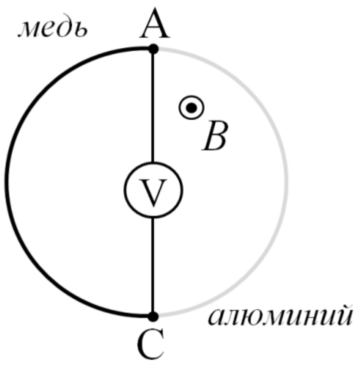
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2024-2025 учебный год
11 класс
Разбор задач

Пояснения к критериям оценивания.
Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий ***конкретно*** *к данной задаче и записанный* ***верно****. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (20 б.)

Проволочное кольцо радиусом R (см. рисунок) находится в однородном магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Кольцо изготовлено из проволоки одинакового сечения, но левая половина выполнена из меди, правая из алюминия. Удельное сопротивление алюминия в n раз больше сопротивления меди. Магнитное поле меняется со временем по закону $B = -kt$, k − постоянная. Какое по модулю напряжение показывает идеальный вольтметр, расположенный на диаметре АС.



Возможное решение:

Обозначим за R_C, R_A, R_V сопротивления медной, алюминиевой проволоки и сопротивление участка АС с вольтметром. Сначала рассмотрим более общий случай, когда R_V конечен.

Комбинируя закон Фарадея и второе правило Кирхгофа, запишем для левого и правого от перемычки контура

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{k\pi R^2}{2} \equiv \varepsilon_0,$$

$$\begin{cases} I_C R_C + I_V R_V = \varepsilon_0 \\ I_A R_A - I_V R_V = \varepsilon_0 \\ I_C - I_A = I_V \end{cases},$$

где I_C, I_A, I_V токи через участки с соответствующими индексами. Найдем ток из этой системы

$$\begin{cases} I_C + I_V \dfrac{R_V}{R_C} = \dfrac{\varepsilon_0}{R_C} \\ I_A - I_V \dfrac{R_V}{R_A} = \dfrac{\varepsilon_0}{R_A} \\ I_C - I_A = I_V \end{cases}$$

$$I_V + I_V R_V \left(\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_A}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_A}\right),$$

$$I_V = \frac{\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_A}\right)}{1 + R_V\left(\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_A}\right)}$$

Напряжение на вольтметре совпадет с напряжением на всем участке AC, так как его сопротивление стремится к бесконечности. Пренебрегая R_C и R_A по сравнению с R_V в знаменателе, получаем

$$U = R_V I_V = \frac{\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_A}\right)}{\left(\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_A}\right)} = \varepsilon_0 \frac{R_A - R_C}{R_A + R_C}$$

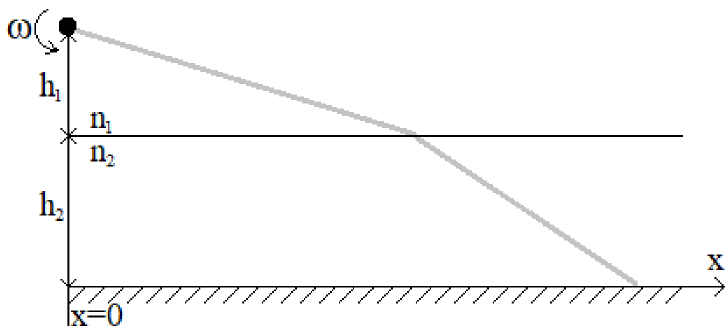
Учитывая, что $R_A = nR_C$, окончательно получаем

$$U = \varepsilon_0 \frac{nR_C - R_C}{nR_C + R_C} = \frac{k\pi R^2}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

Критерии оценивания:

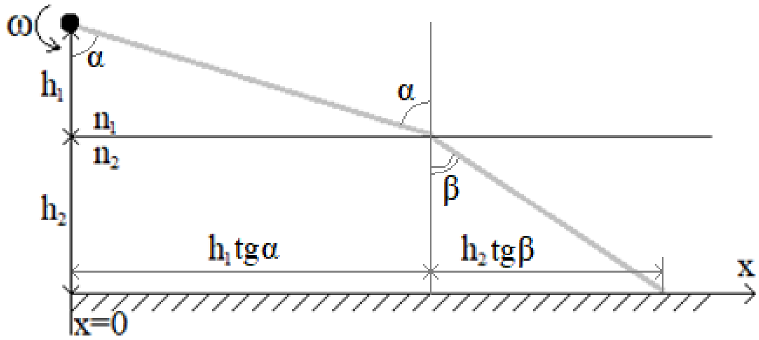
Найдена ЭДС индукции для контура или правой и левой части по отдельности.	2
Второе правило Кирхгофа для контуров или аналогичные уравнения (не менее 2х независимых уравнений).	5
Ток через вольтметр связан с токами через правую и левую часть контура.	5
Ток через вольтметр выражен через известные величины.	4
Найдено напряжение на вольтметре.	4

Задача 2. (20 б.)



Протяженный бассейн глубиной h_2 заполнен водой. Над точкой $x = 0$ на высоте h_1 над поверхностью воды расположен лазер. Лазер поворачивается с постоянной угловой скоростью в указанном на рисунке направлении, направляя луч света, создающий изображение в виде светящейся точки на дне бассейна. Известно, что спустя $\frac{1}{12}$ периода вращения лазера с момента прохождения изображения через точку $x = 0$, скорость изображения увеличилась в $\frac{7}{6}$ раз по сравнению со скоростью изображения в точке $x = 0$. Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$, показатель преломления воздуха равен 1. Найдите $\frac{h_2}{h_1}$.

Возможное решение:



В каждый момент времени лазерный луч отклонен на некоторый угол α от перпендикуляра к поверхности воды. α является углом падения света на границу раздела сред. Проходя границу раздела сред, луч испытает преломление и войдет в воду под некоторым углом β к перпендикуляру. Учитывая, что показатель преломления воды n, а показатель преломления воздуха единица, можем записать закон преломления. В данном случае он будет иметь вид:

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

Выразим координату изображения через углы α и β, и расстояния h_1 и h_2. Координату можно выразить через тангенсы углов, как показано на рисунке

$$x = h_1 \operatorname{tg} \alpha + h_2 \operatorname{tg} \beta$$

Учитывая закон преломления, выразим tg β через α

$$x = h_1 \operatorname{tg} \alpha + h_2 \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Пусть в начальный момент времени изображение находилось в точке $x = 0$. Тогда $\alpha = \omega t$, где $\omega = const$ – угловая скорость вращения лазера. Зависимость координаты изображения от времени будет иметь вид

$$x = h_1 \operatorname{tg} \omega t + h_2 \frac{\sin \omega t}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega t}}$$

Взяв производную координаты по времени, получим выражение для скорости изображения

$$v = \frac{\omega h_1}{\cos^2 \omega t} + \frac{\omega h_2 n^2 \cos \omega t}{(n^2 - \sin^2 \omega t)\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega t}}$$

Найдем скорость изображения в точке $x = 0$. В этой точке изображение находилось в момент времени $t = 0$, тогда

$$v_0 = \omega \left(h_1 + \frac{h_2}{n}\right) = \omega \left(h_1 + \frac{3}{4} h_2\right)$$

Найдем скорость изображения спустя $\frac{1}{12}$ периода вращения лазера, то есть в момент времени $t = \frac{T}{12}$. Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получим $\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12} = \frac{\pi}{6}$. Подставив ωt в выражение для скорости, получим

$$v_{12} = \omega\left(\frac{4}{3}h_1 + \frac{n^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}}h_2\right) = \omega\left(\frac{4}{3}h_1 + \frac{192}{55}\sqrt{\frac{3}{55}}h_2\right)$$

Возьмем отношение $\frac{v_{12}}{v_0}$, по условиям задачи, равное $\frac{7}{6}$

$$\frac{v_{12}}{v_0} = \frac{\frac{4}{3}h_1 + \frac{192}{55}\sqrt{\frac{3}{55}}h_2}{h_1 + \frac{3}{4}h_2} = \frac{7}{6}$$

Тогда

$$\frac{1}{6}h_1 = \left(\frac{7}{8} - \frac{192}{55}\sqrt{\frac{3}{55}}\right)h_2$$

Отсюда получаем искомое отношение

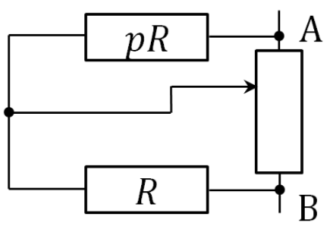
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{3\left(\frac{7}{4} - \frac{384}{55}\sqrt{\frac{3}{55}}\right)} \approx 2{,}8$$

Критерии оценивания:

Положение изображения выражено через углы падения и преломления.	4
Найдена координата изображения как функция угловой координаты лазера с учетом преломления.	4
Скорость изображения равна производной от координаты изображения по времени.	2
Корректно вычислена производная.	4
Отношение скоростей выражено через искомые высоты.	4
Найдено искомое отношение высот.	2

Задача 3. (20 б.)

На рисунке изображена схема участка электрической цепи, состоящей из резисторов и реостата. Минимальное сопротивление реостата равно 0, максимальное R_0. Сопротивление $R = nR_0$, n и p – известные постоянные. Сопротивлением контактов и проводов пренебречь.



1) При каком положении ползунка реостата сопротивление между клеммами A и B будет максимальным? В ответе указать обоснованное значение сопротивления участка реостата между точкой A и ползунком реостата, выраженное через n, p, R_0.

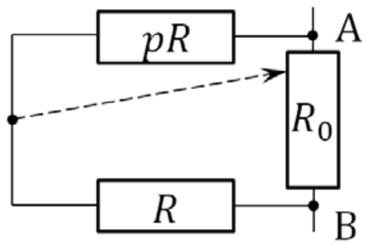
2) При $p = 3$, $n = 2$ найти отношение максимального и минимального сопротивления участка цепи AB при различных положениях ползунка реостата.

Возможное решение:

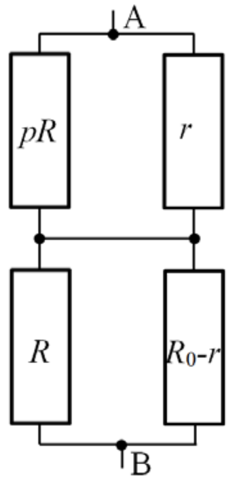
Сопротивление схемы на рисунке без перемычки равно

$$R_{AB} = \frac{(p+1)RR_0}{(p+1)R + R_0}$$

Добавление перемычки (соединенной с ползунком реостата), не может увеличить сопротивление схемы, даже если перемычка будет иметь конечное сопротивление. Но если ток по перемычке не будет течь, то и на сопротивление она не повлияет.



Изобразим эквивалентную схему r - сопротивление верхней части реостата.



Ток через перемычку не потечет, если выполнено условие

$$\frac{pR}{R} = \frac{r}{R_0 - r}$$

$$r = \frac{pR_0}{1+p}$$

Это ответ на вопрос задачи 1)

Задачу также можно решить напрямую. Рассмотрим общее сопротивление участка цепи

$$R_{AB} = \frac{pRr}{pR + r} + \frac{R(R_0 - r)}{R + R_0 - r}$$

Введем обозначение $r = kR_0$ и преобразуем выражение

$$R_{AB} = nR_0\left(\frac{pk}{pn + k} + \frac{1-k}{n+1-k}\right)$$

$$R_{AB} = nR_0\left(p - \frac{p^2 n}{pn + k} + 1 - \frac{n}{n+1-k}\right)$$

$$R_{AB} = nR_0\left(p + 1 - n\left(\frac{p^2}{pn+k} + \frac{1}{n+1-k}\right)\right)$$

Обозначим выражение, выделенное цветом за S, и исследуем его на экстремум как функцию k

$$S = \frac{p^2}{pn+k} + \frac{1}{n+1-k}$$

$$S'_k = -\frac{p^2}{(pn+k)^2} + \frac{1}{(n+1-k)^2}$$

$$p^2(1+n-k)^2 - (pn+k)^2 = 0$$

Корни этого уравнения

$$k_1 = \frac{p}{1+p}, k_2 = \frac{p}{p-1}(2n+1)$$

Второй корень не подходит, так как является произведением двух сомножителей, которые могут быть либо больше 1, либо отрицательными. Напомним, что k может принимать значения от 0 до 1. Первый корень дает нужное положение реостата. Кроме того, такой анализ показывает, что экстремум на отрезке [0..1] единственный. Такой же вывод можно сделать из качественного анализа функции.

Ответим на вопрос 2) Вычислим R_{AB} в экстремуме и на границах интервала, подставив известные p и n.

$$R_{AB}(k=0) = 2R_0\left(4 - 2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}R_0$$

$$R_{AB}(k=1) = 2R_0\left(4 - 2\left(\frac{9}{7} + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{6}{7}R_0$$

$$R_{AB}\left(k=\frac{3}{4}\right) = 2R_0\left(4 - 2\left(\frac{36}{27} + \frac{4}{9}\right)\right) = \frac{8}{9}R_0$$

$$\frac{R_{ABmax}}{R_{ABmin}} = \frac{4}{3}$$

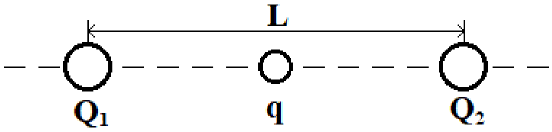
Критерии оценивания:

Записано полное сопротивление участка цепи.	4
Любым способом найдено положение ползунка реостата, отвечающего максимальному сопротивлению.	10
Найдено максимальное и минимальное сопротивление для частного случая.	5
Найдено отношение максимального и минимального сопротивлений.	1

Задача 4. (20 б.)

Между двумя точечными заряженными частицами с зарядами Q_1 и Q_2, расположенными на расстоянии L, находится точечная заряженная частица с зарядом q и массой m. Все три частицы имеют одноименные заряды и лежат на одной прямой. Положения частиц с зарядами Q_1 и Q_2 фиксированы, они не могут перемещаться. Частица с зарядом q может двигаться без трения только по прямой, на которой лежат все три частицы. Найдите

частоту малых гармонических колебаний частицы с зарядом q при отклонении от положения равновесия много меньшем расстояний между положением равновесия и каждой из частиц с зарядами Q_1 и Q_2. Магнитным полем, образующимся в результате движения заряда пренебречь.
Указание: $(1+a)^{\gamma} \approx 1+\gamma a$ при $a \ll 1$.



Возможное решение:

Поскольку все три заряженные частицы имеют одноименные заряды, на подвижный заряд q будут действовать две кулоновские силы отталкивания: от заряда Q_1 – вправо и от заряда Q_2 – влево. Направим ось Ох вправо, положив начало отсчета в точке нахождения заряда Q_1, и запишем второй закон Ньютона для заряженной частицы с зарядом q и массой m:

$$ma = \frac{kqQ_1}{x^2} - \frac{kqQ_2}{(L-x)^2}$$

где k – коэффициент пропорциональности в законе Кулона.
Найдем положение равновесия x_0, приравняв ускорение к нулю:

$$\frac{kqQ_1}{x^2} = \frac{kqQ_2}{(L-x)^2}$$

$$x = x_0 = \frac{L}{1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}}$$

Обозначим отклонение от положения равновесия как $\Delta x = x - x_0$. С учетом, что $x = x_0 + \Delta x$, перепишем уравнение Ньютона:

$$a + \frac{kq}{m}\left(Q_2\frac{1}{(L-x_0-\Delta x)^2} - Q_1\frac{1}{(x_0+\Delta x)^2}\right) = 0$$

В знаменателях полученных дробей вынесем $L - x_0$ и x_0 за скобки:

$$a + \frac{kq}{m}\left(\frac{Q_2}{(L-x_0)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\Delta x}{L-x_0}\right)^2} - \frac{Q_1}{{x_0}^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2}\right) = 0$$

Так как x_0 и $L - x_0$ являются расстояниями между положением равновесия и зарядами Q_1 и Q_2 соответственно, то по условиям задачи $\Delta x \ll L - x_0$ и $\Delta x \ll x_0$, или $\frac{\Delta x}{L-x_0} \ll 1$, $\frac{\Delta x}{x_0} \ll 1$. Значит в дробях $\frac{1}{\left(1-\frac{\Delta x}{L-x_0}\right)^2}$ и $\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2}$ мы можем совершить переход по формуле, данной в указании (в этом случае $\gamma = -2$). Тогда получим:

$$a + \frac{kq}{m}\left(\frac{Q_2}{(L-x_0)^2}\left(1+2\frac{\Delta x}{L-x_0}\right) - \frac{Q_1}{{x_0}^2}\left(1-2\frac{\Delta x}{x_0}\right)\right) = 0$$

С учетом выражения для x_0:

$$a + \frac{2kq}{mL^3}\sqrt{\frac{{Q_1}^3}{Q_2}}\left(1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)^4 \Delta x = 0$$

Ускорение – вторая производная координаты по времени, отсюда

$$\Delta x_t'' + \frac{2kq}{mL^3}\sqrt{\frac{{Q_1}^3}{Q_2}}\left(1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)^4 \Delta x = 0$$

Подставим отклонение Δx в виде $\Delta x = A\sin(\omega t + \varphi)$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + A\frac{2kq}{mL^3}\sqrt{\frac{{Q_1}^3}{Q_2}}\left(1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)^4 \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Отсюда получим

$$\omega = \left(1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)^2 \sqrt{\frac{2kq}{mL^3}\sqrt{\frac{{Q_1}^3}{Q_2}}} = \left(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2kq}{\sqrt{Q_1 Q_2}\, mL^3}}$$

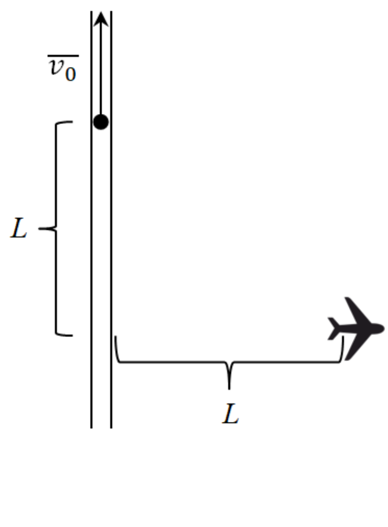
$$\nu = \frac{1}{\pi}\left(1+\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)^2 \sqrt{\frac{kq}{2mL^3}\sqrt{\frac{{Q_1}^3}{Q_2}}} = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}\right)^2 \sqrt{\frac{kq}{2\sqrt{Q_1 Q_2}\, mL^3}}$$

Критерии оценивания:

Записан второй закон Ньютона для заряженной частицы.	4
Найдено положение равновесия.	4
Второй закон Ньютона переписан через смещение от положения равновесия.	3
Линеаризация второго закона Ньютона с учетом малости смещения.	4
Показано, что полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний.	2
Найдена частота малых колебаний.	3

Задача 5. (20 б.)

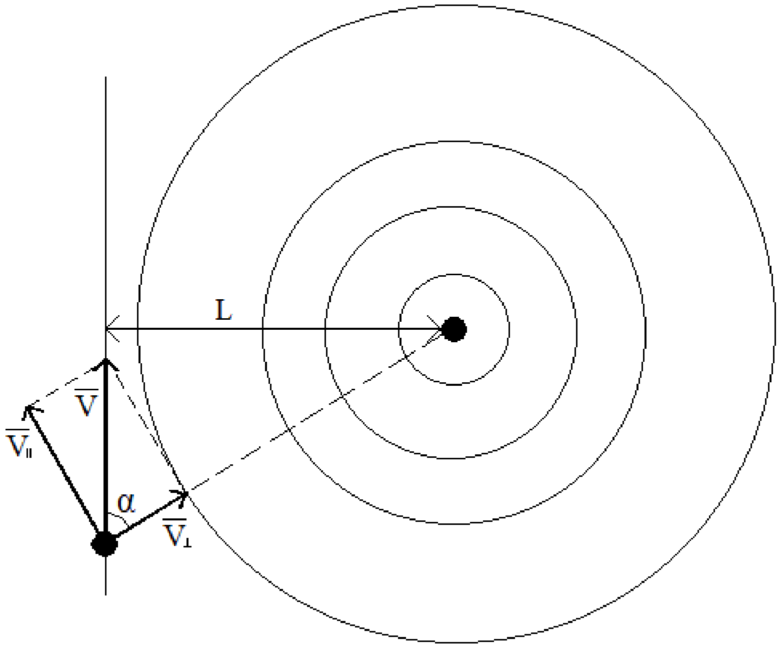
Велосипедист едет по прямой дороге. На некотором фиксированном расстоянии L от дороги стоит самолет с работающими двигателями. Основная доля интенсивности звука, испускаемого двигателями, имеет определенную постоянную частоту. Отъехав расстояние L от точки, где расстояние от дороги до самолета было кратчайшим (и равным L), он заметил, что частота звука от удаляющегося от него неподвижного самолета не меняется. Скорость велосипедиста в этот момент была равна v_0. Найдите зависимость пройденного велосипедистом пути от времени (начиная с этого момента).



Возможное решение:

<u>1 способ</u>

При движении велосипедиста относительно стоящего самолета будет наблюдаться эффект Доплера – зависимость воспринимаемой приемником частоты волн, излучаемых источником, от скоростей движения источника и приемника. В данном случае источник покоится, а приемник движется. В каждый момент времени на слышимую велосипедистом частоту будет влиять составляющая его скорости $\vec{v}$, направленная от него к самолету, то есть перпендикулярно фронту звуковой волны. Обозначим ее $\overrightarrow{v_\perp}$. Тогда $v_\perp = v\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\overrightarrow{v_\perp}$. При движении велосипедиста вектор $\overrightarrow{v_\perp}$ будет поворачиваться, угол α будет меняться.



Для слышимой велосипедистом частоты будет справедливо выражение

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_\perp}{v_{зв}}\right)$$

где $\nu_0 = const$ – истинная частота звука, издаваемого самолетом, $v_{зв} = const$ – скорость распространения звуковой волны.

Отсюда следует, что для постоянства во времени слышимой велосипедистом частоты должна быть постоянной составляющая его скорости $v_\perp$.

Пусть $v_\perp = A$ (то есть $A = v_{зв}\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right) = const$). Тогда

$$v\cos\alpha = A$$

$A > 0$ – при приближении велосипедиста к самолету, $A < 0$ – при удалении.

Рассмотрим общий случай приближения или отдаления велосипедиста от самолета. Пусть ось Ох сонаправлена со скоростью велосипедиста, начало отсчета $x = 0$ находится в точке наиболее близкой к источнику звука (на расстоянии L). Тогда $\cos\alpha = -\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$ («-», т. к. x и $\cos\alpha$ имеют разные знаки в выбранной системе отсчета), и уравнение будет иметь вид

$$v\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} = -A$$

В уравнении фигурирует производная координаты по времени $v = x'_t$. Чтобы найти $x(t)$, положим, что левая и правая части уравнения являются производными по времени некоторых функций. Известно, что константа – производная линейной функции, то есть для правой части это будет функция вида $-At + B$ (где B – некоторая постоянная). Чтобы найти такую функцию для левой части, запишем выражение для производной сложной функции вида $f\left(g\big(x(t)\big)\right)$

$$f\left(g\big(x(t)\big)\right)'_t = f'_g \cdot g'_x \cdot x'_t$$

В левой части уравнения $x'_t = v$, тогда

$$f'_g \cdot g'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}}$$

Домножим числитель и знаменатель дроби на 2

$$f'_g \cdot g'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + L^2}}$$

Известно, что $2x = (x^2 + const)_x'$. Если положить $g(x) = x^2 + L^2$, то есть $g'_x = 2x$, то

$$f'_g = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$\frac{1}{2\sqrt{g}}$ – производная функции $f(g) = \sqrt{g}$ по g.

Тогда $f\left(g\big(x(t)\big)\right) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\big(x(t)\big)^2 + L^2}$ – левая часть уравнения является производной функции такого вида.

Приравняв полученные функции для левой и правой частей, будем иметь

$$\sqrt{x^2 + L^2} = -At + B$$

Выразим x

$$x = \pm\sqrt{(-At + B)^2 - L^2}$$

В нашем случае $A < 0$ и координата положительна. Координата при $t = 0$ должна быть равна L. После подстановки в закон движения, находим $B = \sqrt{2}L$.

$$v(t) = \frac{-A(-At + B)}{\sqrt{(-At + B)^2 - L^2}}$$

Подставляя скорость в начальный момент времени, получаем

$$-A = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

Окончательно, закон движения и путь, пройденный велосипедистом, имеют вид

$$x = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}t + \sqrt{2}L\right)^2 - L^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(v_0 t + 2L)^2 - L^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(v_0 t + 2L)^2 - L^2} - L$$

<u>2 способ</u> (На основе решений участников олимпиады А. Левашова и Г. Овсиенко)

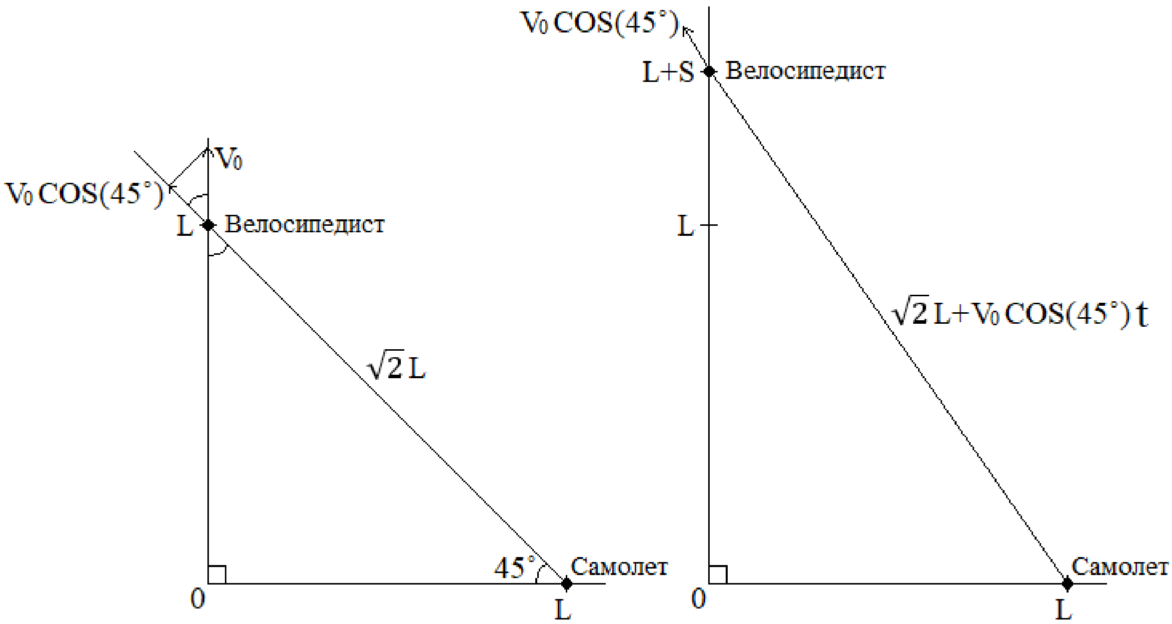
В момент времени, когда велосипедист находился на расстоянии L от точки, где расстояние от дороги до самолета было кратчайшим, его расстояние от самолета было равным $\sqrt{2}L$ (рисунок слева). В этот момент времени его скорость была равной v_0, тогда компонента скорости велосипедиста по лучу к источнику (лучевая скорость) была равной $v_0 \cos(45^\circ) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$.

Если слышимая велосипедистом частота при движении остается постоянной, то, в соответствии с законом для эффекта Доплера, велосипедист удаляется от самолета с постоянной скоростью. То есть лучевая скорость велосипедиста не должна изменяться.

Тогда, начиная с этого момента, в каждый момент времени его расстояние от самолета должно изменяться по закону

$$L_{\text{вс}} = \sqrt{2}L + v_0 \cos(45^\circ)\, t = \sqrt{2}L + \frac{v_0 t}{\sqrt{2}}$$

(рисунок справа).



В соответствии с теоремой Пифагора получим

$$L_{\text{вс}}{}^2 = (L + s)^2 + L^2$$

где s – искомый путь.

Подставив $L_{\text{вс}}$, получим

$$\left(\sqrt{2}L + \frac{v_0 t}{\sqrt{2}}\right)^2 = (L + s)^2 + L^2$$

Преобразовав выражение, получим квадратное уравнение на s

$$s^2 + 2Ls - v_0 t\left(2L + \frac{v_0 t}{2}\right) = 0$$

Решив данное уравнение, будем иметь

$$s = \frac{-2L \pm \sqrt{4L^2 + 4v_0t\left(2L + \frac{v_0t}{2}\right)}}{2}$$

Так как по условию задачи расстояние между велосипедистом и самолетом возрастает, берем корень со знаком «+» и получаем окончательный ответ

$$s = \sqrt{L^2 + v_0t\left(2L + \frac{v_0t}{2}\right)} - L = \sqrt{\frac{1}{2}(v_0t + 2L)^2 - L^2} - L$$

Критерии оценивания:

Изменение частоты связано с компонентой скорости по лучу к источнику (лучевая скорость).	4
Записано условие постоянства лучевой скорости через модуль скорости и координату.	6
Найден функциональный (с неизвестными константами) вид закона движения.	5
Найден окончательный вид закона движения и зависимости пройденного пути от времени.	5