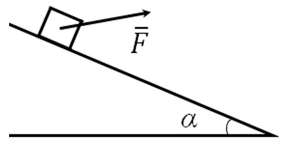
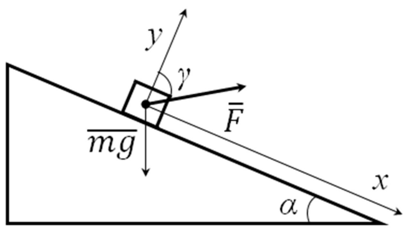
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап (решения/ответы)
2022/23 учебный год
11 класс

Задача 1. (19 б.) Брусок массы m лежит на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Какую минимальную силу F нужно приложить, чтобы тело сдвинулось с места, если можно приложить ее под оптимальным углом в плоскости рисунка. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ. Внешняя сила приложена таким образом, что брусок движется поступательно.



Возможное решение:



Спроецируем силы на оси x и y и запишем второй закон Ньютона. Для нахождения минимальной силы ускорение прировняем к нулю.

$$\begin{cases} N + F\cos\gamma = mg\cos\alpha \\ 0 = mg\sin\alpha + F\sin\gamma - \mu N \end{cases}$$

$$\mu(mg\cos\alpha - F\cos\gamma) = mg\sin\alpha + F\sin\gamma$$

$$F = \frac{mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\gamma + \mu\cos\gamma}$$

Числитель данного выражения постоянен, для достижения минимума достаточно выяснить максимальное значение знаменателя

$$\sin\gamma + \mu\cos\gamma = \sqrt{1+\mu^2}\left(\frac{\mu\cos\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) = \sqrt{1+\mu^2}\cos(\gamma - \varphi)$$

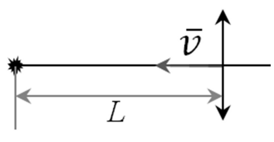
Таким образом, знаменатель принимает максимальное значение $\sqrt{1+\mu^2}$. Минимальная сила, необходимая для того чтобы сдвинуть брусок с места, равна

$$F_{min} = \frac{mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

Критерии оценивания:

Верно записан второй закон Ньютона по всем осям. По 3 балла за ось.	6
Из уравнений получено выражение для силы.	5
Найден минимум силы (в т.ч. с помощью производной).	4
Получено верное выражение для минимальной силы.	4

Задача 2. (18 б.) Тонкая собирающая линза движется вдоль своей оптической оси в направлении статичного источника со скоростью v. Источник расположен на оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы F. Какую мгновенную скорость будет иметь изображение источника в лабораторной системе отсчета, если в интересующий нас момент расстояние от источника до линзы $L > F$.
Указание: $(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x$ при $x \ll 1$.



Возможное решение:
Перейдем в систему отсчета, связанную с линзой. Обозначим за d расстояние между источником и линзой, за f – расстояние между линзой и изображением

По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{Fd}{d - F}$$

Скорость изображения этой системе отсчета равна $u = -\frac{df}{dt}$

Приведем два варианта нахождения скорости изображения в движущейся системе отсчета.

1) Возьмем искомую производную напрямую и положим t = 0

$$f = \frac{F(L - vt)}{L - vt - F}$$

$$-\frac{df}{dt} = -\left(\frac{-vF}{L - F} + \frac{FLv}{(L - F)^2}\right) = -\frac{F^2}{(L - F)^2} v;$$

2) Рассмотрим формулу тонкой линзы в первом порядке по малому интервалу времени *dt*

$$f_0 = \frac{FL}{L - F}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{L - vdt} + \frac{1}{f_0 - udt} \approx \frac{L + f_0 - (u + v)dt}{Lf_0 - (Lu + vf_0)dt} = \frac{L + f_0 - (u + v)dt}{Lf_0\left(1 - \frac{(Lu + vf_0)}{Lf_0} dt\right)} \approx$$

$$\approx \frac{(L + f_0 - (u + v)dt)\left(1 + \frac{(Lu + vf_0)}{Lf_0} dt\right)}{Lf_0} \approx$$

$$\approx \frac{\left(\frac{(L + f_0)(Lu + vf_0)}{Lf_0} - (u + v)\right) dt}{Lf_0} + \frac{L + f_0}{Lf_0};$$

$$\frac{(L + f_0)(Lu + vf_0)}{Lf_0} - (u + v) = 0$$

$$L^2 u + v f_0^2 = 0$$

$$u = -\frac{v f_0^2}{L^2} = -\frac{F^2}{(L - F)^2} v$$

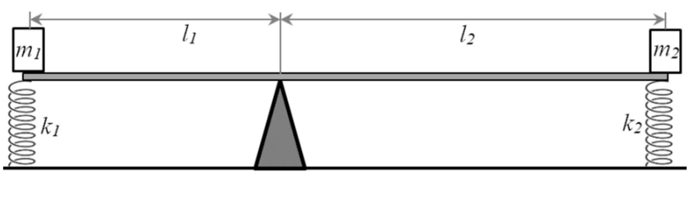
В лабораторной системе отсчета искомая скорость буде равна

$$u' = \left(1 - \frac{F^2}{(L - F)^2}\right) v$$

Критерии оценивания:

Уравнение тонкой линзы.	3
Идея перехода в систему отсчета, связанную с линзой. В случае альтернативного решения засчитывается.	2
Получена верная скорость изображения любым способом. (в лабораторной или подвижной системе отсчета) Допускается использование формулы для продольного увеличения.	9
Получен верный ответ.	4

Задача 3. (20 б.) На концах невесомого рычага расположены точечные массы m_1 и m_2 и прикреплены невесомые пружины жесткостью k_1 и k_2. Расстояния от концов рычага до точки опоры равны l_1 и l_2 соответственно.



Длины пружин в недеформированном состоянии подобраны таким образом, чтобы рычаг находился в равновесии в горизонтальном положении. Найти частоту малых колебаний рычага после небольшого отклонения его от горизонтали. Рычаг в процессе колебаний не отрывается от точки опоры. Длины пружин много больше амплитуды колебаний.

Возможное решение

Рассмотрим сначала условие равновесия рычага. Запишем баланс моментов относительно точки опоры.

$$l_2 m_2 g + k_2 l_2 \Delta x_2 - l_1 m_1 g - k_1 l_1 \Delta x_1 = 0$$

Запишем выражение для полной механической энергии системы. Положение рычага и скорость всех его точек однозначно определяются наклоном рычага к горизонтали φ и соответствующей угловой скоростью $\dot{\varphi}$.

$$E \approx \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2}{2} - m_1 g l_1 \sin\varphi + m_2 g l_2 \sin\varphi + \frac{k_1(\Delta x_1 - l_1 \sin\varphi)^2}{2} + \frac{k_2(\Delta x_2 + l_2 \sin\varphi)^2}{2}$$

В этом равенстве мы учли, что длина пружин много больше амплитуды колебаний. Для малого угла sin φ ≈ φ, выраженного в радианах.

$$E \approx \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2}{2} - m_1 g l_1 \varphi + m_2 g l_2 \varphi + \frac{k_1(\Delta x_1 - l_1 \varphi)^2}{2} + \frac{k_2(\Delta x_2 + l_2 \varphi)^2}{2} =$$

$$= \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\varphi}^2}{2} + (-m_1 g l_1 + m_2 g l_2 - k_1 \Delta x_1 l_1 + k_2 \Delta x_2 l_2)\varphi + \frac{k_1 {\Delta x_1}^2 + k_2 {\Delta x_2}^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2}(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)$$

Второе слагаемое равно нулю в силу условия равновесия.

Сравним это выражение с энергией одномерного гармонического осциллятора:

$$E_h = \frac{m^* \dot{q}^2}{2} + \omega^2 \frac{m^* q^2}{2} + const$$

где q и $\dot{q}$ – обобщенная координата и обобщенная скорость, в данной задаче угол и угловая скорость.

$$E = \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\varphi^2}{2} + const$$

Циклическая частота и период малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}}$$

Критерии оценивания:

Верно записано условие равновесия рычага.	4
Верно записана полная механическая энергия или возвращающая сила для системы, выведенной из положения равновесия.	6
Проведено разложение по малому параметру.	4
Энергия или уравнение колебаний приведена к каноническому виду.	4
Найден период колебаний.	2

Задача 4. (21 б.) Проводящая перемычка скользит по V образному проводящему контуру из однородной проволоки. Перемычка движется таким образом, что V образный контур вместе с ней образуют равнобедренный треугольник, стороны которого увеличиваются со временем. В начальный момент времени площадь треугольника равна 0. Проводник и перемычка имеют одинаковое сопротивление на единицу длины. Система находится в постоянном и однородном магнитном поле, перпендикулярном проводящему контуру и перемычке. Сопротивлением контакта перемычки и проводника пренебречь. Индуктивностью контура пренебречь.

а) (15 б.) При какой зависимости скорости перемычки от времени ток в контуре будет оставаться постоянным? (Рекомендуется начать с этого вопроса)

б) (+6 б.) При какой зависимости скорости перемычки от времени тепловая мощность, выделяемая контуром, будет постоянной?

В обоих случаях достаточно представить хотя бы один вид зависимости скорости от времени.

Возможное решение:

Площадь треугольника S с фиксированными углами пропорциональна квадрату любой его стороны (формула Герона) или высоты. Периметр, очевидно, будет пропорционален любой из сторон или высоте. Если начало координат поместить в вершину V образного контура, координата центра перемычки будет совпадать с высотой треугольника.

$$S = ah^2, P = bh; \quad a, b = const$$

Согласно закону Фарадея, ЭДС индукции в контуре

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = -2aBh\frac{dh}{dt} = -2aBhv,$$

где v – скорость перемычки.

Сопротивление контура пропорционально периметру $R = \gamma h$. Модуль тока по закону Ома

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{2aBhv}{\gamma h} = const \cdot v$$

Ответим на вопрос задачи а)

Постоянной скорости будет соответствовать постоянный ток

$$v(t) = const$$

Ответим на вопрос задачи б)

По закону Джоуля-Ленца, тепловая мощность

$$P = \xi I = const \cdot hv^2$$

Удобно искать зависимость $h(t)$ в виде степенной функции

$$h = kt^{\beta}, k = const$$

$$v = k\beta t^{\beta-1}$$

Тогда условие постоянной мощности имеет вид

$$const = t^{\beta+2\beta-2}$$

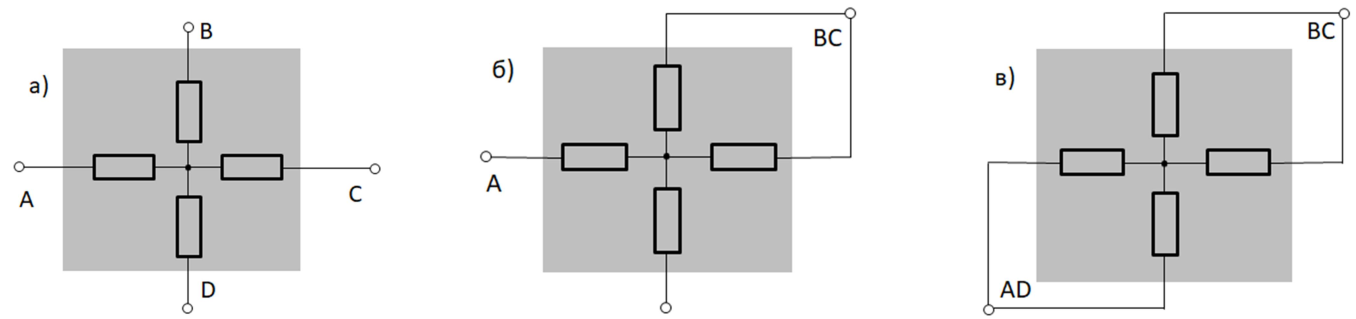
$$\beta + 2\beta - 2 = 0; \beta = \frac{2}{3}$$

$$v(t) = const \cdot t^{-1/3}$$

Критерии оценивания:

Закон электромагнитной индукции.	2
Связь сопротивления и периметра контура.	2
Связь периметра/высоты треугольника и площади.	4
Выражение для тока в зависимости от скорости.	6
Ответ на вопрос а).	1
Выражение для мощности через высоту/периметр и скорость.	4
Ответ на вопрос б).	2

Задача 5. (22 б.) Четыре одинаковых резистора соединены как показано на рисунке (см. рис. а), и запаяны в диэлектрический куб с высокой теплопроводностью. Получившийся четырехполюсник подключают с помощью соединительных проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением резистора, во всех случаях к одинаковому идеальному источнику напряжения. При подключении к клеммам А и В через источник протекает ток $I_1 = 1.00$ А (см. рис а). При подключении к клеммам А и ВС – ток $I_2 = 1.25$ А (см. рис. б). Какой ток будет протекать через источник, если подключить его к клеммам AD и BC (см. рис. в)? Сопротивление резисторов зависит от температуры по линейному закону. Считать, что из-за высокой интенсивности теплообмена внутри диэлектрического куба по сравнению с теплообменом куба с окружающей средой, температуры резисторов практически равны при любом варианте подключения. Температура и прочие параметры окружающей среды во всех случаях одинаковы. Радиационным теплообменом пренебречь. Все токи в



задаче подразумеваются установившимися (через продолжительное время после подключения).

Возможное решение:

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность диэлектрического куба. Обозначим за U напряжение на источнике, k – коэффициент, связывающий разность температур окружающей среды и куба и тепловую мощность потерь энергии через его поверхность.

$$\begin{cases} k\Delta T_1 = UI_1 \\ k\Delta T_2 = UI_2 \end{cases}$$

С другой стороны закон Ома с учетом температурной зависимости сопротивления для случая а) и б) имеет вид

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{2R_0(1+\alpha\Delta T_1)} \\ I_2 = \dfrac{U}{1.5R_0(1+\alpha\Delta T_2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{2R_0\left(1+\dfrac{\alpha U I_1}{k}\right)} \\ I_2 = \dfrac{U}{1.5R_0\left(1+\dfrac{\alpha U I_2}{k}\right)} \end{cases}$$

Здесь U – напряжение на источнике, R_0 сопротивление одного резистора при температуре окружающей среды, α характеризует зависимость сопротивления от температуры.

Введем параметры $I_0 = \frac{U}{R_0}$ и $b = \frac{\alpha U}{k}$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{I_0}{2(1+bI_1)} \\ I_2 = \dfrac{I_0}{1.5(1+bI_2)} \end{cases}$$

$b = \frac{4I_1 - 3I_2}{3I_2^2 - 4I_1^2} = \frac{4}{11} \approx 0.364$; $I_0 = \frac{6I_2I_1(I_2 - I_1)}{3I_2^2 - 4I_1^2} = \frac{30}{11} \approx 2.72;$

Ток при подключении к клеммам AD и BC I_3 можно найти из аналогичного уравнений.

$$\begin{cases} I_3 = \dfrac{U}{R_0(1+\alpha\Delta T_3)} \\ k\Delta T_3 = UI_3 \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{I_0}{(1+bI_3)}$$

Решая квадратное уравнение, получаем I_3

$$I_3 = \frac{-1+\sqrt{4bI_0+1}}{2b} \approx 1.69 \text{ А}$$

Критерии оценивания:

Равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность.	4
Закон Ома для случая а) и б) с учетом зависимости от температуры.	6
Введение параметров, подходящих для дальнейшего решения задачи.	3
Определение введенных выше параметров из известного соотношения токов.	4
Уравнение для искомого тока.	3
Получен верный ответ.	2