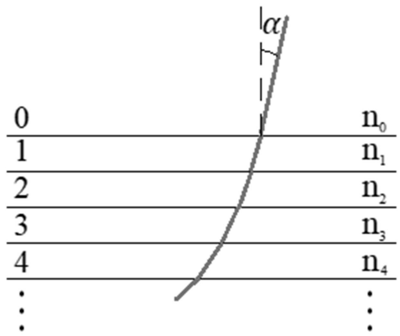
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2023/24 учебный год
10 класс
Разбор задач.

Пояснения к критериям оценивания.

*Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий **конкретно** к данной задаче и записанный **верно**. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (20 б.)

Световой луч проходит через систему, состоящую из прозрачных плоских параллельных слоев. Он падает из начальной среды (пронумерованной как 0) под углом α от перпендикуляра в первый слой. Показатели преломления слоев различны. Для них справедливо рекуррентное соотношение $n_i = \gamma n_{i-1}$, причем $\gamma < 1$. В какой по счету слой луч не сможет проникнуть? Предполагается, что n_0 достаточно велик, чтобы показатель преломления в этом слое был больше 1. Дайте ответ для $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 2^{-0,12}$. Ответ в общем виде приветствуется, но не обязателен для достижения максимального балла.



Возможное решение:

Луч не сможет проникнуть в тот слой, при падении на границу которого произойдет его полное внутреннее отражение. В одном из слоев оно произойдет, поскольку по условиям задачи показатель преломления убывает при переходе в каждый следующий слой ($n_i = \gamma n_{i-1}$, $\gamma < 1$). На каждом шаге происходит переход луча в среду с меньшим показателем преломления, угол падения в $i+1$-й слой при каждом переходе из $i-1$-го слоя в i -й увеличивается.

Пусть луч полностью отразится от слоя с порядковым номером N. Тогда условие полного внутреннего отражения примет вид

$$\sin \alpha_{N-1} > \frac{n_N}{n_{N-1}}$$

Но $\frac{n_N}{n_{N-1}} = \gamma$ по условиям задачи, поэтому

$$\sin \alpha_{N-1} > \gamma$$

Найдем $\sin \alpha_{N-1}$. Для этого запишем закон преломления для первых N слоев

$$\sin \alpha = \frac{n_1}{n_0} \sin \alpha_1, \sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \alpha_2, \dots, \sin \alpha_{N-1} = \frac{n_N}{n_{N-1}} \sin \alpha_N$$

С учетом $\frac{n_i}{n_{i-1}} = \gamma$

$$\sin \alpha = \gamma \sin \alpha_1, \sin \alpha_1 = \gamma \sin \alpha_2, \dots, \sin \alpha_{N-1} = \gamma \sin \alpha_N$$

Подставляя каждое последующее выражение в предыдущее, будем иметь

$$\sin \alpha = \gamma^{N-1} \sin \alpha_{N-1}$$

Тогда условие полного внутреннего отражения в $N-1$-м слое примет вид

$$\gamma^{1-N} \sin \alpha > \gamma$$

Или

$$\gamma^N < \sin \alpha$$

Прологарифмируем неравенство*. Учитывая, что $\gamma < 1$, изменим знак

$$N > \log_\gamma(\sin \alpha)$$

Таким образом, порядковый номер слоя, при падении на границу которого произойдет полное внутреннее отражение, будет равен наименьшему целому числу N, для которого выполняется условие $N > \log_\gamma(\sin \alpha)$.

Для $\alpha = 30^\circ, \gamma = 2^{-0{,}12}$ будем иметь

$$N > \log_{2^{-0{,}12}}(\sin 30^\circ)$$

$$N > \log_{2^{-0{,}12}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$N > \frac{100}{12}$$

$$N > 8\frac{1}{3}$$

Искомый номер слоя равен наименьшему N, которое удовлетворяет полученному неравенству

$$N = 9$$

*Дальнейшее решение можно провести без использования логарифмов, если отказаться от решения в общем виде:

Порядковый номер слоя, при падении на границу которого произойдет полное внутреннее отражение, будет равен наименьшему целому числу N, для которого выполняется условие $\gamma^N < \sin\alpha$. Если $\gamma^N = \sin\alpha$, то луч, дойдя до границы слоя с номером N, уйдет под углом 90° к перпендикуляру.

Для $\alpha = 30^\circ, \gamma = 2^{-0{,}12}$ будем иметь

$$2^{-0{,}12} \quad < \sin 30^\circ$$

Или

$$2^{-\frac{3}{25}N} < 2^{-1}$$

$$\frac{3}{25}N > 1$$

$$N > 8\frac{1}{3}$$

Искомый номер слоя равен наименьшему N, которое удовлетворяет полученному неравенству

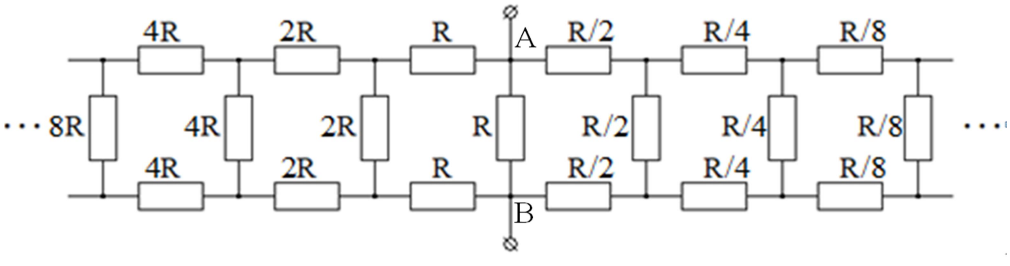
$$N = 9$$

Критерии оценивания:

Присутствует качественное описание явления (засчитывается автоматически, если ход решения верный или содержит только вычислительные ошибки).	4
Записано условие ПВО.	4
Связь угла падения в 0 и *N*-1 слое.	4
Записано неравенство для *N*.	4
Найден *N*.	4

Задача 2. (20 б.)

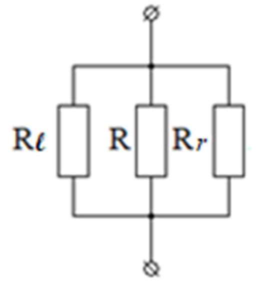
Найти сопротивление между точками A и B бесконечной цепи, изображенной на рисунке. Сопротивления резисторов указаны на рисунке.



Возможное решение:

Выделим три параллельные ветви. Введем эквивалентное сопротивление для правой и левой ветвей, обозначим его R_l и R_r .

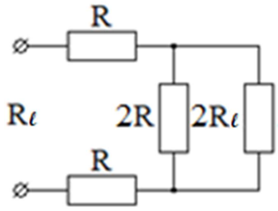
Перерисуем схему:



Полученная схема состоит из трех параллельно соединенных резисторов. Сопротивление этой цепи:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_l}}$$

Найдем R_l. Так как ветвь цепи бесконечна, если «убрать» из нее одно звено, цепь перейдет в подобную цепь. Единственное различие с исходной – увеличение номинала каждого из резисторов в 2 раза. Это приводит к увеличению сопротивления всей цепи в 2 раза. Тогда можем нарисовать схему ветви цепи с сопротивлением R_l следующим образом:



Отсюда можем получить рекурсивное соотношение:

$$R_l = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R_l}}$$

Преобразуем его и получим квадратное уравнение на R_l

$$R_l^2 - 3RR_l - 2R^2 = 0$$

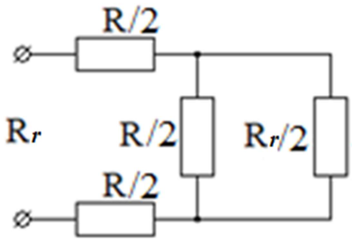
Найдем корни уравнения

$$R_l = R\frac{\left(3 \pm \sqrt{17}\right)}{2}$$

Берем только корень со знаком «+», так как корень со знаком «–» отрицателен и не имеет физического смысла.

$$R_l \approx 3.56R$$

Аналогично для правой ветви:



Рекурсивное соотношение:

$$R_r = R + \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{2}{R_r}}$$

Квадратное уравнение на R_r

$$R_r^2 - 0.5RR_r - R^2 = 0$$

Найдем корни уравнения

$$R_r = R\frac{\left(1 \pm \sqrt{17}\right)}{4}$$

Берем только корень со знаком «+», так как корень со знаком «–» отрицателен и не имеет физического смысла.

$$R_r \approx 1.28R$$

Подставив R_l и R_r в выражение для R_{AB}, окончательно получим

$$R_{AB} = \frac{2R}{\sqrt{17}} \approx 0.485R$$

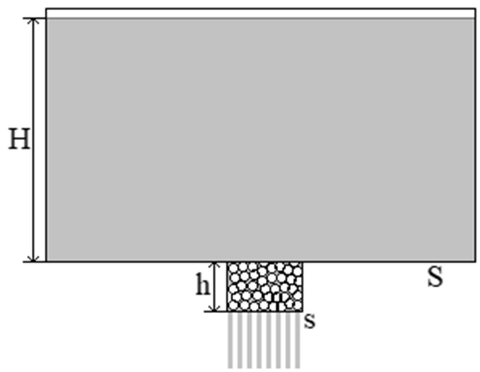
Критерии оценивания:

Выделены «бесконечные» части цепи.	3
Идея об изменении в 2 раза сопротивления при удалении перового звена «бесконечной» цепи.	4
Эквивалентная схема для правой и левой «бесконечной» цепи (4 балла за одну правильную, 3 за вторую)	7
Найдено сопротивление «бесконечных» цепей. (по 2 балла)	4
Найдено общее сопротивление.	2

Задача 3. (20 б.)

Ко дну сосуда площадью S снизу прикреплена коробочка высотой h и площадью основания s. Коробочка заполнена большим числом N одинаковых шариков, объем каждого из которых равен v. Шарики распределены хаотически таким образом, что образуемая ими среда в целом изотропна*. Сосуд заполнен жидкостью до уровня H. Оцените время, за которое объем ΔV будет вытекать из коробочки при установившемся течении. Уровень жидкости H в сосуде поддерживается постоянным. У верхнего и нижнего основания коробочки для жидкости нет никаких препятствий (решетки, крепления и т. д.), при этом шарики прочно скреплены между собой и со стенками коробочки. Капиллярными силами и вязким трением пренебречь.

*Изотропная среда — такая область пространства, физические свойства которой не зависят от направления.



Возможное решение:

Пространство между шариками можно представить, как множество трубок переменного сечения. По закону течения жидкости в трубах объемный расход не зависит от площади сечения $Su = const$ (соотношение неразрывности, где u – скорость течения жидкости). Поэтому каждой из трубок можем сопоставить эквивалентную трубку с некоторыми средними сечением и средней скоростью течения. Объединим все трубки в одну эквивалентную трубу и вычислим усредненную площадь $s_т$ этой трубы.

Для объема трубы (или общего объема пространства между шариками) будет выполняться соотношение:

$$v_т = sh - Nv$$

В силу изотропии среды его можно переписать следующим образом:

$$s_т = s - \frac{Nv}{h}$$

Таким образом, задача сводится к задаче о перетекании жидкости из вертикальной трубы большего сечения в вертикальную трубу меньшего сечения.

Запишем закон сохранения энергии для тонкого верхнего слоя жидкости в сосуде и того же слоя жидкости, когда он находится на дне коробочки. На высоте H в сосуде он будет обладать кинетической энергией $\frac{\Delta m u_1^2}{2}$ и потенциальной энергией $\Delta mg(H+h)$ (отсчитываем от дна коробочки). У дна коробочки потенциальная энергия будет равна нулю, энергия будет только кинетической $\frac{\Delta m u_2^2}{2}$.

$$\frac{\Delta m u_1^2}{2} + \Delta mg(H+h) = \frac{\Delta m u_2^2}{2}$$

Или

$$u_1^2 + 2g(H+h) = u_2^2$$

(Уравнение такого типа называется уравнением Бернулли). Выразим скорость u_1 из известного соотношения $Su_1 = s_т u_2$ и подставим в уравнение. Получим выражение для скорости жидкости у дна коробочки u_2

$$u_2 = \sqrt{\frac{2g(H+h)}{1 - \frac{s_т^2}{S^2}}}$$

Объемный расход $Q = s_т u_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Отсюда получим окончательное выражение для времени.

Ответ:

$$\Delta t = \Delta V \sqrt{\frac{\frac{1}{s_т^2} - \frac{1}{S^2}}{2g(H+h)}}$$

где

$$s_т = s - \frac{Nv}{h}$$

Критерии оценивания:

Оценка сокращения сечения.	5
Записан закон сохранения энергии для небольшой массы жидкости.	6
Найдена скорость жидкости.	5
Вычислено искомое время.	4

Задача 4. (20 б.)

Для нагрева воздуха в помещении (далее - внешняя или окружающая среда) используют масляный обогреватель. Масляный обогреватель оснащен терморегулятором релейного типа, который работает следующим образом: при падении температуры масла ниже заданной температуры $T_у$ (называемой температурой уставки) на небольшую величину ΔT (то есть температура масла равна $T_у - \Delta T$), нагреватель включается, идет нагрев. Когда температура масла достигает величины $T_у + \Delta T$, нагреватель отключается, масло остывает. Далее процесс повторяется.

Температура включенного нагревателя $T_н > T_у + \Delta T$. Площадь нагревателя $S_н$, его коэффициент теплоотдачи $\alpha_н$. Площадь теплоотдачи обогревателя во внешнюю среду $S_в$, соответствующий коэффициент теплоотдачи $\alpha_в$. Рабочий объем обогревателя заполнен маслом, масса которого m, а удельная теплоемкость c. Теплоемкостью корпуса пренебречь. Температура окружающей среды $T_в < T_у - \Delta T$, на обогревателе выставлена температура уставки $T_у$. Считать, что $\Delta T \ll T_н - T_у, T_у - T_в$.

1) Найдите период между включениями терморегулятора (от включения до следующего включения нагревателя) в установившемся режиме работы прибора.

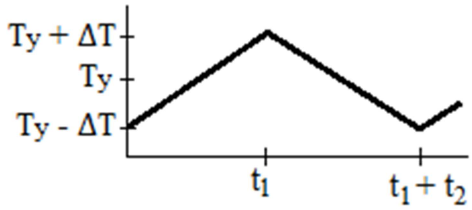
2) Получите вид зависимости соответствующей (полученному в пункте 1 периоду) частоты от разности температур уставки и внешней среды $T = T_у - T_в$ (при $T_у = const$) и постройте схематично график этой зависимости. Объясните полученный результат.

Для простоты считать нагреватель идеальным (мгновенно нагревающимся и остывающим), теплопроводность масла высокой (температура масла во всех точках объема одинакова).

Возможное решение:

1) В установившемся режиме работы обогревателя температура масла в течение некоторого времени t_1 будет расти от величины $T_у - \Delta T$ до величины $T_у + \Delta T$. Затем в течение некоторого времени

t_2 будет падать от величины $T_у + \Delta T$ до величины $T_у - \Delta T$. Далее процесс будет повторяться. Период θ работы терморегулятора будет равен сумме времен t_1 и t_2.



Найдем t_1 и t_2. Для этого запишем соотношения для скоростей теплообмена.
С одной стороны, скорость нагрева масла в течение времени t_1 равна количеству теплоты, полученному маслом за время t_1

$$\frac{\Delta Q_1}{t_1} = cm\frac{2\Delta T}{t_1}$$

С другой стороны, она равна разности скоростей теплопередачи от нагревателя маслу и от масла окружающей среде. Эти скорости, согласно закону Ньютона-Рихмана, пропорциональны разности температур нагревателя и масла, масла и окружающей среды соответственно. В силу малости ΔT в течение времени t_1 эти скорости практически не будут изменяться, температура будет изменяться практически линейно. Их можно считать приблизительно пропорциональными $T_н - T_у$ и $T_у - T_в$ соответственно. Тогда с учетом закона Ньютона-Рихмана можем записать

$$\frac{\Delta Q_1}{t_1} = \alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)$$

Приравняв полученные скорости нагрева, найдем t_1

$$t_1 = \frac{2cm\Delta T}{\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)}$$

Рассуждая аналогично, можем записать соотношение для t_2 с той разницей, что в этом случае нагреватель не будет участвовать в процессе, а количество теплоты, получаемое маслом за время t_2 будет отрицательным, так как масло остывает.

$$-cm\frac{2\Delta T}{t_2} = -\alpha_в S_в (T_у - T_в)$$

Тогда время t_2

$$t_2 = \frac{2cm\Delta T}{\alpha_в S_в (T_у - T_в)}$$

Искомый период $\theta = t_1 + t_2$ будет равен

$$\theta = 2cm\Delta T\left(\frac{1}{\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)} + \frac{1}{\alpha_в S_в (T_у - T_в)}\right)$$

Или

$$\theta = 2cm\Delta T\frac{\alpha_н S_н (T_н - T_у)}{\left(\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)\right)\alpha_в S_в (T_у - T_в)}$$

2) Частота работы терморегулятора будет равна

$$\nu = \frac{1}{\theta} = \frac{\left(\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)\right)\alpha_в S_в (T_у - T_в)}{2cm\Delta T\alpha_н S_н (T_н - T_у)}$$

Обозначим $T_у - T_в$ как T ($T_у = const$)

$$\nu = \frac{\left(\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в T\right)\alpha_в S_в T}{2cm\Delta T\alpha_н S_н (T_н - T_у)}$$

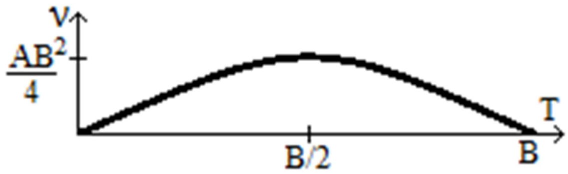
Для удобства нахождения вида зависимости вынесем множители за скобки

$$\nu = \frac{\alpha_в^2 S_в^2}{2cm\alpha_н S_н \Delta T (T_н - T_у)}\left(\frac{\alpha_н S_н}{\alpha_в S_в}(T_н - T_у) - T\right)T$$

Пусть $A = \frac{\alpha_в^2 S_в^2}{2cm\alpha_н S_н \Delta T (T_н - T_у)}$, $B = \frac{\alpha_н S_н}{\alpha_в S_в}(T_н - T_у)$, тогда

$$\nu = A(B - T)T$$

График $\nu = f(T)$ будет представлять собой положительный участок параболы, ветви которой направлены вниз



Максимальная частота работы терморегулятора будет достигаться при

$$T = \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha_н S_н}{\alpha_в S_в}\left(T_н - T_у\right)$$

Значение максимальной частоты

$$\nu = \frac{AB^2}{4} = \frac{\alpha_н S_н}{8cm\Delta T}\left(T_н - T_у\right)$$

При приближении температуры окружающей среды к температуре уставки масло перестанет остывать, отдавая тепло в окружающую среду. В результате установится температура масла, близкая к температуре уставки. Нагреватель будет все время отключен, соответственно частота его работы будет равна нулю. (Время t_2 длится бесконечно).

При достижении температурой окружающей среды величины $B = \frac{\alpha_н S_н}{\alpha_в S_в}\left(T_н - T_у\right)$ скорость остывания масла превысит скорость его нагрева, температура масла постоянно будет ниже температуры уставки, поэтому нагреватель будет все время включен. (Время t_1 длится бесконечно).

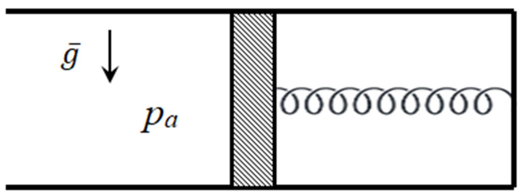
Максимум частоты будет достигаться, когда сумма времен t_1 и t_2 минимальна.

Критерии оценивания:

Тепловой баланс для масла внутри обогревателя.	3
Закон Ньютона-Рихмана для теплообмена масла с окружающей средой.	3
Найдено время нагрева.	3
Найдено время остывания.	3
Найден искомый период.	1
Частота как функция температуры окружающей среды.	2
Найдено значение температуры, при которой частота максимальна.	4
Найдена искомая частота.	1

Задача 5. (20 б.)

Один моль идеального одноатомного газа находится в расположенном горизонтально цилиндрическом сосуде. Порция газа ограничена вертикальным герметичным поршнем, который может двигаться вдоль оси цилиндра без трения. К поршню и дну сосуда прикреплена горизонтальная идеальная пружина (см. Рисунок). В начальном состоянии температура газа равна температуре окружающей среды, пружина не деформирована. Объемом пружины можно пренебречь. Если начальную температуру газа, ограниченного поршнем, повысить в η раз, то объем газа повысится в μ раз. Найдите теплоёмкость **газа,** ограниченного поршнем, в **начальном** состоянии.



Возможное решение:

Учитывая, что вначале пружина не деформирована, из баланса сил получаем для давления газа в сосуде.

$$p = p_a + \frac{k\Delta x}{S}$$

где Δx и S соответственно смещение и площадь поршня. Смешение можно связать с объемом газа.

$$p = p_a + \frac{k(V - V_0)}{S^2} = p_a + \alpha(V - V_0)$$

Уравнение Менделеева – Клапейрона

$$V(p_a + \alpha(V - V_0)) = RT$$

Учитывая первое начало термодинамики, теплоемкость вычисляется по формуле*

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{p\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T}{\Delta T} = p\frac{\Delta V}{\Delta T} + \frac{3}{2}R, \qquad \Delta T, \Delta V \to 0.$$

В начальном состоянии $(V - V_0) = \Delta V \ll V_0$

$$\Delta\big((p_a + \alpha(V - V_0))V\big) = R\Delta T$$

Учитывая малость $(\Delta V)^2$ по сравнению с $V_0\Delta V$

$$p_a\Delta V + V_0\alpha\Delta V = R\Delta T$$

$$p_a\frac{\Delta V}{\Delta T} + V_0\alpha\frac{\Delta V}{\Delta T} = R$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{R}{\alpha V_0 + p_a}$$

$$C = \frac{Rp_a}{\alpha V_0 + p_a} + \frac{3}{2}R = R\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha V_0}{p_a}}\right);$$

Вычислим неизвестный параметр $\frac{\alpha V_0}{p_a}$ из известных значений η и μ

$$p_aV_0 = RT_0$$

$$(p_a + \alpha(\mu V_0 - V_0))\mu V_0 = \eta RT_0$$

$$\left(1 + \frac{\alpha V_0(\mu - 1)}{p_a}\right)\mu = \eta$$

$$\frac{\alpha V_0}{p_a} = \frac{(\eta - \mu)}{\mu(\mu - 1)}$$

Окончательно, теплоемкость газа

$$C = R\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1 + \frac{(\eta - \mu)}{\mu(\mu - 1)}}\right)$$

*Этот этап решения можно провести с помощью производных:
Выразим объем газа через уравнение Менделеева – Клапейрона

$$V(p_a + \alpha(V - V_0)) = RT$$

$$V = \frac{\alpha V_0 - p_a + \sqrt{V_0^2\alpha^2 + 4\alpha RT - 2V_0\alpha p_a + p_a^2}}{2\alpha}$$

Учитывая первое начало термодинамики, теплоемкость вычисляется по формуле

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{pdV + \frac{3}{2}RdT}{dT} = p\frac{dV}{dT} + \frac{3}{2}R;$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{\sqrt{V_0^2\alpha^2 + 4\alpha RT - 2V_0\alpha p_a + p_a^2}};$$

В начальном состоянии

$$RT_0 = p_aV_0$$

$$C = \frac{Rp_a}{\alpha V_0 + p_a} + \frac{3}{2}R = R\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha V_0}{p_a}}\right);$$

Критерии оценивания:

Давление газа выражено через деформацию пружины.	3

Записано уравнение, содержащее только температуру, объем и постоянные величины.	3
Формула для теплоемкости через $\frac{\Delta V}{\Delta T}$ или $\frac{dV}{dT}$	4
Теплоемкость выражена через αV_0	5
Неизвестная константа выражена через η и μ	4
Окончательное выражение для теплоемкости	1