Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2024-2025 учебный год
10 класс
Разбор задач

Пояснения к критериям оценивания.
Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий ***конкретно*** *к данной задаче и записанный* ***верно****. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (17 б.)
Расстояние от центра хрусталика глаза человека до сетчатки неизменно и равно 17 мм. Человек смотрит одним глазом на предмет, находящийся на расстоянии 1 м от глаза. Форма хрусталика подстраивается, чтобы получить четкое изображение предмета.

1) Во сколько раз изменится фокусное расстояние хрусталика, если на середине отрезка, соединяющего глаз и предмет, поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием 10 см таким образом, чтобы этот отрезок лежал на главной оптической оси линзы?
2) Во сколько раз изменится фокусное расстояние хрусталика, если на середине отрезка, соединяющего глаз и предмет, поместить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 10 см таким образом, чтобы этот отрезок лежал на главной оптической оси линзы?

Возможное решение:

1) Хрусталик глаза является собирающей линзой, создающей действительное изображение на сетчатке. Для простоты используем формулу тонкой линзы*. В случае, когда человек смотрит на предмет без линзы, формула тонкой линзы для хрусталика имеет вид
$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_\text{г}}$$
где F_1 – фокусное расстояние хрусталика, $d_1 = 1$ м – расстояние от предмета до глаза, $f_\text{г} = 17$ мм – расстояние от центра хрусталика до сетчатки глаза, то есть от линзы до изображения.
Отсюда
$$F_1=\frac{1}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_\text{г}}}$$
Если поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_\text{л} = 10$ см на расстоянии $d_\text{л} = \frac{d_1}{2} > F_\text{л}$ от предмета, то изображение предмета, создаваемое линзой будет действительным. Формула тонкой линзы будет иметь вид
$$\frac{1}{F_\text{л}}=\frac{1}{d_\text{л}}+\frac{1}{f_\text{л}}$$
где, $f_\text{л}$ – расстояние от линзы до изображения.
Выразим $f_\text{л}$
$$f_\text{л}=\frac{1}{\frac{1}{F_\text{л}}-\frac{1}{d_\text{л}}}=\frac{1}{\frac{1}{F_\text{л}}-\frac{2}{d_1}}$$

Так как изображение действительное, оно будет находиться за линзой на расстоянии $f_л$ от нее. То есть на расстоянии $d_2 = \frac{d_1}{2} - f_л$ от хрусталика глаза. Это изображение для хрусталика будет новым «предметом», и он изменит свое фокусное расстояние таким образом, чтобы изображение этого «предмета» формировалось на сетчатке. В этом случае формула тонкой линзы для хрусталика будет иметь вид

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_г}$$

где F_2 – фокусное расстояние хрусталика после помещения линзы, d_2 – расстояние от изображения линзы до хрусталика глаза. Выразим F_2

$$F_2 = \frac{1}{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_г}}$$

Тогда искомое отношение

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_г}}{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_г}} = \frac{d_2}{d_1} \frac{d_1 + f_г}{d_2 + f_г}$$

Подставим $d_2 = \frac{d_1}{2} - f_л = \frac{d_1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{F_л} - \frac{2}{d_1}} = \frac{d_1}{2} \frac{d_1 - 4F_л}{d_1 - 2F_л}$ и получим ответ

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{d_1 + f_г}{d_1 + 2f_г \frac{d_1 - 2F_л}{d_1 - 4F_л}} \approx 0{,}97$$

2) Рассеивающая линза имеет мнимый фокус и всегда дает мнимое изображение. Если поместить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_л = 10$ см на расстоянии $d_л = \frac{d_1}{2}$ от предмета, то формула тонкой линзы будет иметь вид

$$-\frac{1}{F_л} = \frac{1}{d_л} - \frac{1}{f_л}$$

где, $f_л$ – расстояние от линзы до изображения.

Выразим $f_л$

$$f_л = \frac{1}{\frac{1}{F_л} + \frac{1}{d_л}} = \frac{1}{\frac{1}{F_л} + \frac{2}{d_1}}$$

Так как изображение мнимое, оно будет находиться перед линзой на расстоянии $f_л$ от нее. То есть на расстоянии $d_2 = \frac{d_1}{2} + f_л$ от хрусталика глаза. Несмотря на то, что изображение мнимое, хрусталик преобразует его в действительное изображение на сетчатке, поскольку является собирающей линзой. Это изображение для хрусталика будет новым «предметом», и он изменит свое фокусное расстояние таким образом, чтобы изображение этого «предмета» формировалось на сетчатке. В этом случае формула тонкой линзы для хрусталика будет иметь вид

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_г}$$

где F_2 – фокусное расстояние хрусталика после помещения линзы, d_2 – расстояние от изображения линзы до хрусталика глаза. Выразим F_2

$$F_2 = \frac{1}{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_г}}$$

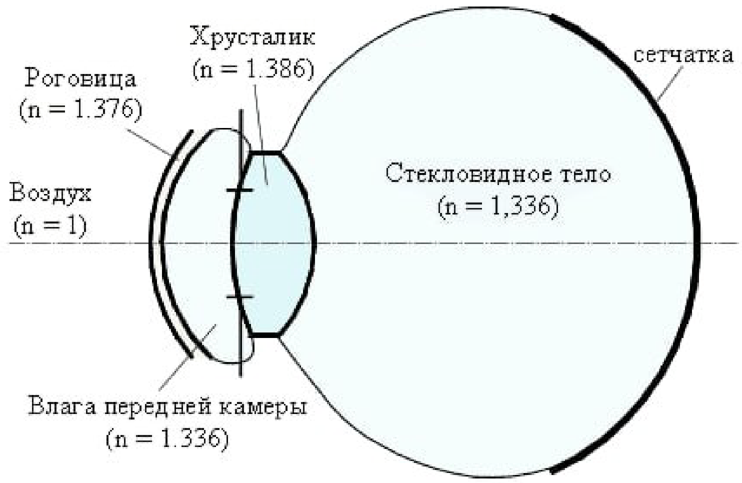
Учитывая выражение для F_1, полученное в п. 1, запишем искомое соотношение

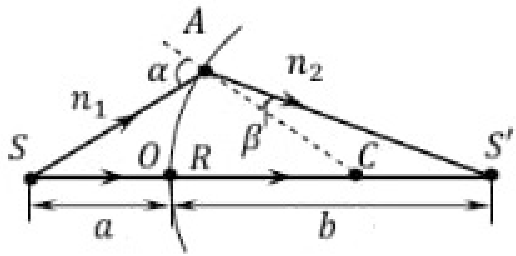
$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{f_г}}{\dfrac{1}{d_2}+\dfrac{1}{f_г}}=\frac{d_2}{d_1}\frac{d_1+f_г}{d_2+f_г}$$

Подставим $d_2=\frac{d_1}{2}+f_л=\frac{d_1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{F_л}+\frac{2}{d_1}}=\frac{d_1}{2}\frac{d_1+4F_л}{d_1+2F_л}$ и получим ответ

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{d_1+f_г}{d_1+2f_г\dfrac{d_1+2F_л}{d_1+4F_л}}\approx 0{,}99$$

*Если рассмотреть оптическую систему глаза более подробно, она состоит из сферической преломляющей поверхности, на которой происходит основное угловое отклонение луча, и хрусталика, который имеет переменную кривизну и осуществляет тонкую настройку фокусного расстояния. Поскольку оптическая плотность внутри глаза меняется не слишком сильно, можно дать грубую оценку хода лучей, ограничившись сферической преломляющей поверхностью (см. рисунок).





Для сферической поверхности, изображенной на рисунке, справедливо соотношение

$$\frac{n_2}{b}+\frac{n_1}{a}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

Здесь b – расстояние от сетчатки глаза до роговицы. Если принять n_2 равным среднему показателю преломления глаза ($n_2\approx 1{,}34$) и учесть, что $b=f_г+c$ ($f_г$ – расстояние от центра хрусталика до сетчатки, c – расстояние от центра хрусталика до роговицы), то $f_{г\_эфф}=\frac{b}{n_2}=\frac{f_г+c}{n_2}\approx 17$ мм $\approx f_г$. Тогда первое слагаемое в левой части $\frac{n_2}{b}=\frac{1}{f_{г\_эфф}}$.

Расстояние от предмета до центра хрусталика $d = a + c$ в силу того, что $c \ll a$, можно считать $d \approx a$. Показатель преломления $n_1 = 1$. Отсюда второе слагаемое левой части $\frac{n_1}{a} = \frac{1}{d}$.

Тогда

$$\frac{1}{f_{\text{г\_эфф}}} + \frac{1}{d} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

За счет того, что $f_{\text{г\_эфф}} \ll d$, фокусное расстояние F может быть грубо оценено как $\frac{n_2}{F} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ $(d \to \infty, \frac{1}{d} \to 0)$, то есть $F_{\text{эфф}} = \frac{F}{n_2} = \frac{R}{n_2 - n_1}$.

Таким образом, выражение приобретает вид формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{f_{\text{г\_эфф}}} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_{\text{эфф}}}$$

Влияние хрусталика грубо оценивается как изменение параметра $F_{\text{эфф}}$. В данной задаче рассматривается отношение фокусных расстояний для различных случаев, поэтому множитель n_2 в правой части $\frac{1}{F_{\text{эфф}}} = \frac{n_2}{F}$ не влияет на конечный результат.

В офтальмологии для описания аккомодации (способность глаза подстраивать кривизну хрусталика для получения четкого изображения предметов, находящихся на различных расстояниях от него), в основном, используется формула тонкой линзы.

Критерии оценивания:

Корректно записана формула тонкой линзы для глаза и найдено фокусное расстояние хрусталика.	3
Найдено изображение предмета, создаваемого дополнительной собирающей линзой.	3
Найдено новое фокусное расстояние хрусталика и рассчитано искомое отношение для вопроса 1).	4
Найдено изображение предмета, создаваемого дополнительной рассеивающей линзой.	3
Найдено новое фокусное расстояние хрусталика и рассчитано искомое отношение для вопроса 2).	4

Задача 2. (18 б.)

В распоряжении экспериментаторов имеется небольшой цилиндрический сосуд с идеальным газом под поршнем, который может двигаться без трения со стенками сосуда. Сосуд помещают под воду таким образом, чтобы ось цилиндрического сосуда всегда была горизонтальна. Для удержания его в равновесии на глубине 3 м требуется сила в 10 Н, направленная вниз. На глубине 7 м аналогичная сила, также направленная вниз, составляет 6 Н. Определите минимальную глубину, на которую нужно погрузить сосуд, чтобы он начал тонуть.

Температура газа устанавливается равной температуре воды, которая в свою очередь постоянна на всей глубине. Считать для простоты, что глубина погружения во всех случаях много больше размеров сосуда. Над поверхностью воды атмосферное давление p_0 = 100 кПа. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2, плотность воды 1000 кг/м^3.

Возможное решение:

Обозначим силу, требуемую для удержания сосуда на глубине h_1 = 3 м за F_1, на глубине h_2 = 7 м за F_2. Давление в сосуде на глубине 3 м обозначим p_1, на глубине 7 м за p_2, на искомой глубине h_3 за p_3. Объем газа обозначим соответственно V_1, V_2, V_3. Объем сосуда без газа V_0, плотность воды ρ_w . Запишем баланс сил в трех случаях:

$$g(V_1 + V_0)\rho_w - mg = F_1 \quad (1)$$
$$g(V_2 + V_0)\rho_w - mg = F_2 \quad (2)$$
$$g(V_3 + V_0)\rho_w - mg = 0 \quad (3)$$

Скомбинируем уравнения (1) – (2) и (2) – (3)

$$g(V_1 - V_2)\rho_w = F_1 - F_2$$
$$g(V_2 - V_3)\rho_w = F_2$$

Используя закон Менделеева-Клапейрона, выразим объем через давление, а затем поделим одно уравнение на другое

$$\nu RT\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) g\rho_w = F_1 - F_2$$
$$\nu RT\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}\right) g\rho_w = F_2$$
$$\frac{F_1 - F_2}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} = \frac{F_2}{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}}$$
$$(F_1 - F_2)\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}\right) = F_2\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$$
$$\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_2} - \frac{F_2}{F_1 - F_2}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$$

Давления p_1 и p_2 легко найти, а давление p_3 выражается через искомую величину.

$$p_1 = p_0 + g\rho_w h_1$$
$$p_2 = p_0 + g\rho_w h_2$$
$$h_3 = \frac{(p_3 - p_0)}{g\rho_w}$$

Окончательно получаем

$$h_3 = \frac{1}{g\rho_w}\left(\left(\frac{1}{p_0 + g\rho_w h_2} - \frac{F_2}{F_1 - F_2}\left(\frac{1}{p_0 + g\rho_w h_1} - \frac{1}{p_0 + g\rho_w h_2}\right)\right)^{-1} - p_0\right)$$

Подставляя известные значения, получаем

$$h_3 = 21.6 \text{ м}$$

Критерии оценивания:

Записан баланс сил на разных глубинах погружения.	4
Записан закон Менделеева - Клапейрона для газа в сосуде на разных глубинах.	4
Давление на критической глубине выражено через известные величины.	4
Гидростатическое давление выражено через глубину.	2
Выражение для искомой глубины (не обязательно, засчитывается если ответ найден верно)	2
Найден численный ответ.	2

Задача 3. (17 б.)

Две узкие полосы из меди и алюминия длиной L = 1 м и толщиной b = 3 мм каждая, спаяны вместе по всей площади соприкосновения наибольшими гранями. При комнатной температуре такая система - идеально прямой брусок. Систему нагрели на T = 100 ^oC, в результате она искривилась. Оценить радиус кривизны такого бруска после нагревания.

Коэффициент линейного теплового расширения алюминия α_{Al} = $23\cdot10^{-6}$ $^oC^{-1}$, меди α_{Cu} = $17\cdot10^{-6}$ $^oC^{-1}$.
Указание: длина дуги равна произведению радиуса окружности и угла в радианах.

Возможное решение:

Представим соединенные полосы после нагревания в виде дуг, отвечающих одному и тому же углу β [рад] (так как они спаяны), но с разным радиусом. Для оценки примем, что радиусы отличаются на расстояние между серединами металлических слоев. Длины этих дуг сопоставим с длинами полос (в центре слоя металла) после теплового расширения.

$$\beta(R+b) \approx L(1+\alpha_{Al}T)$$

$$\beta R \approx L(1+\alpha_{Cu}T)$$

Вычтем второе уравнение из первого

$$\beta b \approx LT(\alpha_{Al}-\alpha_{Cu})$$

Принимая во внимание, что длины дуг отличаются от L незначительно, ввиду малости коэффициентов линейного теплового расширения алюминия и меди, и угол связан с длиной дуги, т.е. $\beta R \approx L$, откуда

$$\frac{Lb}{R} \approx LT(\alpha_{Al}-\alpha_{Cu})$$

$$R \approx \frac{b}{T(\alpha_{Al}-\alpha_{Cu})}$$

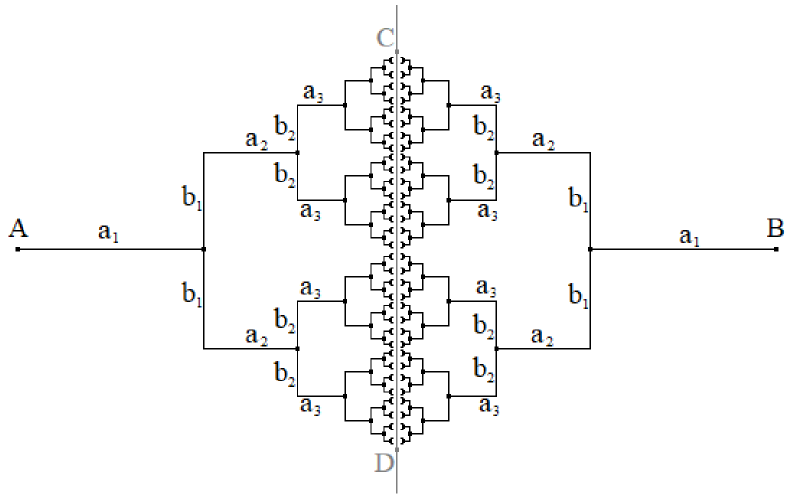
Подставим численные значения

$$R \approx 5 \text{ м}$$

Критерии оценивания:

Полоса представлена в виде дуги окружности.	5
Система представлена в виде дуг с разным радиусом.	5
Угол исключен из уравнений или найден.	5
Найдено приближенное значение искомого радиуса кривизны.	2

Задача 4. (23 б.)
На рисунке представлена конструкция, состоящая из тонкого однородного провода с сопротивлением на единицу длины ρ. Цепь бесконечно ветвится, как показано на рисунке, причем на каждом шаге длины a и b уменьшаются в $\gamma > 1$ раз, т. е. $a_i = \gamma a_{i+1}$ и $b_i = \gamma b_{i+1}$. Конструкция симметрична относительно прямых AB и CD, на прямой CD соответствующие ветви правой и левой частей цепи смыкаются друг с другом (очевидно, что число этих



соединений бесконечно). Полная длина конструкции AB $= L$, ее полная высота CD $= H$. Найдите сопротивление цепи между точками A и B, ответ выразите через ρ, L, H и γ. Дайте ответ в общем виде. Также получите выражение для $\gamma = 2$ и $L = H$.

Возможное решение:

Зная полную длину конструкции L, вычислим a_1. В силу симметрии конструкции длины левой и правой ее частей равны $\frac{L}{2}$. Так как $\mathrm{a}_\mathrm{i} = \gamma \mathrm{a}_{\mathrm{i}+1}$, будем иметь

$$\frac{L}{2} = \mathrm{a}_1 + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma} + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^3} + \cdots$$

Получили сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем $q = \frac{1}{\gamma}$. Сумма первых N членов геометрической прогрессии равна

$$\mathrm{S}_\mathrm{N} = \mathrm{a}_1 + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma} + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^3} + \cdots + \frac{\mathrm{a}_\mathrm{N}}{\gamma^N} = \frac{\mathrm{a}_1\left(1 - \frac{1}{\gamma^N}\right)}{1 - \frac{1}{\gamma}}$$

С ростом N слагаемое $\frac{1}{\gamma^N}$ в числителе дроби будет уменьшаться, значит при бесконечном числа членов это слагаемое устремится к нулю. Тогда получим

$$\frac{L}{2} = \mathrm{a}_1 + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma} + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^3} + \cdots = \frac{\mathrm{a}_1\gamma}{\gamma - 1}$$

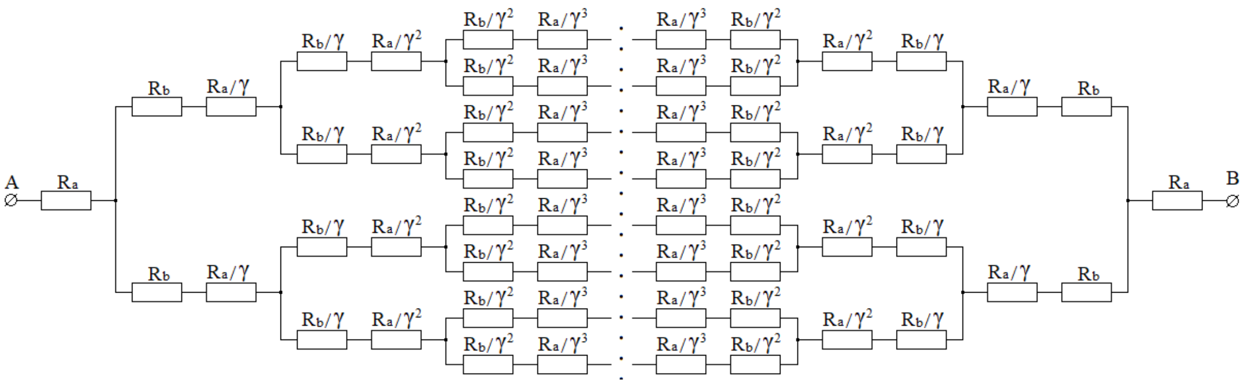
Отсюда можно выразить

$$\mathrm{a}_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} L$$

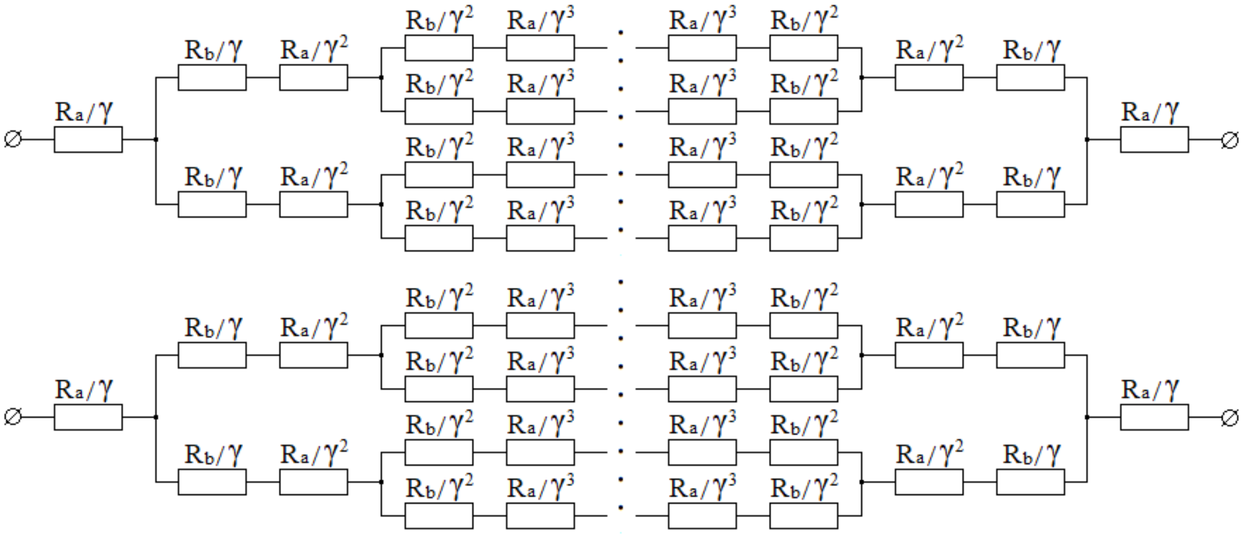
Рассуждая аналогично, вычислим b_1

$$\mathrm{b}_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} H$$

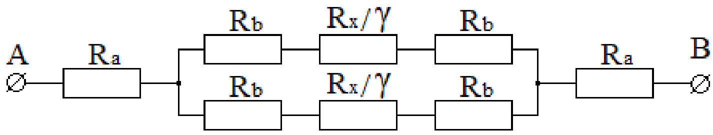
Обозначим $R_a = \rho \mathrm{a}_1$, $R_b = \rho \mathrm{b}_1$, и, учитывая, что $\mathrm{a}_\mathrm{k} = \frac{\mathrm{a}_1}{\gamma^k}$, $\mathrm{b}_\mathrm{k} = \frac{\mathrm{b}_1}{\gamma^k}$, нарисуем эквивалентную схему конструкции:



Так как цепь бесконечна, если «убрать» из нее участки, содержащие сопротивления R_a и R_b, цепь перейдет в пару подобных цепей. Единственное различие этих цепей с исходной – уменьшение номинала каждого из резисторов в γ раз. Это приводит к уменьшению сопротивления каждой из этих двух цепей в γ раз.



Пусть R_x – сопротивление всей цепи, тогда сопротивление каждой из пары полученных цепей $\frac{R_x}{\gamma}$. Перерисуем схему



Тогда сопротивление цепи между точками A и B

$$R_x = 2R_a + \frac{2R_b + \frac{R_x}{\gamma}}{2}$$

Решив уравнение, получим

$$R_x = \frac{2\gamma(2R_a + R_b)}{2\gamma - 1}$$

Учитывая, что $R_a = \rho \mathrm{a}_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\rho L$, $R_b = \rho \mathrm{b}_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\rho H$, получим ответ

$$R_x = \frac{\gamma - 1}{2\gamma - 1}\rho(2L + H)$$

При $\gamma = 2$

$$R_x = \frac{1}{3}\rho(2L + H)$$

Если $\gamma = 2$ и $L = H$

$$R_x = \rho L$$

Критерии оценивания:

Длина и ширина конструкции выражены через прогрессию.	3
Вычислены длины a_1 и b_1.	4
Изображена эквивалентная схема (не обязательно, засчитывается при верном дальнейшем ходе решения)	2
Идея подобия цепей (с учетом множителя).	4
Эквивалентная схема с учетом подобия.	3

Найдено искомое сопротивление в общем виде.	5
Искомое сопротивление в частном случае.	2

Задача 5. (25 б.)
Затрагивая тему плаваний на парусных судах, многие задаются вопросом: как поступают моряки в ситуации, когда нужно плыть навстречу ветру? Неужели они каждый раз ждут попутного ветра? Навряд ли. Иначе длительность плавания полностью зависела бы от случая, и в некоторых ситуациях путешествие могло бы быть чрезвычайно долгим. Плывут против ветра? Очевидно, это невозможно. Как же они решают эту проблему?

Действительно, прямо против ветра на парусах плыть нельзя. Но можно плыть под острым углом к направлению ветра (на языке моряков – «идти в бейдевинд»). На первый взгляд, и это невозможно. Однако, если определенным образом поставить парус, можно добиться, чтобы судно начало двигаться навстречу ветру. В случае, когда необходимо держать курс точно против ветра, выполняется зигзагообразное движение (называемое моряками «лавировкой судна»): сначала судно некоторое время плывет под острым углом к направлению ветра в одну сторону (например, вправо), затем поворачивает, и плывет в течение того же времени под тем же острым углом к направлению ветра, но уже в противоположную сторону (влево) и так далее. Таким образом, поддерживается общий курс против ветра.

Рассмотрим простое судно с одним парусом, вертикально установленным на мачте, и симметричным относительно нее. Мачта установлена вертикально в центре палубы. Парус можно повернуть вокруг мачты на любой угол. В рамках данной задачи, для простоты, рассмотрите ветер как поток твердых частиц, абсолютно упруго ударяющихся о прямой вертикальный парус. Примите также, что вязкое трение воздуха о материал паруса пренебрежимо мало. Также следует отметить, что важной особенностью парусных судов является очень глубокий киль (плоский продольный выступ на дне судна).

1) Объясните, каким образом парусное судно плывет под острым углом* α к направлению ветра? Какие силы на него действуют? Как должен быть повернут парус (диапазон углов между плоскостью паруса и килем)?
2) Найти приближенное значение силы, действующей на корабль со стороны ветра вдоль киля, если на парус, перпендикулярный ветру, действует сила F_0. Выразить искомую силу через F_0, угол киля к ветру* α и угол поворота паруса относительно киля β.
3) Под каким оптимальным углом нужно повернуть парус к килевой линии, чтобы судно двигалось максимально быстро под острым углом* α к направлению ветра?

*в системе отсчета, связанной с кораблем

Возможное решение:

1) Сначала выясним, каким образом ветер двигает парус. Парус меняет импульс части потока ветра, на пути которого оказался парус. За время Δt импульс части потока ветра меняется таким образом, чтобы угол падения ветра на парус был равен углу отражения. Это равносильно тому, что проекция импульса на перпендикуляр к парусу меняется на обратную, а проекция того же импульса на плоскость паруса не меняется. Последний факт связан с тем, что мы пренебрегаем вязким трением воздуха о материал паруса.

$$\overline{p_1} = \overline{p_0} + 2(\overline{p_0}, \bar{n})\,\bar{n}$$

$$\Delta\bar{p} = 2(\overline{p_0}, \bar{n})\bar{n} = 2p_0 \cos\gamma\,\bar{n}$$

где $\bar{n}$ вектор нормали к парусу, γ – угол между нормалью к парусу и ветром. Величина начального импульса p_0, на пути которого оказался парус за время Δt, определяется как

$$p_0 = \rho V v$$

где ρ – плотность воздуха, V – объем воздуха, v – скорость ветра относительно корабля. За время Δt от паруса отразится объем воздуха

$$V = v_{\perp}\Delta t S = vS\Delta t \cos\gamma$$

где S – площадь паруса

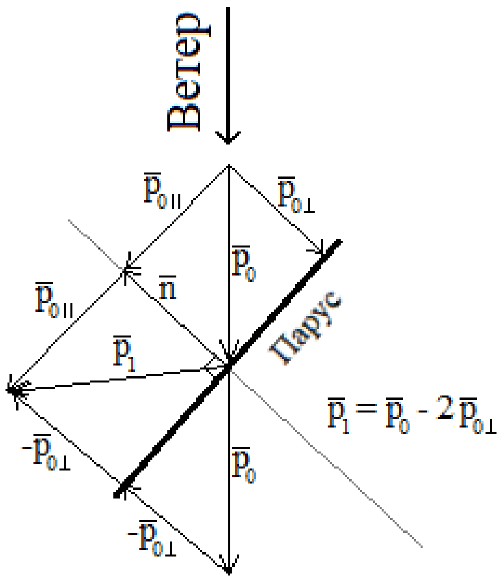
Тогда сила, действующая со стороны паруса на ветер

$$\bar{F} = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = 2(\overline{p_0}, \bar{n})\frac{\bar{n}}{\Delta t} = 2\rho v^2 S \cos^2\gamma\,\bar{n}$$

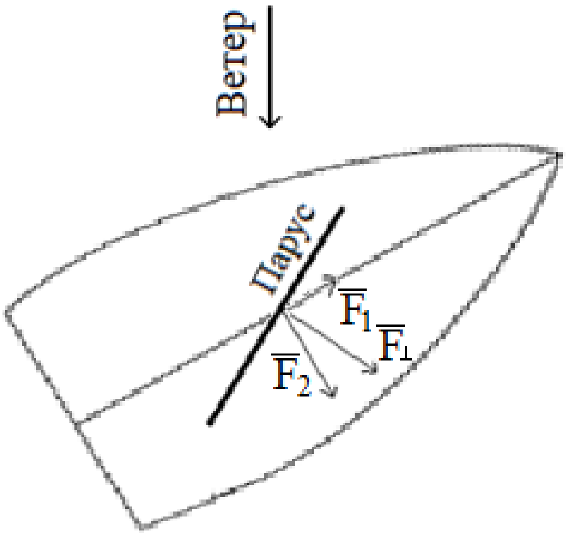
Сила, действующая на парус, по третьему закону Ньютона перпендикулярна парусу и равна

$$\overrightarrow{F_{\perp}} = -\bar{F} = -2\rho v^2 S \cos^2\gamma\,\bar{n}$$

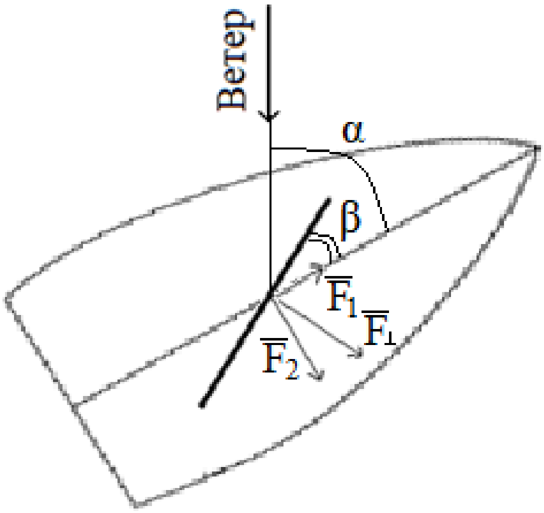
$$F_{\perp} = F_0 \cos^2\gamma$$



Таким образом, на парус действует только составляющая $\overrightarrow{F_{\perp}}$, и ветер всегда толкает парус перпендикулярно его плоскости. Теперь расставим силы для судна с парусом. Известно, что на судно с закрепленным на нем парусом действует сила $\overrightarrow{F_{\perp}}$. Выделим две ее составляющие: направленную вдоль киля $\overrightarrow{F_1}$ и направленную перпендикулярно килевой линии $\overrightarrow{F_2}$. За счет того, что киль парусного судна очень глубокий, его движению в поперечном направлении препятствует большое сопротивление воды. Таким образом, составляющая $\overrightarrow{F_2}$ практически полностью компенсируется силой сопротивления воды, действующей на киль. На судно действует только составляющая $\overrightarrow{F_1}$, направленная вдоль киля и толкающая судно вперед. Если парус повернут, как, например, показано на рисунке ниже, судно будет двигаться под острым углом к направлению ветра.



Найдем диапазон углов поворота паруса по отношению к килю, при которых судно сможет плыть под острым углом α к направлению ветра. Пусть β – угол между парусом и килем.



Если парус будет повернут под углом $0 < \beta < \alpha$ к килю, как на рисунке, то составляющая $\overrightarrow{F_1}$ будет двигать судно вперед. При $\beta = \alpha$ парус повернут вдоль ветра, и $\overrightarrow{F_\perp} = 0$, судно стоит на месте. При $\beta = 0$ парус повернут вдоль киля, составляющая $\overrightarrow{F_1} = 0$, $\overrightarrow{F_\perp} = \overrightarrow{F_2}$ – компенсируется сопротивлением воды, судно стоит на месте. Легко убедиться, что при выходе угла β за эти пределы составляющая $\overrightarrow{F_1}$ будет толкать судно в обратную сторону. Таким образом, диапазон углов β, при которых судно будет двигаться навстречу ветру

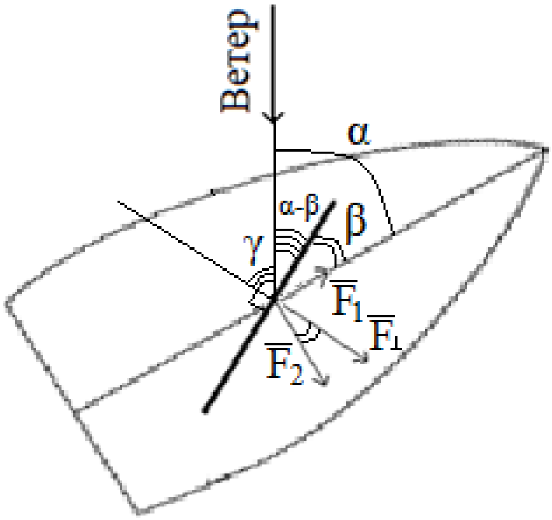
$$0 < \beta < \alpha$$

2) Величина силы, действующей на парус перпендикулярно его поверхности, будет равна

$$F_\perp = F_0 \cos^2 \gamma = F_0 \sin^2(\alpha - \beta)$$

Величина силы, толкающей судно вперед

$$F_1 = F_\perp \sin(\beta) = F \sin^2(\alpha - \beta) \sin(\beta)$$



3) Судно стоит на месте при углах $\beta = 0$ и $\beta = \alpha$, но движется вперед при $0 < \beta < \alpha$. Значит в этом интервале существует некоторый угол β, при котором сила, толкающая судно вперед будет иметь максимальное значение. Найдем этот угол.

Для нахождения оптимального положения паруса, возьмем производную по β и приравняем к 0

$$(F_1)'_\beta = F_0 \sin(\alpha - \beta)\,(\sin(\alpha - \beta)\cos\beta - 2\sin\beta\cos(\alpha - \beta)) = 0$$

случай $\sin(\alpha - \beta) = 0$ нас не интересует

$$\sin(\alpha - \beta)\cos\beta - 2\sin\beta\cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\frac{3}{2}\sin(\alpha - \beta)\cos\beta - \frac{3}{2}\sin\beta\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta)\cos\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\frac{3}{2}\sin(\alpha - 2\beta) - \frac{1}{2}\sin\alpha = 0$$

$$\sin(\alpha - 2\beta) = \frac{\sin\alpha}{3}$$

Мы работаем с острым углом

$$\alpha - 2\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{3}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{3}\right)\right)$$

Также возможны варианты ответа

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{9 + 8\operatorname{tg}^2\alpha} - 3}{4\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

$$\beta = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{8 + 9\operatorname{ctg}^2\alpha} + 3\operatorname{ctg}\alpha\right)\right)$$

Критерии оценивания:

Дано качественное объяснение возможности движения под острым углом к	5

направлению ветра (вопрос 1). При наличии количественного решения засчитывается полностью или частично.	
Найдена сила, действующая на парус, расположенный под прямым углом к ветру.	2
Найдена сила, действующая на парус, расположенный под произвольным углом к ветру.	5
Найдена сила, действующая на судно вдоль киля.	4
Учтено влияние киля.	1
Получен ответ на вопрос 2	3
Корректно вычислена производная от силы по углу.	3
Получен ответ на вопрос 3	2