23}$$

Решим $c < 3$

$$c=4 \Rightarrow 28 \equiv 5 \pmod{23}$$

$$7c < 21 \Rightarrow \frac{7c}{23} \equiv 3$$

$$c=5 \Rightarrow 35 \equiv 12 \pmod{23}$$

$\Rightarrow d$ не целое.

или, наоборот.

Далее провозим проверку, т.е. $d = \frac{2 \cdot (18 \cdot 7 - 7C)}{23} \Rightarrow 18 \cdot 7 \equiv 7C$

6) $8=5$

$90 \equiv 7C$

$21 \equiv 7C$

$C=3$ - не подходит

т.е. $C=3$

$d = \frac{2 \cdot (90 - 21)}{23} =$

$= \frac{2 \cdot 69}{23} = 6$

05:36

Проверка:
 $5+3+6=14$

$14 \cdot 24 = 336$

$336 = 36 + 5 \cdot 60$ - верно

Получили 00:00 и 05:36.

Ответ: 00:00 ; 05:36.

~~Задача 4.~~

~~• B~~

~~• A~~

~~• C~~

7) $8=6$

$108 \equiv 7C$

$7C \equiv 16$

т.е. $C < 2$

$7C < 14 \Rightarrow 7C \neq 16$

$C=3$

$21 \equiv 21$

$C=4$

$28 \equiv 5$

$C=5$

$35 \equiv 12$

8) $8=7$

$d = \frac{2 \cdot (18 \cdot 7 - 7C)}{23} =$

$= \frac{14 \cdot (18 - C)}{23}$

$14 \cdot 23 \Rightarrow 18 - C \cdot 23$

$18 \equiv C$

$C=18$ - не подходит

d не подходит